

*Немировский Ю. В., Романова Т. П.*

## **ДИНАМИКА ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ ДВУСВЯЗНЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ**

*(Институт теоретической и прикладной механики СО РАН  
им. С. А. Христиановича)*

В работе получено общее решение задачи о динамическом изгибе идеальной жесткопластической двусвязной пластины переменной толщины шарнирно опертой или защемленной по обоим контурам, на которую действует равномерно распределенная по поверхности кратковременная динамическая нагрузка высокой интенсивности взрывного типа. Показано, что существует несколько механизмов деформирования пластины. Для каждого из них получены уравнения динамического деформирования и проанализированы условия реализации. Приведены примеры численных решений.

Ключевые слова: жесткопластическая пластина, двусвязная пластина, криволинейный контур, переменная толщина, динамическая нагрузка, предельная нагрузка, остаточный прогиб.

**Введение.** Оценка повреждения элементов конструкций в результате воздействия взрывных нагрузок является частью инженерных приложений теории динамической пластичности. Для таких задач широкое применение получила модель идеального жесткопластического тела. Упрощающие предположения этой модели полезны и разумны при анализе усложненных элементов конструкций [2].

При создании преград, защищающих от воздействия нагрузок взрывного типа, важнейшей является проблема подбора и перераспределения материала по конструкции, обеспечивающей минимальную степень повреждаемости. Эта задача непосредственно связана с проблемой оптимального проектирования, которая достаточно хорошо изучена применительно к статическим и динамическим гармоническим воздействиям на конструкции [7; 8]. В литературе неоднократно обсуждался вопрос о необходимости решения задачи оптимизации конструкций при воздействии динамических нагрузок [9]. Однако авторам настоящей работы не известны исследования по этой теме, за исключением работ [5] для балок и [3] для оболочек вращения. Предлагаемая статья продолжает исследования в данном направлении применительно к криволинейным двусвязным пластинам.

В работе предложена методика, основанная на модели идеального жесткопластического тела, которая позволяет рассчитывать криволинейные двусвязные пластины переменной толщины определенного вида под действием кратковременных интенсивных динамических нагрузок. Методика может быть использована специалистами, работающими в областях, связанных со взрывными нагрузками.

1. Рассмотрим тонкую идеальную жесткопластическую двусвязную пластину переменной толщины. Пластина нагружена равномерно распределенной по поверхности взрывной нагрузкой интенсивностью  $P(t)$ , которая характеризуется мгновенным достижением максимального значения  $P_{\max} = P(0)$  в начальный момент времени  $t = 0$  с последующим быстрым его уменьшением. Внешний и внутренний контуры пластины шарнирно оперты или защемлены. Пластина имеет произвольный гладкий выпуклый внешний контур  $L_1$ , заданный в параметрической форме:  $x = x_1(\varphi)$ ,  $y = y_1(\varphi)$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Радиус кривизны контура  $L_1$  равен  $R(\varphi) = L^3(\varphi)/(x_1' y_1'' - x_1'' y_1')$ , где  $L(\varphi) = \sqrt{x_1'^2(\varphi) + y_1'^2(\varphi)}$ ,  $(\quad)' = \partial(\quad)/\partial\varphi$ . Для определенности рассматриваем пластины, симметричные относительно оси  $x$ , имеющие геометрические размеры по оси  $y$  не больше, чем по оси  $x$  (рис. 1). Рассмотрим такие двусвязные пластины, у которых внутренний контур  $L_2$  находится на одинаковом расстоянии  $\lambda$  от внешнего контура  $L_1$ , причем величину  $\lambda$  выбираем так, чтобы нормали, опущенные из  $L_1$  во внутрь пластины, не пересекались между собой внутри пластины (рис. 1). Это условие выполняется, если  $0 < \lambda \leq \min_{\varphi} [R(\varphi)]$ .

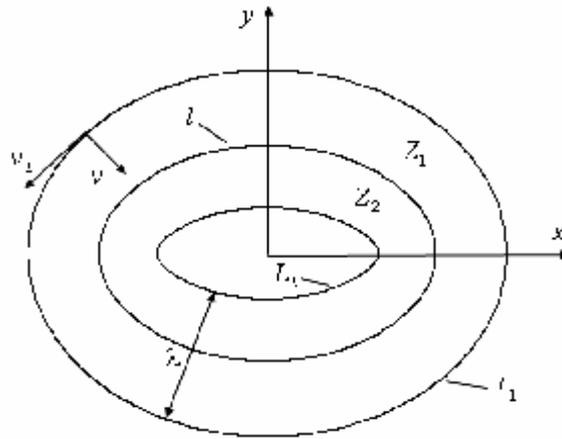


Рис. 1

Введем криволинейную ортогональную систему координат  $(v_1, v_2)$  (рис. 1), связанную с декартовой системой координат  $(x, y)$  соотношениями

$$x = x_1(v_2) - v_1 y_1'(v_2) / L(v_2), \quad y = y_1(v_2) + v_1 x_1'(v_2) / L(v_2).$$

Кривые  $v_1 = \text{const}$  находятся на расстоянии  $v_1$  от контура  $l$  и имеют радиус кривизны  $\rho_1 = R(v_2) - v_1$ . Прямые линии  $v_2 = \text{const}$  перпендикулярны к контуру  $l$  (радиус кривизны  $\rho_2 = \infty$ ). В этом случае уравнения контуров пластины  $L_i$  ( $i = 1, 2$ ) имеют вид  $v_1 = (i-1)\lambda$  ( $0 \leq v_2 \leq 2\pi$ ).

Считаем, что толщина пластины  $h$  является функцией параметра  $v_1$  и изменяется симметрично относительно срединной поверхности пластины. В работе предлагается модель деформирования пластины с постоянной толщиной в центральной части пластины и изменяющейся вблизи контуров, т. е.

$$h(v_1) = \text{const} \quad \text{при} \quad v_{11}^{\tilde{n}} \leq v_1 \leq v_{12}^{\tilde{n}}, \quad (1)$$

где  $v_{li}^{\bar{n}}$  ( $i=1,2$ ) – некоторые заданные значения. Другие ограничения на функцию  $h(v_1)$  и величину  $P_{\max}$ , связанные с предлагаемой моделью, приведены ниже.

В динамике рассматриваемой пластины из жесткопластического материала в зависимости от значения  $P_{\max}$  возможно деформирование по двум схемам. При нагрузках, не превышающих предельные нагрузки (“низких” нагрузках), пластина остается в покое. Как и в случае постоянной толщины [7], при нагрузках, незначительно превышающих предельные нагрузки (“средних” нагрузках), во внутренней области пластины образуется криволинейный пластический шарнир  $l$ , а вся пластина деформируется в две конические поверхности  $Z_1$  и  $Z_2$  (схема 1, представленная на рис. 1). При достаточно высоких значениях  $P_{\max}$  динамика пластины может сопровождаться возникновением области  $Z_p$ , движущейся поступательно (схема 2, представленная на рис. 2; “высокие” нагрузки). Область постоянной толщины ( $v_{11}^{\bar{n}} \leq v_1 \leq v_{12}^{\bar{n}}$ ,  $0 \leq v_2 \leq 2\pi$ ) должна включать в себя область  $Z_p$ . Обозначим толщину пластины в области  $Z_p$  через  $h_c$ . Контуры области  $Z_p$  – линии  $l_i$  ( $i=1,2$ ) являются пластическими шарнирами с нормальным изгибающим моментом  $\sigma_0 h_c^2 / 4$ .

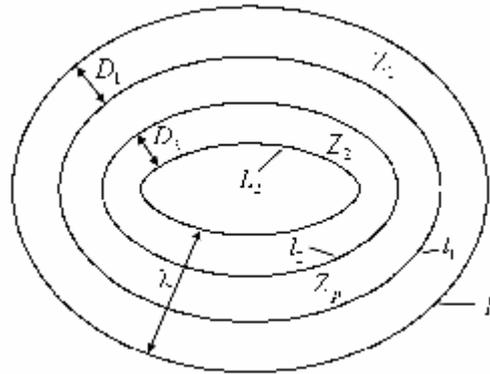


Рис. 2

Нормаль к  $L_i$  ( $i=1,2$ ), опущенная во внутрь пластины, попадает на  $l_i$  – контур области  $Z_p$ . В работе [7] показано, что расстояние  $D_i$  по нормали к  $L_i$  между  $L_i$  и  $l_i$  ( $i=1,2$ ) не зависит от параметра  $v_2$ , а уравнения  $l_i$  имеют вид

$$v_1 = (i-1)\lambda + (-1)^{i-1} D_i, \quad 0 \leq v_2 \leq 2\pi \quad (i=1,2). \quad (2)$$

Обозначим скорость прогиба в области  $Z_p$  через  $\dot{\omega}_c(t)$ . В силу непрерывности скоростей на границах областей  $Z_p$  и  $Z_i$  ( $i=1,2$ ) и независимости  $D_i$  от параметра  $v_2$ , скорость угла поворота областей  $Z_i$  вокруг опорного контура  $L_i$  не зависит от параметра  $v_2$ . Обозначим ее через  $\dot{\omega}_i(t)$ . В случае схемы деформирования 1, когда выполняется соотношение

$$D_1 + D_2 = \lambda, \quad (3)$$

область  $Z_p$  вырождается в кривую  $l$ , имеющую вид (1) при условии (2). Следовательно, при схеме 1 скорость угла поворота областей  $Z_i$  вокруг опорного контура  $L_i$  также не зависит от параметра  $v_2$ . Обозначим ее тоже через  $\dot{\omega}_i(t)$ . Нормальный изгибающий мо-

мент на кривой  $l$  равен  $\sigma_0 h^2(D_1)/4$ , где  $\sigma_0$  – предел текучести материала пластины. Поле скоростей прогибов  $w(v_1, v_2, t)$  пластины имеет вид

$$\begin{aligned} (v_1, v_2) \in Z_p : w(v_1, v_2, t) &= w_c(t), \\ (v_1, v_2) \in Z_i : w(v_1, v_2, t) &= w_i(t) \left[ (i-1)\lambda + (-1)^{i-1} v_1 \right] \quad (i=1, 2). \end{aligned} \quad (4)$$

Главные кривизны поверхности скоростей прогибов пластины в областях  $Z_i$  ( $i=1, 2$ ) имеют вид:

$$(\kappa_1)_i = \frac{\partial^2 w}{\partial v_1^2} = 0, \quad (\kappa_2)_i = \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial w}{\partial v_1} = \frac{(-1)^{i-1} w_i(t)}{R(v_2) - v_1}.$$

Уравнение движения пластины получим из принципа виртуальной мощности в сочетании с принципом Даламбера [9]:

$$K = A - N. \quad (5)$$

Здесь

$$K = \iiint_V \rho_V \dot{w}^* dV, \quad A = \iint_S P(t) \dot{w}^* dS;$$

$K$ ,  $A$ ,  $N$  – мощности инерционных, внешних и внутренних сил соответственно;  $V$ ,  $S$  – объем и площадь пластины;  $\rho_V$  – плотность материала пластины,  $w$  – прогиб;  $dV$ ,  $dS$  – элементы объема и площади. Точки над символами обозначают производные по времени. Величины с верхним индексом “\*” – допустимые скорости. Выражение для  $N$  запишем ниже.

В областях  $Z_i$  ( $i=1, 2$ ) изгибающий момент равен  $M_{22} = \sigma_0 h^2(v_1)/4$ . На контуре  $L_i$  пластины  $M_{11} = -\sigma_0 h^2((i-1)\lambda)(1-\eta_i)/4$ , где  $\eta_i = 0$  при защемлении контура  $L_i$  и  $\eta_i = 1$  при его шарнирном опирании.

Учитывая распределение скорости прогибов (4), и то, что  $dV = h(v_1) ds$  и  $ds = L(1 - v_1/R) dv_1 dv_2$ , а в области  $Z_p$  выполняется равенство  $h(v_1) = h_c$ , получим

$$\begin{aligned} K &= \rho_V \left[ \sum_{i=1,2} w_i^* \iint_{Z_i} h(v_1) v_1^2 ds + w_c^* \iint_{Z_p} h ds \right] = \rho_V \left( \sum_{i=1,2} w_i^* \Omega_{1i} + w_c^* h_c \iint_{Z_p} ds \right), \\ A &= P(t) \left[ \sum_{i=1,2} w_i^* \iint_{Z_i} v_1 ds + w_c^* \iint_{Z_p} ds \right] = P(t) \left( \sum_{i=1,2} w_i^* \Omega_{2i} + w_c^* \iint_{Z_p} ds \right), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\Omega_{11}(D_1) = \int_0^{2\pi} L \left[ \int_0^{D_1(t)} h(v_1) v_1^2 \left(1 - \frac{v_1}{R}\right) dv_1 \right] dv_2, \quad \Omega_{21}(D_1) = \int_0^{2\pi} L \left[ \int_0^{D_1(t)} v_1 \left(1 - \frac{v_1}{R}\right) dv_1 \right] dv_2,$$

$$\Omega_{12}(D_2) = \int_0^{2\pi} L \left[ \int_{\lambda - D_2(t)}^{\lambda} h(v_1) (\lambda - v_1)^2 \left(1 - \frac{v_1}{R}\right) dv_1 \right] dv_2,$$

$$\Omega_{22}(D_2) = \int_0^{2\pi} L \left[ \int_{\lambda - D_2(t)}^{\lambda} (\lambda - v_1) \left(1 - \frac{v_1}{R}\right) dv_1 \right] dv_2.$$

Выражение для мощности внутренних сил  $N$  в (5) представим в виде

$$N = \sum_{j=1}^6 N_j,$$

где  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$ ,  $N_4$ ,  $N_5$ ,  $N_6$  – мощности внутренних сил на контурах  $L_1$  и  $L_2$ , внутри областей  $Z_1$  и  $Z_2$ , на контурах  $l_1$  и  $l_2$  соответственно:

$$\begin{aligned}
N_1 &= (1-\eta_1)\sigma_0 \frac{h^2(0)}{4} \int_{L_1} [\mathfrak{E}]_{L_1} dL_1 \quad (dL_1 = Ldv_2), \\
N_2 &= (1-\eta_2)\sigma_0 \frac{h^2(\lambda)}{4} \int_{L_2} [\mathfrak{E}]_{L_2} dL_2 \quad (dL_2 = L(1-\frac{\lambda}{R})dv_2), \\
N_3 &= \frac{\sigma_0}{4} \iint_{Z_1} h^2(v_1)(\kappa_2)_1 ds, & N_4 &= \frac{\sigma_0}{4} \iint_{Z_2} h^2(v_1)(\kappa_2)_2 ds, \\
N_5 &= \frac{\sigma_0}{4} h^2(D_1) \int_{l_1} [\mathfrak{E}]_{l_1} dl_1 \quad (dl_1 = L(1-\frac{D_1}{R})dv_2), \\
N_6 &= \frac{\sigma_0}{4} h^2(\lambda - D_2) \int_{l_2} [\mathfrak{E}]_{l_2} dl_2 \quad (dl_2 = L(1-\frac{\lambda - D_2}{R})dv_2).
\end{aligned}$$

Здесь  $[\mathfrak{E}]_{l_m}$  – разрыв угловой скорости на линии  $l_m$ ;  $dL_i$ ,  $dl_i$  – элементы длины линий  $L_i$ ,  $l_i$  ( $i=1,2$ ). Из (4) с учетом того что нормаль к линии  $l_i$  является нормалью к контуру  $L_i$ , следует, что  $[\mathfrak{E}]_{L_i} = [\mathfrak{E}]_{l_i} = \mathfrak{E}_i$ . Тогда

$$\begin{aligned}
N_1 &= (1-\eta_1)\sigma_0 \frac{h^2(0)}{4} \mathfrak{E}_1^* \int_0^{2\pi} L dv_2, & N_2 &= (1-\eta_2)\sigma_0 \frac{h^2(\lambda)}{4} \mathfrak{E}_2^* \int_0^{2\pi} L(1-\frac{\lambda}{R}) dv_2, \\
N_3 &= \frac{\sigma_0}{4} \mathfrak{E}_1^* \iint_{Z_1} h^2(v_1) \frac{1}{R(v_2)-v_1} ds = \frac{\sigma_0}{4} \mathfrak{E}_1^* (\int_0^{2\pi} \frac{L}{R} dv_2) \int_0^{D_1(t)} h^2 dv_1, \\
N_4 &= \frac{-\sigma_0}{4} \mathfrak{E}_2^* \iint_{Z_2} h^2(v_1) \frac{1}{R(v_2)-v_1} ds = \frac{-\sigma_0}{4} \mathfrak{E}_2^* (\int_0^{2\pi} \frac{L}{R} dv_2) \int_{\lambda-D_2(t)}^{\lambda} h^2 dv_1, \\
N_5 &= \frac{\sigma_0}{4} h^2(D_1) \mathfrak{E}_1^* \int_0^{2\pi} L(1-\frac{D_1}{R}) dv_2, & N_6 &= \frac{\sigma_0}{4} h^2(\lambda - D_2) \mathfrak{E}_2^* \int_0^{2\pi} L(1-\frac{\lambda - D_2}{R}) dv_2.
\end{aligned}$$

Полная мощность внутренних сил пластины  $N$  определяется выражением

$$N = \sigma_0 \sum_{i=1,2} (\mathfrak{E}_i^* \Omega_{3i}), \quad (7)$$

$$\Omega_{31}(D_1) = (N_1 + N_3 + N_5) / (\mathfrak{E}_1^* \sigma_0), \quad \Omega_{32}(D_2) = (N_2 + N_4 + N_6) / (\mathfrak{E}_2^* \sigma_0).$$

Заметим, что если  $h(v_1) = \text{const}$ , то

$$N = \sigma_0 \frac{h^2}{4} [(2-\eta_1) \mathfrak{E}_1^* \int_0^{2\pi} L dv_2 + (2-\eta_2) \mathfrak{E}_2^* \int_0^{2\pi} L(1-\frac{\lambda}{R}) dv_2].$$

Подставляя выражения для  $K$ ,  $A$ ,  $N$  в (5) и учитывая, что  $\mathfrak{E}_i^*$  ( $i=1,2$ ),  $\mathfrak{E}_c^*$  независимы, получим уравнения движения при деформировании по схеме 2:

$$\rho_V \mathfrak{E}_i^* \Omega_{1i} = P(t) \Omega_{2i} - \sigma_0 \Omega_{3i} \quad (i=1,2), \quad (8)$$

$$\rho_V h_c \mathfrak{E}_c^* = P(t). \quad (9)$$

Из условия непрерывности скоростей на границах областей  $Z_i$  и  $Z_p$  получим

$$\mathfrak{E}_i D_i = \mathfrak{E}_c \quad (i=1,2). \quad (10)$$

Начальные условия имеют вид

$$\mathfrak{E}_i(0) = \alpha_i(0) = \mathfrak{E}_c(0) = w_c(0) = 0. \quad (11)$$

Начальные значения  $D_{i0} = D_i(0)$  для функций  $D_i(t)$ , ( $i = 1, 2$ ) определяются в зависимости от значения  $P_{\max}$  (см. ниже).

Система уравнений (8) – (10) описывает движение в случае деформирования по схеме 2. В случае схемы 1 область  $Z_p$  отсутствует, а движение определяется уравнениями (8), (3) и

$$\mathfrak{G}_1 D_1 = \mathfrak{G}_2 (\lambda - D_1). \quad (12)$$

2. Проведем анализ деформирования пластины. Если  $0 < P_{\max} \leq P_0$  («низкие» нагрузки), где  $P_0$  – предельная нагрузка, то пластина остается в состоянии покоя. Величину  $P_0$  определим из уравнений (8), (3) в момент начала движения  $t = 0$ , считая  $\mathfrak{G}_i(0) = 0$  ( $i = 1, 2$ ). Тогда

$$P_0 = \sigma_0 \Omega_{31}(D_1^*) / \Omega_{21}(D_1^*), \quad (13)$$

где  $D_1^*$  – значение  $D_1$  при  $P_{\max} = P_0$ ;  $D_1^*$  удовлетворяет уравнению

$$\Omega_{31}(D_1^*) / \Omega_{21}(D_1^*) = \Omega_{32}(\lambda - D_1^*) / \Omega_{22}(\lambda - D_1^*).$$

Если  $P_0 < P_{\max} \leq P_1$  («средние» нагрузки), где  $P_1$  – нагрузка, соответствующая появлению области  $Z_p$ , то движение происходит без области  $Z_p$  по схеме 1. Дифференцируя (10) по времени и исключая величины  $\mathfrak{G}_i$  ( $i = 1, 2$ ),  $\mathfrak{G}_c$  из полученных равенств с помощью (8), (9), получим соотношения

$$\frac{-\rho_V \mathfrak{G}_i D_i}{D_i} \Omega_{1i} = P(t) (\Omega_{2i} - \frac{\Omega_{1i}}{D_i h_c}) - \sigma_0 \Omega_{3i} \quad (i = 1, 2). \quad (14)$$

Нагрузку  $P_1$  определим из (14), учитывая, что при возникновении области  $Z_p$  в момент времени  $t = 0$  условие (3) имеет вид  $D_1^{**} + D_2^{**} = \lambda$ , где  $D_i^{**}$  – значение  $D_i$  ( $i = 1, 2$ ) при  $P_{\max} = P_1$ . Тогда

$$P_1 = \frac{\sigma_0 \Omega_{31}(D_1^{**})}{\Omega_{21}(D_1^{**}) - \Omega_{11}(D_1^{**}) / (D_1^{**} h_c)},$$

где  $D_1^{**}$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\Omega_{31}(D_1^{**})}{\Omega_{21}(D_1^{**}) - \Omega_{11}(D_1^{**}) / (D_1^{**} h_c)} = \frac{\Omega_{32}(\lambda - D_1^{**})}{\Omega_{22}(\lambda - D_1^{**}) - \Omega_{12}(\lambda - D_1^{**}) / [(\lambda - D_1^{**}) h_c]}.$$

При схеме 1 движение описывается уравнениями (3), (8), (12). Определим начальные значения  $D_{i0}$  ( $i = 1, 2$ ) для схемы 1. Из (8), учитывая (11), имеем

$$\rho_V \mathfrak{G}_i = \int_0^t \frac{P(\tau) \Omega_{2i} - \sigma_0 \Omega_{3i}}{\Omega_{1i}} d\tau \quad (i = 1, 2).$$

Из последних равенств и (12) получим

$$D_1 / D_2 = \left\{ \int_0^t [(P(\tau) \Omega_{22} - \sigma_0 \Omega_{32}) / \Omega_{12}] d\tau \right\} / \left\{ \int_0^t [(P(\tau) \Omega_{21} - \sigma_0 \Omega_{31}) / \Omega_{11}] d\tau \right\}.$$

Переходя в последнем выражении к пределу  $t \rightarrow 0$  и учитывая (3), получим уравнение для определения  $D_{10}$ :

$$D_{10} \frac{P_{\max} \Omega_{21}(D_{10}) - \sigma_0 \Omega_{31}(D_{10})}{\Omega_{11}(D_{10})} = (\lambda - D_{10}) \frac{P_{\max} \Omega_{22}(\lambda - D_{10}) - \sigma_0 \Omega_{32}(\lambda - D_{10})}{\Omega_{12}(\lambda - D_{10})}; \quad (15)$$

$D_{20}$  определяется из равенства (3):

$$D_{20} = \lambda - D_{10}. \quad (16)$$

Система уравнений (3), (8), (12) с начальными условиями (11), (15), (16) решается численно методом Рунге – Кутта. Момент остановки движения  $t_f$  определяется из условия

$$\dot{\alpha}_i(t_f) = 0 \quad (i=1,2). \quad (17)$$

Прогибы в пластине определяются из соотношений (4).

Если  $P_{\max} > P_1$  («высокие» нагрузки), то движение начнется с развитой областью  $Z_p$ . В первой фазе деформирования ( $0 < t \leq t_1$ ) движение происходит по схеме 2 и описывается уравнениями (8) – (10) с начальными условиями (11). Начальные условия  $D_{i0}$  ( $i=1,2$ ) для схемы 2 определяются из (12) при  $t=0$ :

$$P_{\max} [\Omega_{2i}(D_{i0}) - \Omega_{1i}(D_{i0}) / (D_{i0} h_c)] = \sigma_0 \Omega_{3i}(D_{i0}) \quad (18)$$

В этой фазе происходит уменьшение области  $Z_p$  ( $\dot{B}_i > 0$ ,  $i=1,2$ ) по закону (14). Система определяющих уравнений решается численно методом Рунге – Кутта. Время  $t_1$ , соответствующее исчезновению области  $Z_p$ , определяется из условия  $D_1(t_1) + D_2(t_1) = \lambda$ . В момент времени  $t_1$  определяются значения  $w_c(t_1)$ ,  $\dot{\alpha}_i(t_1)$ ,  $\alpha_i(t_1)$  ( $i=1,2$ ). В этой фазе возможна остановка движения при  $D_1(t_{1f}) + D_2(t_{1f}) < \lambda$  в момент  $t_{1f}$ , определяемый из уравнения  $\dot{\alpha}_i(t_{1f}) = 0$ . Если  $t_1 < t_{1f}$ , то движение продолжится во второй фазе.

Вторая фаза ( $t_1 < t \leq t_f$ ) движения пластины происходит по схеме 1 до остановки в момент времени  $t_f$ . Деформирование описывается уравнениями (3), (8), (12) с начальными условиями, определенными в конце первой фазы движения. Время остановки определяется условием (17). Все прогибы в пластине вычисляются из соотношений (4) с учетом всех фаз движения.

**3.** Рассматриваемая схема деформирования применима для пластин с толщиной  $h(v_1)$  специального вида (1). Рассмотрим другие ограничения, налагаемые на функцию  $h(v_1)$  и величину  $P_{\max}$  при использовании предлагаемой схемы деформирования. Эти условия можно получить, сравнивая предельную нагрузку  $P_0$  с предельной нагрузкой для других возможных схем движения.

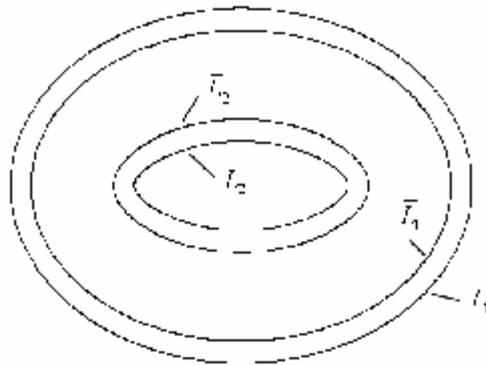


Рис. 3

Пластины переменной толщины могут деформироваться с образованием краевых пластических шарниров  $\bar{L}_i$  ( $i=1,2$ ) не по периметру контура опирания, а на некотором расстоянии  $v_{li}^a$  от контура  $L_i$  внутри пластины. При этом область у опорного контура пластины остается недеформированной. Уравнение контура  $\bar{L}_i$  имеет вид  $v_1 = v_{li}^a$  ( $0 \leq v_2 \leq 2\pi$ ) (рис. 3). На линии  $\bar{L}_i$  нормальный изгибающий момент равен  $\sigma_0 h^2 (v_{li}^a) / 4$ .

Если образуется шарнир  $\bar{L}_1$ , а  $\bar{L}_2$  – нет, то в выражениях (6, 7) для  $A$  и  $N$  значения  $\Omega_{21}$  и  $\Omega_{31}$  следует заменить на  $\Omega_{21}^{a_1}$  и  $\Omega_{31}^{a_1}$  соответственно, где

$$\begin{aligned}\Omega_{21}^{a_1}(D_1) &= \int_0^{2\pi} L \left[ \int_{v_{11}^a}^{D_1(t)} (v_1 - v_{11}^a) \left(1 - \frac{v_1}{R}\right) dv_1 \right] dv_2, \\ \Omega_{31}^{a_1}(D_1) &= (N_1^{a_1} + N_3^{a_1} + N_5) / (\mathfrak{E}_1^* \sigma_0), \\ N_1^{a_1} &= \sigma_0 \frac{h^2(v_{11}^a)}{4} \mathfrak{E}_1^* \int_0^{2\pi} L \left(1 - \frac{v_{11}^a}{R}\right) dv_2, \quad N_3^{a_1}(D_1) = \frac{\sigma_0}{4} \mathfrak{E}_1^* \left( \int_0^{2\pi} \frac{L}{R} dv_2 \right) \int_{v_{11}^a}^{D_1(t)} h^2 dv_1.\end{aligned}$$

Тогда предельная нагрузка  $P_0^{a_1}$  равна

$$P_0^{a_1} = \sigma_0 \Omega_{31}^{a_1}(D_1^{a_1}) / \Omega_{21}^{a_1}(D_1^{a_1}), \quad (19)$$

где величина  $D_1^{a_1}$  определяется из уравнения

$$\Omega_{31}^{a_1}(D_1^{a_1}) / \Omega_{21}^{a_1}(D_1^{a_1}) = \Omega_{32}(\lambda - D_1^{a_1}) / \Omega_{22}(\lambda - D_1^{a_1}).$$

Если образуется шарнир  $\bar{L}_2$ , а  $\bar{L}_1$  – нет, то в выражениях (6, 7) для  $A$  и  $N$  значения  $\Omega_{22}$  и  $\Omega_{32}$  следует заменить на  $\Omega_{22}^{a_2}$  и  $\Omega_{32}^{a_2}$  соответственно, где

$$\begin{aligned}\Omega_{22}^{a_2}(D_2) &= \int_0^{2\pi} L \left[ \int_{v_{12}^a - D_2}^{v_{12}^a} (v_{12}^a - v_1) \left(1 - \frac{v_1}{R}\right) dv_1 \right] dv_2, \\ \Omega_{32}^{a_2}(D_2) &= (N_2^{a_2} + N_4^{a_2} + N_6) / (\mathfrak{E}_2^* \sigma_0), \quad N_2^{a_2} = \sigma_0 \frac{h^2(v_{12}^a)}{4} \mathfrak{E}_2^* \int_0^{2\pi} L \left(1 - \frac{v_{12}^a}{R}\right) dv_2, \\ N_4^{a_2}(D_2) &= \frac{-\sigma_0}{4} \mathfrak{E}_2^* \left( \int_0^{2\pi} \frac{L}{R} dv_2 \right) \int_{v_{12}^a - D_2}^{v_{12}^a} h^2 dv_1.\end{aligned}$$

В этом случае предельная нагрузка  $P_0^{a_2}$  равна

$$P_0^{a_2} = \sigma_0 \Omega_{31}(D_1^{a_2}) / \Omega_{21}(D_1^{a_2}),$$

где величина  $D_1^{a_2}$  удовлетворяет уравнению

$$\Omega_{31}(D_1^{a_2}) / \Omega_{21}(D_1^{a_2}) = \Omega_{32}^{a_2}(v_{12}^a - D_1^{a_2}) / \Omega_{22}^{a_2}(v_{12}^a - D_1^{a_2}).$$

Если образуются оба шарнира  $\bar{L}_1$  и  $\bar{L}_2$ , то предельная нагрузка  $P_0^{a_3}$  равна

$$P_0^{a_3} = \sigma_0 \Omega_{31}^{a_1}(D_1^{a_3}) / \Omega_{21}^{a_1}(D_1^{a_3}),$$

где величина  $D_1^{a_3}$  определяется из уравнения

$$\Omega_{31}^{a_1}(D_1^{a_3}) / \Omega_{21}^{a_1}(D_1^{a_3}) = \Omega_{32}^{a_2}(v_{12}^a - D_1^{a_3}) / \Omega_{22}^{a_2}(v_{12}^a - D_1^{a_3}).$$

В данной работе мы не будем рассматривать случай, когда значение  $h_c$  достаточно большое. При очень большом значении  $h_c$  в некоторой центральной области  $Z_c$

( $v_{11}^c \leq v_1 \leq v_{12}^c$ ,  $0 \leq v_2 \leq 2\pi$ ) изгибающий момент  $M_{22} = \sigma_0 h_c^2 / 4$  будет намного больше, чем в остальной части пластины. Следовательно, область  $Z_c$  деформироваться не будет. Тогда движение пластины будет происходить при наличии центральной жесткой области  $Z_c$ , которая может двигаться поступательно или жестко вращаться в зависимости от значений  $v_{1i}^a$  ( $i = 1, 2$ ). Это будет отдельное самостоятельное исследование поведения криволинейной двусвязной пластины с жесткой вставкой.

Если функция  $h(v_1)$  имеет такой вид, что выполняется неравенство  $P_0 < \min(P_0^{a_1}, P_0^{a_2}, P_0^{a_3})$ , то пластина будет деформироваться по схемам 1 и 2, рассмотренным в пп. 1, 2. Поскольку предложенная модель движения получена в предположении, что  $h(v_1) = \text{const} = h_c$  в области  $Z_p$ , то из (18) следует, что должно выполняться ограничение на величину  $P_{\max}$ :

$$P_{\max} \leq \min_{i=1,2} \frac{\sigma_0 \Omega_{3i}(v_{1i}^c)}{\Omega_{2i}(v_{1i}^c) - \Omega_{1i}(v_{1i}^c) / (v_{1i}^c h_c)}.$$

Для пластин с постоянной толщиной модель применима при любых значениях величины  $P_{\max}$ . При нагрузках с  $P_{\max} \leq P_1$  модель верна для любой функции  $h(v_1)$ , а деформирование происходит по схеме 1.

Если выполняется условие

$$P_0^{a_1} < \min(P_0, P_0^{a_2}, P_0^{a_3}), \quad (20)$$

то пластина деформируется только в области с контурами  $\bar{L}_1$  ( $v_1 = v_{11}^a$ ;  $0 \leq v_2 \leq 2\pi$ ) и  $L_2$ . При этом величина  $v_{11}^a$  соответствует минимальному значению  $P_0^{a_1}$ , для которого выполняется неравенство (20). Анализ поведения в рассматриваемом случае подобен исследованию, проведенному в п. 2, но с заменой контура  $L_1$  на заземленный контур  $\bar{L}_1$ .

Если выполняется неравенство

$$P_0^{a_2} < \min(P_0, P_0^{a_1}, P_0^{a_3}), \quad (21)$$

то пластина деформируется только в области с контурами  $L_1$  и  $\bar{L}_2$  ( $v_1 = v_{12}^a$ ;  $0 \leq v_2 \leq 2\pi$ ). При этом величина  $v_{12}^a$  соответствует минимальному значению  $P_0^{a_2}$ , для которого выполняется неравенство (21). Анализ поведения в рассматриваемом случае подобен анализу, выполненному в п. 2, но с заменой контура  $L_2$  на заземленный контур  $\bar{L}_2$ .

Если выполняется условие

$$P_0^{a_3} < \min(P_0, P_0^{a_1}, P_0^{a_2}), \quad (22)$$

то пластина деформируется только в области с контурами  $\bar{L}_1$  и  $\bar{L}_2$ . При этом величины  $v_{11}^a$  и  $v_{12}^a$  соответствуют минимальному значению  $P_0^{a_3}$ , для которого выполняется неравенство (22). Анализ поведения в этом случае будет подобен анализу, проведенному в п. 2 при замене контуров  $L_1$  и  $L_2$  на заземленные контуры  $\bar{L}_1$  и  $\bar{L}_2$  соответственно.

4. В качестве примера рассмотрим двусвязную пластину переменной толщины в форме эллипса с полуосями  $a$  и  $b$  ( $b/a = \gamma \leq 1$ ). Для такой пластины величина  $\lambda$  выбирается в интервале  $0 < \lambda \leq b^2/a$  и выполняются равенства:  $L(\varphi) = \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}$ ,

$\int_0^{2\pi} \frac{L}{R} d\varphi = 2\pi$ ,  $\int_0^{2\pi} L d\varphi \approx \pi Q a$ , где  $Q = 1,5(1 + \gamma) - \sqrt{\gamma}$  (см. [8]). Рассмотрим случай функции

толщины пластины, линейно увеличивающейся вблизи внешнего контура пластины и постоянной в остальной части:

$$h(v_1) = \begin{cases} h(0) \left( -\frac{1-\xi}{\lambda_1} v_1 + 1 \right) & (0 \leq v_1 \leq \lambda_1), \\ h(0) \xi & (\lambda_1 \leq v_1 \leq \lambda), \end{cases} \quad (23)$$

где  $\xi = h(\lambda_1)/h(0) \leq 1$ ,  $\lambda_1 > 0$  (рис. 4). При  $\xi = 1$  толщина постоянная.

Для рассматриваемой пластины имеем

$$\Omega_{11}(D_1) = h(0) \frac{\pi a^4}{60} \left\{ \gamma_1^3 (1 - \xi) [5Q - 6\gamma_1 (1 - \xi)] + 10\xi \left(\frac{D_1}{a}\right)^3 (2Q - 3\frac{D_1}{a}) \right\},$$

$$\Omega_{12}(D_2) = h(0) \frac{\pi a^4 \xi}{6} \left(\frac{D_2}{a}\right)^3 \left[ 2(Q - 2\gamma_1) + 3\frac{D_2}{a} \right],$$

$$\Omega_{21}(D_1) = \frac{\pi a^3}{6} \left(\frac{D_1}{a}\right)^2 (3Q - 4\frac{D_1}{a}), \quad \Omega_{22}(D_2) = \frac{\pi a^3}{6} \left(\frac{D_2}{a}\right)^2 \left[ 3(Q - 2\gamma_1) + 4\frac{D_2}{a} \right],$$

$$\Omega_{31}(D_1) = \pi a \frac{h^2(0)}{4} \left[ Q(1 - \eta_1 + \xi^2) + \frac{2}{3}(1 - \xi)(1 + 2\xi)\gamma_2 \right],$$

$$\Omega_{32}(D_2) = \pi a \frac{h^2(0)}{4} \xi^2 (2 - \eta_2)(Q - 2\gamma_1),$$

где  $\gamma_1 = \lambda/a \leq \gamma^2$ ,  $\gamma_2 = \lambda_1/a > 0$ . Тогда предельная нагрузка по формуле (13) равна:

$$P_0 = 6 \frac{\sigma_0 h^2(0)}{4a^2} \frac{[Q(1 - \eta_1 + \xi^2) + 2(1 - \xi)(1 + 2\xi)\gamma_2/3]}{(D_1^*/a)^2 (3Q - 4D_1^*/a)}, \quad (24)$$

где величина  $D_1^*$  определяется из уравнения

$$\begin{aligned} [Q(1 - \eta_1 + \xi^2) + 2(1 - \xi)(1 + 2\xi)\gamma_2/3] (\gamma_1 - D_1^*/a)^2 [3(Q - 2\gamma_1) + 4(\gamma_1 - D_1^*/a)] = \\ = \xi^2 (2 - \eta_2)(Q - 2\gamma_1)(D_1^*/a)^2 (3Q - 4D_1^*/a). \end{aligned} \quad (25)$$

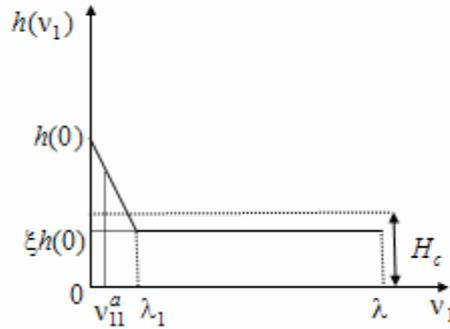


Рис. 4

Объем рассматриваемой пластины равен

$$V = \int_0^{2\pi} L \left[ \int_0^{\lambda} h(v_1) \left(1 - \frac{v_1}{R}\right) dv_1 \right] dv_2 = h(0) \pi a^2 \left[ Q(\xi \gamma_1 + \frac{1-\xi}{2} \gamma_2) - \xi \gamma_1^2 - \frac{1-\xi}{3} \gamma_2^2 \right]. \quad (26)$$

Двусвязную эллиптическую пластину с постоянной толщиной  $H_c$  ( $\xi=1$ ; рис. 4), имеющую равный объем с рассматриваемой пластиной переменной толщины, назовем эталонной. Объем эталонной пластины вычисляется по формуле

$$V = H_c \int_0^{2\pi} L \left[ \int_0^{\lambda} \left(1 - \frac{v_1}{R}\right) dv_1 \right] dv_2 = H_c \pi a^2 \gamma_1 (Q - \gamma_1). \quad (27)$$

Приравняв выражения (26) и (27), получим равенство

$$h(0) = H_c Q_1, \quad (28)$$

$$Q_1 = \frac{\gamma_1 (Q - \gamma_1)}{Q[\xi \gamma_1 + (1-\xi) \gamma_2 / 2] - \xi \gamma_1^2 - (1-\xi) \gamma_2^2 / 3}.$$

Подставляя значение  $h(0)$  из (28) в формулу (24), получим предельную нагрузку для двусвязных эллиптических пластин переменной толщины (23), имеющих одинаковый объем (27):

$$P_0 = \frac{6M_0 Q_1^2 [Q(1 - \eta_1 + \xi^2) + 2(1-\xi)(1+2\xi)\gamma_2/3]}{a^2 (D_1^*/a)^2 (3Q - 4D_1^*/a)}, \quad (29)$$

где  $M_0 = \sigma_0 H_c^2 / 4$ . Величина  $D_1^*$  удовлетворяет уравнению (25).

На рис. 5 приведена зависимость (29) предельной нагрузки  $p_0$  ( $p_0 = P_0 a^2 / M_0$ ) от величины  $\xi$  для двусвязных эллиптических пластин переменной толщины (23), имеющих одинаковый объем при  $\gamma = 0,8$  и  $\gamma_1 = 0,62$ . Кривые 1 соответствуют случаю  $\eta_1 = \eta_2 = 0$ ; кривые 2 изображают случай  $\eta_1 = 0, \eta_2 = 1$ ; кривые 3 –  $\eta_1 = 1, \eta_2 = 0$ ; кривые 4 –  $\eta_1 = 1, \eta_2 = 1$ . Тонкой линией нарисованы предельные нагрузки при  $\gamma_2 = 0,1$ , толстые линии соответствуют случаю  $\gamma_2 = 0,2$ .

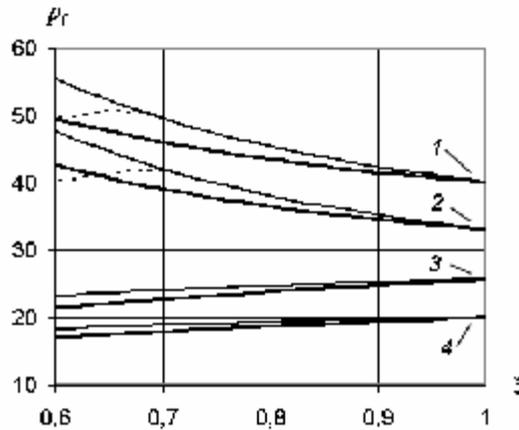


Рис. 5

Из рис. 5 видно, что при выборе функции толщины в виде (23) в случае защемления внешнего контура при уменьшении значения  $\xi$  предельная нагрузка увеличивается по сравнению с предельной нагрузкой эталонной пластины и уменьшается при шарнирном

опирании внешнего контура. Этот вывод справедлив для случаев как защемленного, так и шарнирно опертого внутреннего контура пластины при разных значениях величин  $\gamma$ ,  $\gamma_1$ .

Для рассматриваемой пластины в случае защемления внешнего контура возможно образование нового внешнего контура – пластического шарнира  $\bar{L}_1$  ( $v_1 = v_{11}^a$ ,  $0 \leq v_2 \leq 2\pi$ ) при любом креплении внутреннего контура. В этом случае предельная нагрузка пластины будет равна

$$P_0 = \min_{0 \leq v_{11}^a \leq \lambda_1} P_0^{a_1},$$

где  $P_0^{a_1}$  в соответствии с (19) вычисляется по формуле

$$P_0^{a_1} = \frac{6M_0 Q_1^2}{a^2 (D_1^{a_1} / a - v_a)^2 [3Q - 2(2D_1^{a_1} / a + v_a)]} \times \\ \times \left\{ \left[ \left( 1 - \frac{1-\xi}{\gamma_2} v_a \right)^2 + \xi^2 \right] Q - 4v_a + \frac{2\gamma_2}{3} (1-\xi)(1+2\xi) + \frac{2(1-\xi)v_a^2}{\gamma_2} \left[ 3 - \frac{4(1-\xi)}{3\gamma_2} v_a \right] \right\},$$

где  $v_a = v_{11}^a / a$ , а величина  $D_1^{a_1}$  определяется из уравнения

$$\frac{\left[ \left( 1 - \frac{1-\xi}{\gamma_2} v_a \right)^2 + \xi^2 \right] Q - 4v_a + \frac{2\gamma_2}{3} (1-\xi)(1+2\xi) + \frac{2(1-\xi)v_a^2}{\gamma_2} \left[ 3 - \frac{4(1-\xi)}{3\gamma_2} v_a \right]}{(D_1^{a_1} / a - v_a)^2 [3Q - 2(2D_1^{a_1} / a + v_a)]} = \\ = \frac{\xi^2 (2 - \eta_2)(Q - 2\gamma_1)}{(\gamma_1 - D_1^* / a)^2 [3(Q - 2\gamma_1) + 4(\gamma_1 - D_1^* / a)]}.$$

Расчеты показали, что в случае  $\gamma = 0,8$  и  $\gamma_1 = 0,62$  новый опорный контур  $\bar{L}_1$  не образуется при  $\gamma_2 = 0,2$  и  $0,6 \leq \xi \leq 1$ . В случае  $\gamma_2 = 0,1$  контур  $\bar{L}_1$  образуется при  $\xi \leq 0,72$  как в случае защемления, так и в случае шарнирного опирания внутреннего контура пластины. Для  $\gamma_2 = 0,1$  предельная нагрузка при  $0,6 \leq \xi \leq 0,72$  изображена на рис. 5 пунктирной линией. Зависимость величины  $v_a$  от значения  $\xi$  приведена на рис. 6, где линия 1 соответствует  $\eta_2 = 0$ , а линия 2 относится к случаю  $\eta_2 = 1$ .

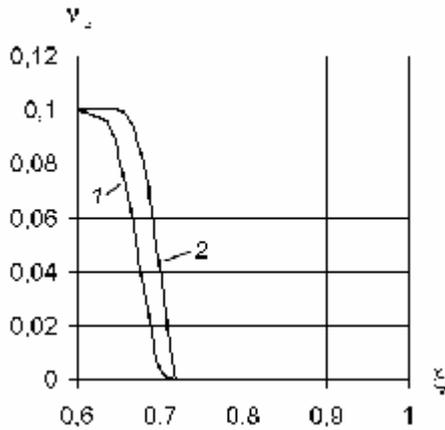


Рис. 6

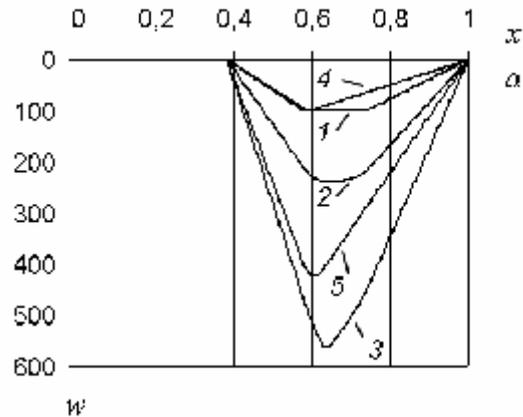


Рис. 7

Для рассматриваемой пластины с параметрами  $\eta_1 = \eta_2 = 0$ ;  $\gamma = 0,8$ ;  $\gamma_1 = 0,62$ ;  $\gamma_2 = 0,1$  (рис. 7) приведены безразмерные прогибы  $w = ua^2 \rho_V H_c / (M_0 T^2)$  в сечении  $y = 0$ . На пластину действует нагрузка, представленная прямоугольным импульсом:  $P(t) = 200M_0 / a^2$  при  $0 \leq t \leq T$ ,  $P(t) = 0$  при  $t > T$ . Для случая  $\xi = 1$  (эталонная пластина) такая нагрузка является «высокой», а для  $\xi = 0,8$  – «средней» нагрузкой. Кривые 1 – 3 изображают прогибы эталонной пластины в моменты времени  $t = T$ ,  $t = t_1 = 2,55T$ ,  $t = t_f = 7,46T$  соответственно. Кривые 4, 5 изображают прогибы в случае  $\xi = 0,8$  в моменты времени  $t = T$ ,  $t = t_f = 6,61T$  соответственно.

Из рис. 5, 7 видно, что переменная толщина значительно влияет как на несущую способность, так и на остаточные прогибы пластин. Изменяя только толщину пластины при одинаковом расходе материала (одинаковом объеме) можно получать более прочные и менее повреждаемые двусвязные криволинейные элементы конструкций.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06-08-08035-офи).

г. Новосибирск

Поступила: 25 апреля 2007 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Ерхов, М. И.* Теория идеально пластических тел и конструкций / М. И. Ерхов. – М. : Наука, 1978. – 352 с.
2. *Комаров, К. Л.* Динамика жесткопластических элементов конструкций / К. Л. Комаров, Ю. В. Немировский. – Новосибирск : Наука. Сиб. отд-ние, 1984. – 232 с.
3. *Люкшин, Б. А.* Расчет упругопластических оболочек вращения переменной толщины при динамическом нагружении / Б. А. Люкшин, В. А. Ковалев // Механика сплошных сред : сборник статей / под ред. Т. М. Платовой. – Томск : Изд-во Томск. гос. ун-та, 1983. – С. 10–17.
4. *Немировский, Ю. В.* Динамическая пластическая повреждаемость одно- и двусвязных эллиптических пластин / Ю. В. Немировский, Т. П. Романова // ПМТФ. – 2002. – № 2. – Т. 43. – С. 142–154.
5. *Немировский, Ю. В.* Оптимальное проектирование однородных и слоистых пластических балок при динамическом нагружении / Ю. В. Немировский // Проблемы оптимального проектирования сооружений: Доклады 5-го Всерос. семинара, Новосибирск, 7-8 апр. 2005 г. – Новосибирск : Новосиб. гос. архит.-строит. ун-т., 2005. – С. 261–267.
6. *Немировский, Ю. В.* Пластическое деформирование двусвязных пластин с криволинейным контуром при динамических нагрузках / Ю. В. Немировский, Т. П. Романова // Актуальные проблемы динамики и прочности в теоретической и прикладной механике. – Минск : Технопринт, 2001. – С. 515–525.
7. *Оптимальное проектирование конструкций* : библиогр. указ. / под ред. Ю. В. Немировского, В. Н. Мазалова. – Новосибирск : Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1975. – Т. 1. – 475 с.; Т. 2. – 472 с.
8. *Рейтман, М. И.* Методы оптимального проектирования деформируемых тел / М. И. Рейтман, Г. С. Шапиро. – М. : Наука, 1976. – 266 с.
9. *Якимава, Х.* Проектирование оптимальных динамически нагружаемых конструкций / Х. Якимава // Новые направления в строительном проектировании. – М. : Стройиздат, 1989. – С. 245–262.