ВЕСТНИК ЧГПУ
им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
МЕХАНИКА
ПРЕДЕЛЬНОГО
СОСТОЯНИЯ
№ 2 • 2007

УДК 539.3

Багдоев А.Г., Варданян А.В.

О КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ В СМЕШАННОЙ ГРАНИЧНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ

(*Институт механики НАН Армении*)

Рассматривается задача определения напряжений на границе упругого полупространства по заданным перемещениям. Решение находится методом интегральных трансформант Лапласа и Фурье, оно приводится к системе трех уравнений Винера-Хопфа, которая решается путем приведения к системе трех интегральных уравнений Фредгольма.

Полученные численные значения коэффициентов интенсивности напряжений позволяют определить значения постоянных, входящих в граничные перемещения, начиная с которых наступает неупругое поведение среды.

1. Постановка задачи и ее сведение к системе Винера – Хопфа. Рассматривается задача движения изотропного упругого полупространства $z \geq 0$, на границе которого $z = 0$ вдоль полуплоскости $x \geq 0$ заданы перемещения $u_{1,2,3}$, а вне ее граница свободна от напряжений. Эта задача является обобщением задачи [3; 8] о передаче перемещений от пластины, контактирующей с полупространством, с учетом граничного условия и для нормального перемещения. Решение рассматриваемых динамических смешанных граничных задач для полупространства получается методом интегральных преобразований и приводится к системе трех уравнений Винера-Хопфа или к векторной задаче Гильберта, которая сводится к системе [4; 5; 7; 14; 15] трех интегральных уравнений Фредгольма. Дается численное решение задачи путем обращения интегральных преобразований [2] с определением коэффициентов интенсивности напряжений. В ходе решения используется известная особенность около края, разделяющего граничные условия, которая известна из решения соответствующей статической плоской задачи теории упругости [11]. Динамические задачи о дифракции сдвиговых волн на полубесконечных включениях и конечных трещин другими методами решены в работах [1; 9; 13]. Плоская динамическая задача, подобная пространственной задаче, [3] решена в [10].

Уравнения теории упругости имеют вид $x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z,$

$$\left(a^2 - b^2\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial u_k}{\partial x_k} + b^2 \Delta u_j = \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}, \qquad (1.1)$$

где по повторяющимся индексам суммируется от 1 до 3, $j = 1, 2, 3$, Δ есть оператор Лапласа.

Граничные условия имеют вид $(z=0, |y|<\infty)$,

$$\sigma_{zz}=0, \sigma_{xz}=0,\ \sigma_{yz}=0,\ -\infty<x<0\,, \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} u_1&=-P\delta(x-\xi')\delta(y-\eta')H(t),\\ u_2&=-Q\delta(x-\xi')\delta(y-\eta')H(t),\\ u_3&=-R\delta(x-\xi')\delta(y-\eta')H(t),\\ &0<x<\infty \end{aligned} \tag{1.3}$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, $H(t)$ – единичная функция Хевисайда, P, Q, R, ξ', η' – постоянные. Это есть задача определения функции Грина, из решения которой можно получить решение общей задачи для произвольных граничных функций $u_{1,2,3}=U^o_{1,2,3}(t,x,y)$.

Обозначая полученные далее решения задач (1.2), (1.3)

$$U_j=PU_j^P(t,x-x',y-h')+QU_j^Q+RU_j^R,\ \ j=1,2,3$$

соответственно для перемещений при $z=0$ в виде

$$\begin{aligned} U_j(t,x,y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{t}\Bigg\{&\frac{\partial U_1^0(t,x'',h'')}{\partial t}U_j^P(t-t,x-x'',y-h'')+\\ &+\frac{\partial U_2^0(t,x'',h'')}{\partial t}U_j^Q(t-t,x-x'',y-h'')+\\ &+\frac{\partial U_3^0(t,x'',h'')}{\partial t}U_j^R(t-t,x-x'',y-h'')\Bigg\}dt\,dx''dh''. \end{aligned}$$

В заключительной части статьи приводится также решение для включаемых при $t=0$ постоянных перемещений на поверхности $z=0,\ x>0$, заданных на прямоугольнике, вне которого перемещения отсутствуют. Обозначая через $\overline{U}_j$ преобразование Лапласа по t от u_j, а через $\overline{\overline{U}}_j$ – преобразование Фурье по x, y от $\overline{U}_j\big|_{z=0}$, можно написать решение в виде

$$\overline{U}_j=\sum_1^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\overline{\overline{U}}{}_j^{(n)}(\overline{\alpha},\overline{\beta})\exp(\overline{\alpha}ix+\overline{\beta}iy+\overline{\gamma}_n iz)d\overline{\alpha}d\overline{\beta}\,. \tag{1.4}$$

Подставляя (1.4) в (1.1), получим соотношения

$$\overline{g}_n=\sqrt{\frac{w^2}{c_n^2}-\overline{a}^2-\overline{b}^2},\ s=-iw,\ c_1=a,\ c_2=b\,, \tag{1.5}$$

где s – параметр преобразования Лапласа, и

$$\overline{\overline{U}}{}_2^{(1)}=\frac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}}\overline{\overline{U}}{}_1^{(1)},\ \ \overline{\alpha}\overline{\overline{U}}{}_1^{(2)}+\overline{\beta}\,\overline{\overline{U}}{}_2^{(2)}+\overline{\gamma}_2\overline{\overline{U}}{}_3^{(2)}=0,\ \overline{\overline{U}}{}_3^{(1)}=\frac{\overline{\gamma}_1}{\overline{\alpha}}\overline{\overline{U}}{}_1^{(1)}. \tag{1.6}$$

Подставляя (1.4) в граничные условия (1.2), (1.3) и обращая преобразования Фурье по x, y, можно получить

$$i\overline{\overline{U}}_1^{(1)}\frac{4\overline{\gamma}_1\overline{\gamma}_2-\overline{\gamma}_2^2+\overline{\alpha}^2+\overline{\beta}^2}{2\overline{\gamma}_2}+i\overline{\overline{U}}_1^{(2)}\overline{\gamma}_2+\frac{i\overline{\alpha}\sigma_{zz}^-}{2b^2\overline{\gamma}_2 i\rho}=\frac{\tau_{xz}^-}{b^2\rho},$$

$$i\overline{\overline{U}}_2^{(1)}\frac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}}\frac{4\overline{\gamma}_1\overline{\gamma}_2-\overline{\gamma}_2^2+\overline{\alpha}^2+\overline{\beta}^2}{2\overline{\gamma}_2}+i\overline{\overline{U}}_2^{(2)}\overline{\gamma}_2+\frac{i\overline{\beta}\sigma_{zz}^-}{2b^2\overline{\gamma}_2 i\rho}=\frac{\tau_{yz}^-}{b^2\rho},$$

$$\overline{\overline{U}}_3^{(2)}=-\frac{\overline{\gamma}_2^2-\overline{\alpha}^2-\overline{\beta}^2}{2\overline{\gamma}_2\overline{\alpha}}\overline{\overline{U}}_1^{(1)}+\frac{\sigma_{zz}^-}{2b^2\overline{\gamma}_2 i\rho}, \tag{1.7}$$

$$\overline{\overline{U}}_1^{(1)}+\overline{\overline{U}}_1^{(2)}=P\varphi_0+U_1^+,\ \frac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}}\overline{\overline{U}}_1^{(1)}+\overline{\overline{U}}_2^{(2)}=Q\varphi_0+U_2^+,$$

$$\overline{\overline{U}}_3^{(1)}+\overline{\overline{U}}_3^{(2)}=R\varphi_0+U_3^+,\ \frac{\overline{\gamma}_2^2-\overline{\alpha}^2-\overline{\beta}^2}{2\overline{\alpha}}\overline{\overline{U}}_1^{(1)}-\overline{\alpha}\overline{\overline{U}}_1^{(2)}-\overline{\beta}\overline{\overline{U}}_2^{(2)}=0,$$

$$\varphi_0=-\frac{\exp\left(-i\overline{\alpha}\xi'-i\overline{\beta}\eta'\right)}{4\pi^2 s},$$

$$U_{1,2,3}^+=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}dy\int_{-\infty}^{0}dx\int_0^{\infty}e^{-st-i\overline{\alpha}x-i\overline{\beta}y}U_{1,2,3}(t,x,y,0)dt, \tag{1.8}$$

$$\tau_{xz,yz}^-,\ \sigma_{zz}^-=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}dy\int_0^{\infty}dx\int_0^{\infty}e^{-st-i\overline{\alpha}x-i\overline{\beta}y}\tau_{xz,yz},\sigma_{zz}dt,$$

где индекс (+) дает функции, аналитические в верхней полуплоскости $\overline{\alpha}$, а индекс (–) – функции аналитические в нижней полуплоскости.

2. Решение системы Винера-Хопфа. Исключая из (1.7) функции $\overline{\overline{U}}_{1,2,3}$, можно получить систему трех уравнений Винера-Хопфа, которая после введения обозначений в безразмерных переменных величинах

$$\overline{\alpha}=\frac{\omega}{\alpha}\eta,\ \overline{\beta}=\frac{\omega}{\alpha}\lambda,\ \overline{\gamma}_{1,2}=\frac{\omega}{\alpha}\gamma_{1,2},\ \gamma_1=\sqrt{1-\eta^2-\lambda^2},\ \gamma_2=\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-\eta^2-\lambda^2}$$

в матричной форме примет вид

$$A\Phi^+ + B\Phi^- + C = 0, \tag{2.1}$$

где

$$A=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & 0 \\ a_1 f & a_0 & 0 \\ a_3\eta & a_3\lambda & -1 \end{pmatrix},\ B=\gamma_1\begin{pmatrix} 1 & 0 & \chi\lambda \\ 0 & 1 & \chi\eta \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

$$\Phi^+=\gamma_1^+\begin{pmatrix} U_1^+ \\ U_2^+ \\ U_3^+ \end{pmatrix},\ \Phi^-=\frac{ia}{b^2\rho\omega\gamma_1^-}\begin{pmatrix} \tau_{yz}^- \\ \tau_{xz}^- \\ -\sigma_{zz}^- \end{pmatrix},\ C=\gamma_1^+ A\begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}\varphi_0, \tag{2.3}$$

$$\gamma_1^{\pm}(\eta)=\sqrt{\sqrt{1-\lambda^2}\pm\eta},$$

$$\gamma_2 a_0(\eta)=\left(4\gamma_1\gamma_2-3\gamma_2^2+\eta^2+\lambda^2\right)\lambda\eta,$$

$$\gamma_2 a_1(\eta)=4\gamma_1\gamma_2\lambda^2+\left(\gamma_2^2-\lambda^2\right)^2+\eta^2\left(\gamma_2^2+\lambda^2\right), \tag{2.4}$$

$$\gamma_2 a_1(\eta)f(\eta)=4\gamma_1\gamma_2\eta^2+\left(\gamma_2^2-\eta^2\right)^2+\lambda^2\left(\gamma_2^2+\eta^2\right),$$

причем функции a_0, a_1, f зависят от λ как от параметра. Кроме того, в (2.2)

$$a_2 = \frac{b^2}{g_2 a^2}\left(g_1 g_2 + h^2 + l^2\right),$$

$$g_2 a_3 = \frac{b^2}{a^2}\left(2g_1 g_2 - g_2^2 + h^2 + l^2\right), \qquad (2.5)$$

$$g_2 c = \frac{b^2}{a^2}\left(2g_1 g_2 - g_2^2 + h^2 + l^2\right).$$

Система Винера-Хопфа (2.1) запишется в виде задачи Гильберта

$$\Phi^+ = G\Phi^- + g, \qquad (2.6)$$

где

$$G = -A^{-1}B,\ g = -g_1^+ \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} j_0. \qquad (2.7)$$

Следует отметить, что в первоначальной переменной $\overline{\alpha}$ матрица $G(\overline{\alpha})$ имеет в знаменателе множители $\left(\overline{\alpha} - \frac{\omega}{C_R}\right)\left(\overline{\alpha} + \frac{\omega}{C_R}\right)$, где C_R есть скорость волн Релея. Однако, как показано в [6,12], параметр ω в преобразовании Лапласа может быть предположен комплексным с малой положительной мнимой частью, и поэтому $G(\overline{\alpha})$ для действительных $\overline{\alpha}$ не имеет особенностей. Эти факты относятся также к точкам ветвления $\pm\frac{w}{a}$, $\pm\frac{w}{b}$. Переходя к безразмерной переменной η, можно интегрирование по ξ проводить вблизи отмеченных точек $\pm\frac{a}{C_R}$, ± 1, $\pm\frac{a}{b}$ в комплексной плоскости, и снова $G(\xi)$ не имеет особенностей, и теория [4] применима.

Решение уравнения (2.6) можно найти в виде [4]:

$$\Phi(\eta) = \frac{X(\eta)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{X^+(\xi)\right\}^{-1}\frac{g(\xi)}{\xi-\eta}d\xi, \qquad (2.8)$$

где матрицы $X = X^+ X^-$ удовлетворяют однородной задаче Гильберта

$$X^+ = GX^- \qquad (2.9)$$

или запишутся в форме факторизации

$$G = X^+\left(X^-\right)^{-1}. \qquad (2.10)$$

Как показано в [4], задача определения X^- может быть приведена к системе интегральных уравнений Фредгольма

$$X^-(\eta) - \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{G^{-1}(\eta)G(\xi) - E}{\xi-\eta}X^-(\xi)d\xi = \gamma(\eta), \qquad (2.11)$$

где матрица $\gamma(\eta)$ представляет собой аналитическое поведение $X^-(\eta)$ для больших η.

3. Численное решение граничных задач. Нужно факторизовать матрицу $G(\eta)$, которая на прямой $(-\infty,\infty)$ удовлетворяет условию H, но проверив ее поведение для $\eta \approx \infty$.

Из (2.4), (2.5) получится

$$
\begin{gathered}
a_0 \approx \frac{2\dfrac{b^2}{a^2}-1}{i}\, l \operatorname{sgn} h,\ a_1 \approx i|h|,\\
a_1 f \approx \frac{2\dfrac{b^2}{a^2}-1}{i}|h|,\ a_2 \approx \frac{\dfrac{b^2}{a^2}+1}{2i|h|},\\
a_3 \approx \frac{b^2}{a^2 i|h|},\ c = \frac{b^2}{a^2 i|h|}.
\end{gathered}
\tag{3.1}
$$

Из (2.2) получится

$$
A \approx \begin{pmatrix}
2\dfrac{1+\dfrac{b^2}{a^2}}{i}\, l \operatorname{sgn} h & i|h| & 0\\
2\dfrac{1+\dfrac{b^2}{a^2}}{i}|h| & 2\dfrac{1+\dfrac{b^2}{a^2}}{i|h|}\, l & -1\\
\dfrac{b^2}{a^2 i}\operatorname{sgn} h & 2\dfrac{1+\dfrac{b^2}{a^2}}{i|h|}\, l & -1
\end{pmatrix},\quad
B \approx \begin{pmatrix}
1 & 0 & \dfrac{b^2}{a^2 i|h|}\, l\\
0 & 1 & \dfrac{b^2}{a^2 i}\operatorname{sgn} h\\
0 & 0 & \dfrac{1+\dfrac{b^2}{a^2}}{2i|h|}
\end{pmatrix}.
\tag{3.2}
$$

Отсюда можно получить, учитывая, что из (2.7) в основном порядке члены с λ не дадут вклада в G

$$
G(h) = \frac{1}{2\left(\dfrac{b^2}{a^2}-1\right)}
\begin{pmatrix}
0 & 1 & -i\dfrac{b^2}{a^2}\operatorname{sgn} h\\
2-2\dfrac{b^2}{a^2} & 0 & 0\\
0 & -i\dfrac{b^2}{a^2}\operatorname{sgn} h & -1
\end{pmatrix}.
\tag{3.3}
$$

Как видно, матрица $G(\eta)$ имеет разрыв первого рода при $\eta = \pm\infty$, который следует устранить. Согласно [4], можно получить особенность решения системы (2.1), вводя $\kappa = \dfrac{1}{\eta}$ при $\kappa = \pm 0$, изучая уравнение

$$
\left|G^{-1}(+0)G(-0) - \overline{l}\,E\right| = 0.
\tag{3.4}
$$

Тогда с учетом (3.3) получится

$$
\overline{\lambda}_1 = 1,\ \overline{\lambda}_2 = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2},\ \overline{\lambda}_3 = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2},
\tag{3.5}
$$

и, если полагать $\overline{\lambda} = e^{2\pi s_2}$, особенность решения будет [4]

$$
h^{-\frac{1}{2}},\ h^{-\frac{1}{2}mis_2},\ s_2 = \frac{1}{2p}\ln\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2},
\tag{3.6}
$$

что после обратного преобразования по x соответствует особенности при $x \approx 0$, $x^{-\frac{1}{2}}$, $x^{-\frac{1}{2}\pm is_2}$, последняя известна для решения плоской задачи о штампе [11].

Из (2.1) можно в раскрытом виде записать, полагая $\left(\tau^-_{yz}, \tau^-_{xz}, \sigma^-_{zz}\right) = \dfrac{\omega}{a}\left(\bar\tau^-_{yz}, \bar\tau^-_{xz}, \bar\sigma^-_{zz}\right)$,

$$
\begin{aligned}
&a_0U_1^+\gamma_1^+ + a_1U_2^+\gamma_1^+ - \frac{\bar\tau^-_{yz}\gamma_1}{b^2 i\rho\gamma_1^-} + a_3\lambda\frac{\bar\sigma^-_{zz}\gamma_1}{b^2 i\rho\gamma_1^-} + P\varphi_0 a_0\gamma_1^+ + Q\varphi_0 a_1\gamma_1^+ = 0,\\
&a_1 fU_1^+\gamma_1^+ + a_0U_2^+\gamma_1^+ - \frac{\bar\tau^-_{xz}\gamma_1}{b^2 i\rho\gamma_1^-} + a_3\eta\frac{\bar\sigma^-_{zz}\gamma_1}{b^2 i\rho\gamma_1^-} + a_1 fP\varphi_0\gamma_1^+ + Q\varphi_0 a_0\gamma_1^+ = 0,\\
&a_3\eta U_1^+\gamma_1^+ + a_3\lambda U_2^+\gamma_1^+ - U_3^+\gamma_1^+ +\\
&+ a_2\frac{\bar s^-_{yz} g_1}{b^2 irg_1^-} + Pj_0 a_3 hg_1^+ + Qj_0 l a_3 g_1^+ - Rj_0 g_1^+ = 0.
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

В силу (3.1) для $|\eta| \sim \infty$ в первом уравнении в основных порядках получится

$$
U_2^+ g_1^+ + \frac{i\bar t^-_{yz}}{b^2 rg_1^-} + g_1^+ j_0 Q = 0. \tag{3.8}
$$

Отсюда видно, что задача для компонент перемещений и напряжений по оси y разделяется от задачи для соответствующих компонент по осям x, z, причем для первой задачи в соответствии с первым корнем в (3.5) имеет место непрерывное на оси η значение коэффициента для $U_2^+\gamma_1^+$, $\dfrac{\bar\tau^-_{yz}}{\gamma_1^-}$ при $|\eta| \approx \infty$, и получится порядок этих решений $\dfrac{1}{\eta}$, т. е. для τ_{yz} особенность $x^{-\frac{1}{2}}$. Оставшиеся два уравнения для $|\eta| \approx \infty$ дают при удерживании только слагаемые, влияющие на особенность или отбрасывание свободных членов с φ_0

$$
\begin{aligned}
&2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)U_1^+ g_1^+ - \frac{\bar t^-_{xz}}{b^2 irg_1^-} - i\frac{b^2}{a^2}\mathrm{sgn}\,h\,\frac{\bar s^-_{zz}}{b^2 irg_1^-} = 0,\\
&\frac{1}{2}\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)\frac{\bar s^-_{zz}}{b^2 irg_1^-} + \frac{b^2}{a^2 i}\mathrm{sgn}\,h\,U_1^+ g_1^+ - U_3^+ g_1^+ = 0.
\end{aligned}
$$

Отсюда получаются уравнения

$$
\begin{aligned}
&U_1^+ g_1^+ - i\frac{b^2}{a^2}\mathrm{sgn}\,h\,U_3^+ g_1^+ = \frac{1}{2}\frac{\bar t^-_{xz}}{b^2 irg_1^-}\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right),\\
&\frac{b^2}{a^2} i\,\mathrm{sgn}\,h\,U_1^+ g_1^+ + U_3^+ g_1^+ = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)\frac{\bar s^-_{zz}}{b^2 irg_1^-}.
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Обозначая [13]

$$\left(U_1^+ \pm iU_3^+\right)g_1^+ = V_{1,2}^+,$$
$$\frac{\overline{t}_{xz}^- \pm i\overline{s}_{zz}^-}{2b^2 irg_1^-}\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right) = \Omega_{1,2}^-, \tag{3.10}$$

можно из (3,9) получить скалярные уравнения

$$V_1^+ - \frac{b^2}{a^2}\operatorname{sgn} h V_1^+ = \Omega_1^-,$$
$$V_2^+ + \frac{b^2}{a^2}\operatorname{sgn} h V_2^+ = \Omega_2^-. \tag{3.11}$$

Каждое уравнение является скалярной однородной задачей Гильберта с разрывными коэффициентами при $\frac{1}{h} = \pm 0$:

$$V_1^+ \overline{g}(h) = \Omega_1^-,\ V_2^+ \overline{g}(-h) = \Omega_2^-. \tag{3.12}$$

Отношения коэффициентов в левых частях в точке $\frac{1}{h} = -0$ к их значениям в точке $\frac{1}{h} = +0$ будут соответственно $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$, $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$, причем для $|\eta| \approx \infty$ выражение $\left(\frac{\gamma_1^-}{\gamma_1^+}\right)^{2is_2} = e^{2is_2\left(\ln\left|\frac{\gamma_1^-}{\gamma_1^+}\right| + i\arg\frac{\gamma_1^-}{\gamma_1^+}\right)}$, $\arg\frac{\gamma_1^-}{\gamma_1^+}$ изменится при движении от $\eta = -\infty$ до $\eta = \infty$ и от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, и отношение указанного выражения при $\eta = -\infty$ к значению при $\eta = \infty$ будет $e^{2\pi s_2} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$, поэтому, умножив (3.11) соответственно на $\left(\frac{\gamma_1^-}{\gamma_1^+}\right)^{\pm 2is_2}$, получим непрерывные коэффициенты $\overline{g}_1(\pm\eta) = \overline{g}(\pm\eta)\left(\frac{\gamma_1^-}{\gamma_1^+}\right)^{\pm 2is_2}$ уравнений (3.12) для функций $\tilde{\phi}^+, \tilde{\psi}^+, \Omega_{3,4}^-$, где

$$V_1^+ = \tilde{f}^+\left(g_1^+\right)^{-2is_2},\ V_2^+ = \tilde{y}^+\left(g_1^+\right)^{2is_2},$$
$$\Omega_1^- = \Omega_3^-\left(g_1^-\right)^{-2is_2},\ \Omega_2^- = \Omega_4^-\left(g_1^-\right)^{2is_2}. \tag{3.13}$$

Приведенные соотношения об изменении аргументов степеней $\gamma_1^\pm$ после формулы (3.12) наглядны для размерных функций $\gamma_1^\pm(\overline{\alpha}) = \sqrt{\sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - \overline{\beta}^2} \pm \overline{\alpha}}$, для которых $\overline{\alpha} = \pm\sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - \overline{\beta}^2}$ значения находятся в верхней и нижней полуплоскости и остаются в силе для безразмерных функций $\gamma_1^\pm(\eta)$.

Из (3.10), (3.13) можно получить

$$U_1^+ g_1^+ = \frac{1}{2}\tilde{f}^+\left(g_1^+\right)^{-2is_2} + \frac{1}{2}\tilde{y}^+\left(g_1^+\right)^{2is_2},$$

$$U_3^+ g_1^+ = \frac{1}{2i}\tilde{f}^+\left(g_1^+\right)^{-2is_2} - \frac{1}{2i}\tilde{y}^+\left(g_1^+\right)^{2is_2},$$

$$\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\frac{\bar{t}_{xz}^-}{b^2 i r g_1^-} = \Omega_3^-\left(g_1^-\right)^{-2is_2} + \Omega_4^-\left(g_1^-\right)^{2is_2}, \tag{3.14}$$

$$\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\frac{\bar{s}_{zz}^-}{b^2 r g_1^-} = \Omega_3^-\left(g_1^-\right)^{-2is_2} - \Omega_4^-\left(g_1^-\right)^{2is_2}$$

и подставить в исходную систему (3.7), которую следует записать для функций $\tilde{\phi}^+$, $\tilde{\psi}^+$, $\Omega_{3,4}^-$ и преобразовать, подобно преобразованию для больших η системы к (3.9).

С учетом того, что U_2^+ и $\bar{\tau}_{yz}^-$ не заменяются, первое уравнение (3.7) дает

$$\frac{1}{2}a_0\tilde{\phi}^+\left(\gamma_1^+\right)^{-2is_2} + \frac{1}{2}a_0\tilde{\psi}\left(\gamma_1^+\right)^{2is_2} + a_1 U_2^+\gamma_2^+ - \frac{\bar{\tau}_{yz}^-\gamma_1}{b^2 i\rho\gamma_1^-} - a_3\lambda\frac{i\gamma_1}{2}\Omega_3^-\left(\gamma_1^-\right)^{-2is_2} +$$

$$+ a_3\lambda\frac{i\gamma_1}{2}\Omega_4^-\left(\gamma_1^-\right)^{2is_2} + P\varphi_0 a_0\gamma_1^+ + Q\varphi_0 a_1\gamma_1^+ = 0, \tag{3.15}$$

Так же, как при выводе (3.9), следует подставить из третьего уравнения (3.7) первое слагаемое во второе уравнение и получить

$$\left(a_2 a_1 f - a_3^2 h^2\right)U_1^+ g_1^+ + a_3 h U_3^+ g_1^+ + \left(a_0 a_2 - a_3^2 h\, l\right)U_2^+ g_1^+ = \frac{\bar{t}_{xz}^- g_1 a_2}{b^2 i r g_1^-} +$$

$$+ \left(a_3^2 h^2 - a_1 f\right)P j_0 g_1^+ + \left(a_3^2 h\, l - a_0\right)Q j_0 g_2^+ - a_3 h R j_0 g_1^+ \tag{3.16}$$

Следует совместно решать систему (3.15), (3.16) и третье уравнение (3.7), причем последние два уравнения в переменных (3.13) примут вид

$$\frac{1}{2}\tilde{f}^+\left(g_1^+\right)^{-2is_2}\left(a_2 a_1 f - a_3^2 h^2 + \frac{a_3 h}{i}\right) + \frac{1}{2}\tilde{y}^+\left(g_1^+\right)^{2is_2}\left(a_2 a_1 f - a_3^2 h^2 - \frac{a_3 h}{i}\right) +$$

$$+ \left(a_0 a_2 - a_3^2 h\, l\right)g_1^+ U_2^+ = \frac{g_1}{\frac{b^2}{a^2}+1}\Omega_3^-\left(g_1^-\right)^{-2is_2} a_2 + \frac{g_2}{\frac{b^2}{a^2}+1}\Omega_4^-\left(g_1^-\right)^{2is_2} a_2 +$$

$$+ \left(a_3^2 h^2 - a_1 f\right)P j_0 g_1^+ + \left(a_3^2 h\, l - a_0\right)Q j_0 g_1^+ - a_3 h R j_0 g_1^+, \tag{3.17а}$$

$$\frac{1}{2}\tilde{f}^+\left(g_1^+\right)^{-2is_2}\left(a_3 h - \frac{1}{i}\right) + \frac{1}{2}\tilde{y}^+\left(g_1^+\right)^{2is_2}\left(a_3 h + \frac{1}{i}\right) +$$

$$+ a_3\, l\, g_1^+ U_2^+ = -\frac{g_1}{\frac{b^2}{a^2}+1}\frac{a_2}{i}\Omega_3^-\left(g_1^-\right)^{-2is_2} + \frac{g_1}{\frac{b^2}{a^2}+1}\frac{a_2}{i}\Omega_4^-\left(g_1^-\right)^{2is_2} -$$

$$- a_3 h P j_0 g_1^+ - a_3\, l\, Q j_0 g_1^+ + R j_0 g_1^+, \tag{3.17в}$$

далее следует к (3.17а) прибавить и вычесть, умноженное на i, (3.17в), тогда получится система

$$\frac{1}{2}\tilde{\phi}^+\left(\gamma_1^+\right)^{-2is_2}\left(a_2 a_1 f - a_3^2\eta^2 - 1\right) + \frac{1}{2}\tilde{\psi}^+\left(\gamma_1^+\right)^{2is_2}\left(a_2 a_1 f - a_3^2\eta^2 + 2ia_3\eta + 1\right) +$$

$$+\left(a_0a_2-a_3^2hl+ia_3l\right)g_1^+U_2^+=\frac{2g_2}{\frac{b^2}{a^2}+1}\Omega_4^-\left(g_1^-\right)^{2is_2}a_2+$$

$$+\left(a_3^2h^2-a_1f-ia_3h\right)Pj_0g_1^++\left(a_3^2hl-a_0-ia_3l\right)Qj_0g_1^++\left(i-a_3h\right)Rj_0g_1^+, \qquad (3.18а)$$

$$\frac{1}{2}\tilde{f}^+\left(g_1^+\right)^{-2is_2}\left(a_2a_1f-a_3^2h^2+2\frac{a_3h}{i}+1\right)+\frac{1}{2}\tilde{y}^+\left(g_1^+\right)^{2is_2}\left(a_2a_1f-a_3^2h^2-1\right)+$$

$$+\left(a_0a_2-a_3^2hl-ia_3l\right)g_1^+U_2^+=\frac{2a_2g_2}{\frac{b^2}{a^2}+1}\Omega_3^-\left(g_1^-\right)^{-2is_2}+$$

$$+\left(a_3^2h^2-a_1f+ia_3h\right)Pj_0g_1^++\left(a_3^2h^2-a_0+ia_3l\right)Qj_0g_1^+-\left(i+a_3h\right)Rj_0g_1^+. \qquad (3.18в)$$

Система (3.15), (3.18а), (3.18в) связывает векторы

$$f_1^+=\begin{pmatrix}\tilde{f}^+\\ \tilde{y}^+\\ \overline{U}_2^+g_1^+\end{pmatrix},\ f_1^-=\begin{pmatrix}\Omega_3^-\\ \Omega_4^-\\ \frac{t_{yz}^-}{b^2irg_1^-}\end{pmatrix}. \qquad (3.19)$$

При $|\eta|\approx\infty$ из (3,18а) выпадает $\tilde{\phi}^+$, а из (3,18в) выпадает $\tilde{\psi}^+$, что согласуется с (3,9). Систему (3.18а), (3.18в), (3.15) можно записать в виде

$$A_1f_1^++B_1f_1^-+C_1=0, \qquad (3.20)$$

где

$$A_1=\left(a_{ij}\right),\ B_1=\left(b_{ij}\right),\ i,j=1,2,3,$$

$$a_{11}=\frac{1}{2}\left(a_2a_1f-a_3^2h^2-1\right)\left(g_1^+\right)^{-2is_2},\ a_{12}=\frac{1}{2}\left(a_2a_1f-a_3^2h^2+2ia_3h+1\right)\left(g_1^+\right)^{2is_2},$$

$$a_{13}=a_0a_2-a_3^2hl+ia_3l,\quad a_{21}=\frac{1}{2}\left(a_2a_1f-a_3^2h^2-2ia_3h+1\right)\left(g_1^+\right)^{-2is_2},$$

$$a_{22}=\frac{1}{2}\left(a_0a_1f-a_3^2h^2-1\right)\left(g_1^+\right)^{2is_2},\quad a_{23}=a_0a_2-a_3^2hl-ia_3l,$$

$$a_{31}=\frac{1}{2}a_0\left(g_1^+\right)^{-2is_2},\quad a_{32}=\frac{1}{2}a_0\left(g_1^+\right)^{2is_2},\ a_{33}=a_1,\ b_{11}=0,$$

$$b_{12}=-\frac{2a_2g_1}{\frac{b^2}{a^2}+1}\left(g_1^-\right)^{2is_2},\ b_{13}=0,\ b_{21}=-\frac{2a_2g_1}{\frac{b^2}{a^2}+1}\left(g_1^-\right)^{-2is_2},\ b_{22}=0,$$

$$b_{23}=0,\ b_{31}=-\frac{a_3lig_1}{2}\left(g_1^-\right)^{-2is_2},\ b_{32}=\frac{a_3lig_1}{2}\left(g_1^-\right)^{2is_2},\ b_{33}=-g_1,$$

$$C_1=-j_0g_1^+\begin{pmatrix}a_3^2h^2-a_1f-ia_3h & a_3^2hl-a_0-ia_3l & -a_3h+i\\ a_3^2h^2-a_1f+ia_3h & a_3^2hl-a_0+ia_3l & -a_3h-i\\ -a_0 & -a_1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P\\ Q\\ R\end{pmatrix}. \qquad (3.21)$$

Систему (3.20) можно привести к задаче Гильберта (2.6), (2.7), где следует у всех векторов и матриц ставить нижний номер 1. При этом, как следует из вышеприведенных исследований для $|\eta| \approx \infty$, матрица $G_1(\eta)$ непрерывна на всей оси с нулевым индексом и постоянна на бесконечности. Тогда, согласно [4], можно для $X_1^-(\eta)$ получить систему интегральных уравнений Фредгольма

$$X_1^-(\eta) - \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_1^-(\eta)G_1(\xi) - E}{\xi - \eta} X_1^-(\xi)d\xi = \gamma(\eta), \tag{3.22}$$

причем можно считать матрицу $\gamma(\eta)$ постоянной, $\gamma(\eta) = E$. Учитывая (2.8), где подставлен индекс 1, (3.14), (3.19), можно провести обратное преобразование Лапласа и Фурье, и при $z = 0,\ x > 0$ получить напряжения в виде

$$\frac{a}{b^2 r}\begin{pmatrix} t_{xz} \\ s_{zz} \\ \dfrac{2t_{yz}}{\dfrac{b^2}{a^2}+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{4p^2}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{st}s^2 ds \int_{-\infty}^{\infty} dl \int_{-\infty}^{\infty} dh e^{-\frac{s}{a}hx - \frac{s}{a}ly} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{\frac{s}{a}xx'} e^{\frac{s}{a}lh'} X_1^-(h)\cdot$$

$$\cdot\frac{2}{\dfrac{b^2}{a^2}+1}\frac{g_1^-(h)}{x-h}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \left(g_1^-\right)^{-2is_2} & \left(g_1^-\right)^{2is_2} \\ \dfrac{1}{i}\left(g_1^-\right)^{-2is_2} & -\dfrac{1}{i}\left(g_1^-\right)^{2is_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{\Omega}_3^- \\ \tilde{\Omega}_4^- \end{pmatrix} \\ \dfrac{\tilde{t}_{yz}}{b^2 i r g_1^-} \end{pmatrix}, \tag{3.23}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\Omega}_3^- \\ \tilde{\Omega}_4^- \\ \dfrac{\tilde{t}_{yz}^-}{b^2 i r g_1^-} \end{pmatrix} = \frac{1}{4p^2}\left\{X_1^+(x)\right\}^{-1} g_1^+(x)\begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}. \tag{3.24}$$

Вычисляя первый интеграл, а затем интеграл от $\delta\left(t - \dfrac{\eta x}{a} + \dfrac{\xi'\xi}{a} - \lambda\dfrac{y-\eta_1}{a}\right)$, можно получить при $z = 0$ напряжения под штампом в виде двукратных интегралов. В случае $z = 0$, $x > 0$, $x \approx 0$ получится решение вблизи края

$$\eta_0 = \frac{t + \dfrac{\xi'\xi}{a} - \lambda\dfrac{y-\eta_1}{a}}{x}a,\ \ \gamma_1^-(\eta_0) \approx i\eta_0^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{a}{b^2\rho}\begin{pmatrix}\tau_{xz}\\ \sigma_{zz}\\ \dfrac{2}{\frac{b^2}{a^2}+1}\tau_{yz}\end{pmatrix}=\frac{1}{2\pi^3}\frac{1}{\frac{b^2}{a^2}+1}\mathrm{Re}\begin{pmatrix}\left(\frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}+is_2}iI_1+\left(\frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}-is_2}iI_2\\ \left(\frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}+is_2}I_1-\left(\frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}-is_2}I_2\\ \left(\frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}iI_3\end{pmatrix}, \tag{3.25}$$

где

$$I_{1,2}=i^{\mp 2is_2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{-5}^{5}d\lambda\int_{-5}^{5}d\xi\left(t-\lambda\frac{y-\eta_1}{a}+\frac{\xi'}{a}\xi\right)^{-\frac{1}{2}\mp is_2}\tilde{\Omega}_{3,4}^{-},$$

$$I_3=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{-5}^{5}d\lambda\int_{-5}^{5}d\xi\left(t-\lambda\frac{y-\eta_1}{a}+\frac{\xi'}{a}\xi\right)^{-\frac{5}{2}}\frac{\tilde{\tau}_{yz}^{-}}{b^2 i\rho\gamma_1^{-}},$$

и согласно свойствам преобразования Лапласа,

$$t-\lambda\frac{y-\eta_1}{a}+\frac{\xi'}{a}\xi>0 \tag{3.26}$$

проведены расчеты по формулам (3.22)–(3.25), причем вычислены интегралы, в которых опущен $\begin{pmatrix}P\\Q\\R\end{pmatrix}$.

Для значений $\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{3}$, $y=0$, $t=0.1$, $\frac{\xi'}{at}=0.2$, $\frac{\eta'}{at}=0.2$ результаты расчетов для $I_{1,2,3}$ коэффициентов при (P,Q,R) даны в таблице 1.

Таблица 1

	P	Q	R
I_1	-11384.5-37286.9 ***i***	-5410440 -914067 ***i***	-1593.92+654.23 ***i***
I_2	-104.866+120.574 ***i***	-2964.81+31720.2 ***i***	69.0587+26.5321 ***i***
I_3	-13757.5+4982.91 ***i***	-118745.-160854 ***i***	84065.1 +508648 ***i***

В случае заданных граничных перемещений вместо (1.2), (1.3) в виде

$$z=0,\ t_{xz}=0,\ t_{yz}=0,\ s_{zz}=0,\ -\infty<x<0,$$

$$(u_1,u_2,u_3)=-(P,Q,R)H(h_1-|y|)H(x_0-x)H(t)$$

$$0<x<\infty,$$

где η_1, ξ_0 – постоянные, получится в (1.7)

$$\varphi_0=-\frac{\exp(-i\bar{\beta}\eta_1)-\exp(i\bar{\beta}\eta_1)}{4\pi^2 s\bar{\alpha}\bar{\beta}}\{1-\exp(-i\bar{\alpha}\xi_0)\}.$$

Тогда, повторяя все выкладки, можно показать, что $X_1^-(\eta)X_1^+(\eta)$ будут прежними, а при $z=0$, $x\approx 0$ получится, поскольку можно использовать (3.23), в котором делится на

$-s^2$, экспонента в интеграле по λ заменяется на $\left\{e^{-\frac{s}{a}\lambda(y-\eta_1)}-e^{\frac{s}{a}\lambda(y+\eta_1)}\right\}$ и ставится $\frac{1}{\lambda}$, в (3.24) добавится множитель $\frac{1}{\xi}\left(e^{\xi_0\frac{s}{a}\xi}-1\right)$,

$$a^3\frac{\frac{b^2}{a^2}+1}{2b^2r}\begin{pmatrix} t_{xz} \\ s_{zz} \\ \frac{2}{\frac{b^2}{a^2}+1}t_{yz}\end{pmatrix}=\frac{1}{4p^2}\mathrm{Re}\begin{pmatrix} \frac{1}{p}\left(\left(\frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}+is_2}(I_4-I_4')+\left(\frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}-is_2}(I_5-I_5')\right) \\ \frac{1}{p}\left(-i\left(\frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}+is_2}(I_4-I_4')+i\left(\frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}-is_2}(I_5-I_5')\right) \\ \frac{1}{p}\left(\frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}(I_6-I_6')\end{pmatrix}, \qquad (3.27)$$

$$I_{4,5}=\int_{-5}^{5}\frac{d\lambda}{\lambda}\int_{-5}^{5}\left(t-\lambda\frac{y-\eta_1}{a}+\frac{\xi_0}{a}\xi\right)^{-\frac{1}{2}\mathrm{m}is_2}\frac{1}{2}(-1)^{\mathrm{m}is_2}\tilde{\Omega}_{3,4}^{-}\frac{d\xi}{\xi},$$

$$I_6=\int_{-5}^{5}\frac{d\lambda}{\lambda}\int_{-5}^{5}\left(t-\lambda\frac{y-\eta_1}{a}+\frac{\xi_0}{a}\xi\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{\tilde{\tau}_{yz}^{-}}{b^2\rho i\gamma_1^{-}}d\xi,$$

при этом $I_{4,5,6}'$ получатся заменой η_1 на $-\eta_1$.

Третью граничную задачу можно задать в следующем виде:

$$u_{1,2,3}=-(P,Q,R)H(\eta_1-|y|)H(t),$$

тогда

$$\varphi_0=-\frac{e^{-i\bar{\beta}\eta_0}-e^{i\bar{\beta}\eta_0}}{4\pi^2\bar{\alpha}\bar{\beta}s}.$$

В видоизмененном интеграле (3.23) имеется единственный полюс [13] $\xi=0$, и получится

$$\begin{pmatrix} \Omega_3^- \\ \Omega_4^- \\ \frac{\tau_{yz}^-}{b^2\rho i\gamma_1^-}\end{pmatrix}=\frac{X_1^-(\eta)}{\eta}\left\{X_1^+(0)\right\}^{-1}\gamma_1^+(0)\begin{pmatrix} P \\ Q \\ R\end{pmatrix}.$$

Тогда в (3.27) следует считать $I_{4,5}\to I_{7,8}$, $I_{4,5}'\to I_{7,8}'$, $I_6\to I_9$, $I_6'\to I_9'$,

$$I_{7,8}=\int_{-5}^{5}\left(t-\lambda\frac{y-\eta_1}{a}\right)^{-\frac{1}{2}\mathrm{m}is_2}\frac{1}{2}(-1)^{\mathrm{m}is_2}\tilde{\tilde{\Omega}}_{3,4}^{-}\frac{d\lambda}{\lambda},$$

$I_{7,8}'$ получатся заменой η_1 на $-\eta_1$

$$I_9=\int_{-5}^{5}\left(t-l\,\frac{y-h_1}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{\bar{\bar{t}}_{yz}^{-}}{b^2 rig_1^{-}}\frac{dl}{l},$$

$$\begin{pmatrix}\tilde{\Omega}_3\\ \tilde{\Omega}_4\\ \dfrac{\tilde{t}_{yz}^{-}}{b^2 rig_1^{-}}\end{pmatrix}=2pi\left\{X_1^{+}(0)\right\}^{-1}g_1^{+}(0)\begin{pmatrix}P\\ Q\\ R\end{pmatrix}.$$

В виде таких же квадратур получится и решение вдоль всей полуплоскости $z=0$, $x>0$. При этом в случае произвольной граничной функции в (1.2) $f(t)$ для компонент смещения $U_{1,2,3}$ решение для напряжений найдется из полученных выше в форме свертки, а затем из уравнения движения системы численно может быть найден закон ее движения.

г. Ереван
Поступила: 01 октября 2006 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Агаян, К. Л.* Дифракция сдвиговой плоской волны в упругом пространстве с полубесконечным упругим включением / К. Л. Агаян, Э. Х. Григорян, С. А. Джилавян // Изв. НАН Армении. Механика. – 2003. – Т. 56. – № 4. – С. 35с47.

2. *Багдоев, А. Г.* Определение фундаментальных решений для уравнений магнитоупругости / А. Г. Багдоев // Изв. АН Арм. ССР. Механика. – 1974. – Т. 27. – № 2. – С. 15–23.

3. *Багдоев, А. Г.* Аналитическое и численное решение смешанной динамической задачи о перемещениях / А. Г. Багдоев, А. Н. Мартиросян, Г. А. Мартиросян, С. М. Погосян // Математика в высшей школе. – 2005. – № 2. – С. 5–13.

4. *Векуа, Н. П.* Система сингулярных интегральных уравнений / Н. П. Векуа. – М. : Наука, 1970. – 379 с.

5. *Гахов, Ф. Д.* Краевая задача Римана для систем функций / Ф. Д. Гахов // УМН. – Т. 7. – Вып. 4. – 1952. – С. 3–54.

6. *Мусхелишвили, Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1949. – 635 с.

7. *Мусхелишвили, Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мусхелишвили – М. : Наука, 1968. – 511 с.

8. *Петросян, С. З.* Об одном классе смешанных задач для неоднородного по степенному закону упругого полупространства / С. З. Петросян. – Ереван, 2002. – 154 с.

9. *Саркисян, В. С.* Дифракция сдвиговых упругих гармонических волн на полубесконечных включениях / В. С. Саркисян, И. М. Караханян // Проблемы механики тонких деформируемых тел. – Ереван : Изд-во НАН Армении, 2002. – С. 266–280.

10. *Флитман, Л. М.* Динамическая задача о штампе на упругой полуплоскости / Л. М. Флитман // ПММ. –1959. – Т. 23. – Вып. 4. – С. 497–505.

11. *Loghin, A* Asymptotic solution for mixed mode loading of cracks and wedges in power law hardening materials / A. Loghin, P. F. Joseph // Engineering Fracture Mechanics. – 2001. – № 68. – P. 1511–1534.

12. *Baker, B. R.* Dynamic stresses created by a moving crack / B. R. Baker // Trans. ASME Ser. E. J. Applied Mechanics. – 1962. – Vol. 29. – № 3. – P. 155–157.

13. *Hakobyan, V. N.* The plane deformation state of elastic plane with finite rigid inclusion under harmonic loading / V. N. Hakobyan, A. V. Sahakyan, A. H. Sargsyan // The problems of dynamics of interaction of deformable media / V International conference October 1-7. Goris, 2005. – P. 61–65.

14. *Hilbert, D.* Grundzuge der Integralgluchungen. Drittles Abschuft / D. Hilbert. – Leipzig-Berlin, 1912.

15. *Plemelj, J.* Riemannsche Funktionenscharen mit gegebener Monodromiegruppe / J. Plemelj // Monatsch. für Math. und Phzs. XIX. – 1908. – P. 211–245.