

Григорьев Я. Ю.

ЗАДАЧИ О РАСТЯЖЕНИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБРАЗЦОВ С ОКРУЖНЫМИ УГЛОВЫМИ ВЫРЕЗАМИ

(Государственный технический университет)

Рассматривается растяжение цилиндрических образцов с угловыми надрезами, усилиями, приложенными вдоль образующих. Для определения пластических деформаций в окрестности вершины углового выреза тело образца предполагается составным: материал в целом упругопластический, но в малой области в окрестности особой точки – вершины выреза – материал считается жесткопластическим, что позволяет реализовать численно-аналитический подход к определению полей деформаций.

1. Рассматривается задача о растяжении кругового цилиндрического образца с угловым круговым надрезом.

При пластическом течении в окрестности угловой точки деформации и напряжения распределены крайне неоднородно. Для поля напряжений и деформаций угловая точка является особой, то есть предельные значения тензоров по различным направлениям не совпадают.

Определение поля деформаций численными методами приводит к значительным математическим трудностям, так как операция определения тензора деформаций включает в себя операцию дифференцирования перемещений по пространственным переменным.

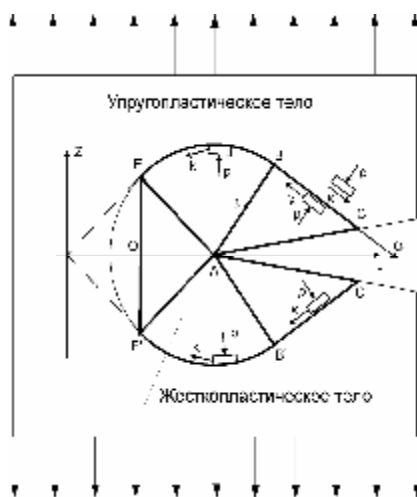


Рис. 1

Рассмотрим окрестность вершины углового выреза, где материал является идеальным жесткопластическим. Эту область будем представлять как суперэлемент (рис. 1). Жесткопластическая область состоит из прямоугольных треугольников ABC , $AB'C'$ и EAE' , в которых реализуется однородное напряженное состояние, и двух вееров линий скольжения BAE и $B'AE'$. Границы выреза AC и AC' предполагаются прямолинейными и свободными от напряжений, поэтому в ABC и $AB'C'$ первое главное напряжение S_1 равно $2k$ и направлено вдоль свободных поверхностей.

Граничные условия на $CBEE'BC'$ определяются согласно [1]. Обозначим за q угол наклона касательной к a – линии скольжения, отсчитываемой в кратчайшем направлении от оси x . Гидростатическое давление $p = -\frac{1}{3}(\sigma_{rr} + \sigma_{zz} + \sigma_{\varphi\varphi})$ и тензор напряжений

$$S_{ij} \text{ определяются в виде: } [S_{ij}] = \begin{bmatrix} p - k \sin(2q) & k \cos(2q) & 0 \\ k \cos(2q) & p + k \sin(2q) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{На } CB: \theta = -\frac{7\pi}{36},$$

$$p = k \cdot \left(\frac{\cos\left(\frac{7\pi}{36}\right) - \sin\left(\frac{7\pi}{36}\right)}{r} \cdot S_\alpha - 1 \right), \text{ в точке } C: p = -k. \quad (1)$$

$$\text{На } BE: -\frac{7\pi}{36} < \theta < \frac{\pi}{4}, \quad d\left(\frac{p}{k} - 2\theta\right) = \frac{R}{r} \cdot (\sin\theta + \cos\theta)d\theta.$$

$$\text{На } EO: \theta = \frac{\pi}{4},$$

$$p = \frac{8\pi}{9} - 1 + \frac{R}{r_0} \left(\cos\left(\frac{7\pi}{36}\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{36}\right) \right), \text{ где } r_0 - \text{расстояние от оси } Oz \text{ до точки } C.$$

Пластическое течение предполагается симметричным относительно оси Or , поэтому напряжения на противоположной границе совпадают с (1).

Жесткопластический анализ позволяет рассчитать предельные поля тензоров деформаций в окрестности точки A .

$$\text{В качестве меры деформации выберем тензор Альманси } E_{ij}: E_{ij} = \frac{1}{2}(d_{ij} - x_{k,i}^0 x_{k,j}^0).$$

Определение деформаций связано с интегрированием системы уравнений, связывающих тензор деформаций E_{ij} и тензор скоростей деформаций e_{ij} :

$$\frac{DE_{ij}}{Dt} = \frac{dE_{ij}}{dt} + E_{ik} V_{k,j} + E_{jk} V_{k,i} = e_{ij}, \quad (2)$$

где $e_{ij} = \frac{V_{i,j} + V_{j,i}}{2}$, V_i – скорость перемещений, x_i^0 , x_i – лагранжевы и эйлеровы координаты, а $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V_k \frac{\partial}{\partial x_k}$.

Данная система уравнений при предельном переходе в поле линий скольжения жесткопластического суперэлемента, при осесимметричной деформации в полярной системе координат сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений [2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial \alpha} \bar{A} + 2\gamma g \cos 2(\theta - \psi) &= 0, \\ \frac{\partial g}{\partial \alpha} \bar{A} + 2\gamma \left(e - \frac{1}{2} \right) \cos 2(\theta - \psi) &= 0, \\ \frac{\partial (r^2 E_{\varphi\varphi})}{\partial \alpha} \cdot \bar{A}' &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$2g \left(\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial a} A \right) - g \left(e - \frac{1}{2} \right) \sin 2(q - \gamma) = 0,$$

$$\text{где } \bar{A} = \frac{V_\alpha - [a' \cos \alpha + b' \sin \alpha]}{V_\alpha + \frac{\partial V_\beta}{\partial \alpha}}, \quad \bar{A}' = V_\alpha - [a' \cos \alpha + b' \sin \alpha].$$

q, γ – углы наклона первого (алгебраически наибольшего) главного направления тензоров E_{ij}, e_{ij} ; a – угол наклона a -линии к оси r ; u, v – проекции скоростей перемещений на a, b – направления; $m = a'i + b'j$ – вектор скорости возможных изменений положения вершины углового выреза. Поле скоростей внутри жесткопластической области определяется соотношениями Гейрингер [1]:

$$du - v dq = 0 \quad (a - \text{линия})$$

$$dv + u dq = 0 \quad (b - \text{линия}).$$

Рассматривается задача о растяжении кругового цилиндра с круговым надрезом.

Сначала решается внешняя упругопластическая задача численным методом, применяется численный комплекс MSC.Marc 2005.

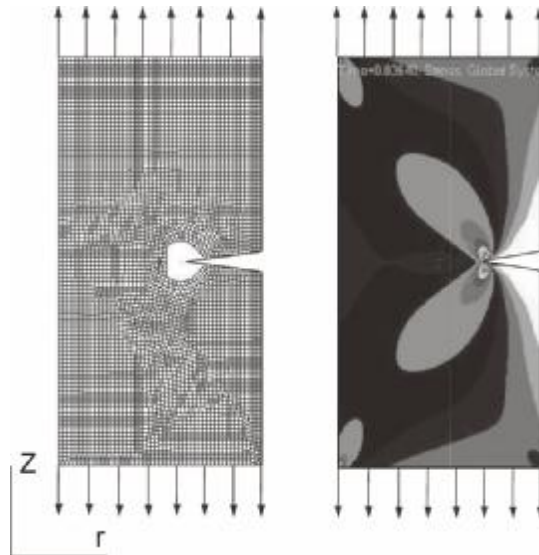


Рис. 2

На верхней и нижней поверхностях цилиндра заданы растягивающие перемещения U вдоль оси Z соответственно вверх и вниз (рис. 2). Материал полосы предполагается упрочняющимся упругопластическим. Пластическое состояние определяется по критерию Треска.

Длина образующей $l=1000$ мм, радиус основания $R_0=300$ мм, угол выреза $2\delta=20^\circ$, глубина выреза $h=78$ мм. Материал полосы – упрочняющийся упругопластический алюминий ($E=10000$ Н/мм², $\nu=0.33$, упругопластические свойства задавались дискретным заданием точек на кривой $s - e$, предел текучести $\sigma_T=182,25$ Н/мм², постоянная текучести $k = \frac{S_T}{\sqrt{3}}$). Прикладываемые нагрузки – перемещения по оси OY $U = 10$ мм.

При прямом применении пакета MSC.Marc 2005 к решению задачи при вышеуказанных условиях возникает проблема сходимости вычислительных процессов.

Для преодоления этой трудности в окрестности вершины выреза вводится рассмотренный суперэлемент.

Определяется размер жесткопластической области. За характеризующий размер жесткопластической области принимается радиус верха характеристик R . Размер области выбирается из соображений минимальности R при неперевышении предела текучести. R зависит от величины растягивающей нагрузки, а также от материала, из которого сделана полоса.

Для решения внешней задачи жесткопластическая область исключается. Действие отброшенной области на полосу заменяется напряжениями, приложенными вдоль всей жесткопластической границы.

Граничные условия определяются соотношениями (1).

Определяется распределение нормальных скоростей, полученное на границе жесткопластической области.

Распределение скоростей на границе суперэлемента является исходным для внутренней жесткопластической задачи.

При определении поля скоростей в области AEE' предполагается линейное распределение скоростей u , v соответственно на линиях AE , AE' (рис. 3). В этом случае это распределение полностью определяется скоростями перемещений в точках E , E' . Из симметрии пластического течения относительно оси Ox при $q = \frac{p}{4}$ следует, что в точке E

$u_r = u_z$. В этом случае предельные компоненты скорости движения частиц материала в точке A со стороны области AEE' определяется в виде $u = v = \frac{u_z}{\sqrt{2}}$. Распределение скоростей v на линии a определяет величину $\frac{\partial v}{\partial a}$. Найденные величины u и $\frac{\partial v}{\partial a}$ определяют коэффициенты \bar{A} и \bar{A}' . Системы уравнений (3) при заданном векторе $m = a'i + b'j$.

Определяются возможные поля распределений тензора деформаций в окрестности точки A путем интегрирования системы (3) при возможных скоростях m . Действительное движение точки A находится из условия $\inf_m \sup_{dA} E_1$, где $\sup_{dA} E_1$ – наибольшее значение первого алгебраически наибольшего главного значения тензора E_{ij} в окрестности точки A .

Возможна другая эквивалентная формулировка этого условия [4]: $\inf_m \sup_{dA} W$,

где W – удельная диссипация энергии.

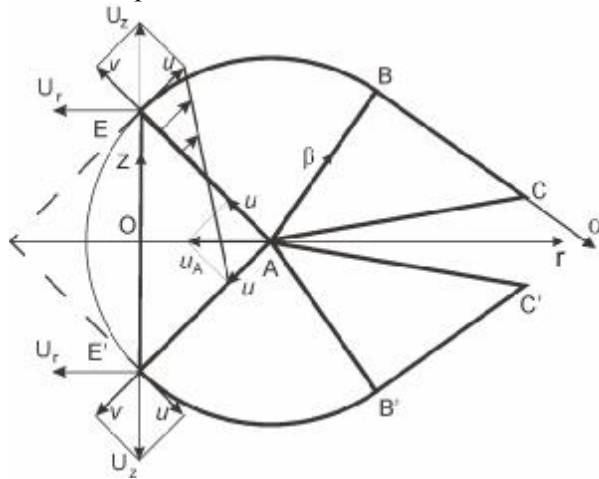


Рис. 3

По найденному значению m определяется новое положение точки A на заданном шаге времени.

На этом этапе возможны два варианта пластического течения [3]:

- 1) при максимально возможных деформациях материала;
- 2) при допустимых деформациях материала, определяемых характеристикой E_* .

Данный подход реализует алгоритм, предложенный в работе [3].

2. Этот подход можно обобщить на цилиндрический образец, отличный от кругового цилиндра, считая, что перемещения частиц материала происходят в плоскости ортогональной линии вершины трещины, а перемещения вдоль линии вершины выреза малы. Пусть направляющая цилиндрического образца произвольная гладкая линия, заданная в полярной системе координат φ, r уравнением $r = \rho(\varphi)$. Разобьем линию вершин трещины на малые части и каждой части поставим в соответствие сегмент, соответствующий углу $d\varphi$ (рис. 2). Можно предположить, что такой сегмент соответствует сегменту некоторой осесимметричной задачи с осью симметрии, расположенной на расстоянии $r(\varphi)$. Для определения $r(\varphi)$ используется соотношение $r = \frac{u}{\varepsilon_\varphi}$, где $u = u_r$ перемещения по оси r в

точке C , ε_φ – скорость деформаций по направлению φ ; $\varepsilon_\varphi = \frac{dv_\varphi}{ds_\varphi} \approx \frac{v_\varphi^2 - v_\varphi^1}{\Delta s_\varphi}$, здесь v_φ^2, v_φ^1

– скорости по направлению φ соответственно в точках B, A , Δs_φ – длина дуги AB .

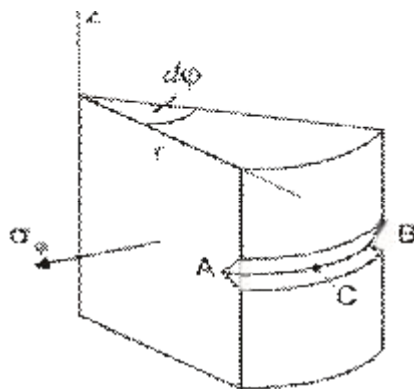


Рис. 4

Изложенный выше алгоритм позволяет рассчитать деформации в окрестности вершины выреза и определить направление движения трещины для данного угла j . Делая обход вдоль всей линии $r = r(\varphi)$, можно рассчитать новое положение линии вершин трещины. На следующих шагах или в случае, когда линию нельзя задать аналитически, целесообразно искать кривизну, определяющую расстояние $r(\varphi) = 1/K$, по трем точкам A, C, B . Для этого строится окружность по этим точкам и определяется r .

г. Комсомольск-на-Амуре
Поступила: 9 ноября 2006 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Быковцев, Г. И. Теория пластичности. / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. / Владивосток : Дальнаука. – 1998. – 529 с.
2. Каминская, Е. С. Соотношения, определяющие поля деформаций в окрестности особенностей поля скоростей перемещений при осесимметричной деформации / Е. С. Каминская // Проблемы механики сплошных сред и смежные вопросы технологии машиностроения: Сборник докладов третьей конференции. Владивосток – Комсомольск-на-Амуре, сентябрь 2004г. Комсомольск-на-Амуре : ИМиМ ДВО РАН. – 2004. – С. 192–203.
3. Хромов, А. И. Концентраторы деформаций / А. И. Хромов, А. А. Буханько, С. Л. Степанов // ДАН. – 2006. – № 6. – Т. 407. – С. 777–781.
4. Хромов, А. И. Разрушение жесткопластических тел. Константы разрушения / А. И. Хромов, О. В. Козлова // Владивосток : Дальнаука. – 2005. – 159 с.