**ВЕСТНИК ЧГПУ
им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
МЕХАНИКА
ПРЕДЕЛЬНОГО
СОСТОЯНИЯ
№ 2 • 2007**

УДК 539.374

Кульпина Т. А.

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ АНИЗОТРОПНОЙ ЭКСЦЕНТРИЧНОЙ ТРУБЫ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ И СДВИГАЮЩЕГО УСИЛИЯ $t_{rq}^{(0)} \neq 0$

(Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева)

Рассмотрим напряженное состояние анизотропной эксцентричной трубы под действием внутреннего давления p и при действии на внутренней поверхности трубы касательного усилия $t_{rq}^{(0)} \neq 0$.

Во всей работе для безразмерных величин введем обозначения:

$$s_{ij} = s_{ij}/k, p = p/k, q = q/k, t_i = t_i/k, G = G/k,$$

$$e_{ij} = e_{ij}/r_s^0, u = u/r_s^0, v = v/r_s^0, w = w/r_s^0, a = a/r_s^0,$$

где s_{ij} – компоненты тензора напряжений, e_{ij} – компоненты скоростей деформации, u, v, w – компоненты скоростей перемещений вдоль осей r, q, z соответственно.

В дальнейшем все величины, имеющие размерность напряжений, отнесем к величине s_{ij} – пределу текучести на сдвиг, величины, имеющие размерность длины – к величине r_s^0 – радиусу пластической зоны при равномерном растяжении: $d = 0$.

Для решения задачи в цилиндрической системе координат r, q, z используем уравнения равновесия:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial s_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial t_{rq}}{\partial q} + \frac{\partial t_{rz}}{\partial z} + \frac{s_r - s_q}{r} = 0, \\
\frac{\partial t_{rq}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial s_r}{\partial q} + \frac{\partial t_{qz}}{\partial z} + \frac{2t_{rq}}{r} = 0, \qquad (1) \\
\frac{\partial t_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial t_{qz}}{\partial q} + \frac{\partial s_z}{\partial z} + \frac{t_{rz}}{r} = 0.
\end{gathered}$$

Пусть радиусы стенок трубы a и $b(a < b)$, эксцентриситет – c. В нулевом приближении будем иметь:

$$t_{rq}^{(0)} \neq 0,\ t_{rz}^{(0)} = t_{qz}^{(0)} = 0, \qquad (2)$$

все остальные компоненты тензора напряжений зависят только от r, а на внутренней поверхности трубы к граничному условию

$$s_r^p = -p \quad \text{при} \quad r = a\,, \quad p = const\,, \tag{3}$$

добавляется условие

$$t_{rq}^{(0)} = t \quad \text{при} \quad r = a\,,\ t_1 = const\,. \tag{4}$$

Условие пластичности Мизеса примем в виде:

$$A(s_r - s_q)^2 + B(s_q - s_z)^2 + C(s_z - s_r)^2 + 6Ft_{rq}^2 + 6Gt_{rz}^2 + 6Ht_{qz}^2 = 6k^2\,, \tag{5}$$

где A, B, C, F, G, H – постоянные величины, имеющие вид:

$$\begin{aligned} A &= 1 + da, \quad F = 1 + df, \\ B &= 1 + db, \quad G = 1 + dg, \\ C &= 1 + dc, \quad H = 1 + dh; \\ &a, b, c, f, g, h - const\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Пусть

$$s_z = \frac{s_r + s_q}{2}, \tag{7}$$

тогда условие пластичности (5) с учетом условий (2), (7) примет вид

$$\left(\frac{4A + B + C}{4}\right)(s_r - s_q)^2 + 6Ft_{rq}^2 = 6\,. \tag{8}$$

Уравнения равновесия и линеаризованное условие пластичности (8) с учетом выражений (6) в нулевом приближении примут вид:

$$\frac{ds_r^{(0)}}{dr} + \frac{s_r^{(0)} - s_q^{(0)}}{r} = 0\,, \quad \frac{dt_{rq}^{(0)}}{dr} + \frac{2t_{rq}^{(0)}}{r} = 0\,, \tag{9}$$

$$\left(s_r^{(0)} - s_q^{(0)}\right)^2 + 4t_{rq}^{(0)2} = 4\,, \quad s_z^{(0)} = s^{(0)} + \frac{2}{3}\,. \tag{10}$$

Решение первого уравнения системы (9) согласно условию полной пластичности (10) и граничному условию (3) в пластической зоне имеет вид

$$\begin{aligned} s_r^{(0)p} &= -\frac{\sqrt{r^4 - a^4t^2}}{r^2} + \ln\frac{r^2 + \sqrt{r^4 - a^4t^2}}{a^2\left(1 + \sqrt{1 - t^2}\right)} + \sqrt{1 - t^2} - p, \\ s_q^{(0)p} &= \frac{\sqrt{r^4 - a^4t^2}}{r^2} + \ln\frac{r^2 + \sqrt{r^4 - a^4t^2}}{a^2\left(1 + \sqrt{1 - t^2}\right)} + \sqrt{1 - t^2} - p. \end{aligned} \tag{11}$$

В первом приближении линеаризованное условие пластичности (8) с учетом выражений (6) примет вид

$$m\left(s_r^{(0)} - s_q^{(0)}\right)^2 + 12(s_r^{(0)} - s_q^{(0)})(s_r^{(\mathrm{I})} - s_q^{(\mathrm{I})}) + 24ft_{rq}^{(0)2} + 48t_{rq}^{(0)}t_{rq}^{(\mathrm{I})} = 0, \tag{12}$$

где $m = 4a + b + c$.

Из (12), (11) получим:

$$s_r^{(\mathrm{I})} - s_q^{(\mathrm{I})} = \frac{ft^2a^4}{r^2\sqrt{r^4 - a^4t^2}} + \frac{m\sqrt{r^4 - a^4t^2}}{6r^2} + \frac{2ta^2}{\sqrt{r^4 - a^4t^2}}t_{rq}^{(\mathrm{I})}. \tag{13}$$

В первом приближении уравнения равновесия запишутся в виде

$$\frac{ds_r^{(\mathrm{I})}}{dr}+\frac{s_r^{(\mathrm{I})}-s_q^{(\mathrm{I})}}{r}=0$$

$$\frac{dt_{rq}^{(\mathrm{I})}}{dr}+\frac{2t_{rq}^{(\mathrm{I})}}{r}=0. \tag{14}$$

Решая второе уравнение системы (14), используя граничные условия

$$s_r^{(I)}+\frac{ds_r^{(0)}}{dr}r_1=\frac{d\mathrm{P}_n}{dr}r_1,\quad t_{rq}^{(I)}-\left(s_q^{(0)}-s_r^{(0)}\right)r_1=\frac{d\mathrm{P}_t}{dr}r_1 \quad \text{при} \quad r=b\;; \tag{15}$$

получим:

$$t_{rq}^{(\mathrm{I})}=\frac{s\sin q}{r^2}, \tag{16}$$

где $s=-2b\sqrt{1-t^2}$.

Из (13), (16) получим

$$s_r^{(\mathrm{I})}-s_q^{(\mathrm{I})}=\frac{6ft^2a^4+mr^4-ma^4t^2+12ta^2s\sin q}{6r^2\sqrt{r^4-a^4t^2}}. \tag{17}$$

Подставляя выражение (17) в первое уравнение системы (14), получим

$$s_r^{(\mathrm{I})}=\int\frac{\left.M(q)\middle/6\right.dr}{r^3\sqrt{r^4-a^4t^2}}-\frac{m}{6}\int\frac{rdr}{\sqrt{r^4-a^4t^2}}, \tag{18}$$

где $M(q)=ma^4t^2-12ta^2s\sin q-6ft^2a^4$.

Из (18) получим решение задачи в первом приближении:

$$s_r^{(\mathrm{I})p}=\frac{M(q)}{12C_1^2}\frac{\sqrt{r^4-C_1^2}}{r^2}+\frac{m}{24}\ln\left|\frac{\sqrt{r^4-C_1^2}-r^2}{\sqrt{r^4-C_1^2}+r^2}\right|+C_2, \tag{19}$$

$$s_q^{(\mathrm{I})p}=\frac{M(q)}{12r^2\sqrt{r^4-C_1^2}}+\frac{r^2(M(q)-2C_1^2m)}{12C_1^2\sqrt{r^4-C_1^2}}+\frac{m}{24}\ln\left|\frac{\sqrt{r^4-C_1^2}-r^2}{\sqrt{r^4-C_1^2}+r^2}\right|+C_2, \text{где}$$

$$C_1=a^2t.$$

Постоянную C_2 определим из граничных условий:

$$\frac{M(q)}{12C_1^2}\frac{\sqrt{a^4-C_1^2}}{a^2}+\frac{m}{24}\ln\left|\frac{\sqrt{a^4-C_1^2}-a^2}{\sqrt{a^4-C_1^2}+a^2}\right|+C_2=\frac{2+t^2}{a\sqrt{1-t^2}}\cos q$$

при $r=a$,

$$C_2=\frac{2+t^2}{a\sqrt{1-t^2}}\cos q-\frac{M(q)}{12C_1^2}\frac{\sqrt{a^4-C_1^2}}{a^2}-\frac{m}{24}\ln\left|\frac{\sqrt{a^4-C_1^2}-a^2}{\sqrt{a^4-C_1^2}+a^2}\right|. \tag{20}$$

Из (19), (20) получим решение задачи в пластической области в первом приближении:

$$s_r^{(\mathrm{I})p} = \frac{M(q)}{12C_1^2}\frac{\sqrt{r^4 - C_1^2}}{r^2} + \frac{m}{24}\ln\left|\frac{\sqrt{r^4 - C_1^2} - r^2}{\sqrt{r^4 - C_1^2} + r^2}\right| +$$

$$+\frac{2+t^2}{a\sqrt{1-t^2}}\cos q - \frac{M(q)}{12C_1^2}\frac{\sqrt{a^4 - C_1^2}}{a^2} - \frac{m}{24}\ln\left|\frac{\sqrt{a^4 - C_1^2} - a^2}{\sqrt{a^4 - C_1^2} + a^2}\right|$$

$$s_q^{(\mathrm{I})p} = \frac{M(q)}{12r^2\sqrt{r^4 - C_1^2}} + \frac{r^2(M(q) - 2C_1^2 m)}{12C_1^2\sqrt{r^4 - C_1^2}} +$$

$$+\frac{m}{24}\ln\left|\frac{\sqrt{r^4 - C_1^2} - r^2}{\sqrt{r^4 - C_1^2} + r^2}\right| + \frac{2+t^2}{a\sqrt{1-t^2}}\cos q - \tag{21}$$

$$-\frac{M(q)}{12C_1^2}\frac{\sqrt{a^4 - C_1^2}}{a^2} - \frac{m}{24}\ln\left|\frac{\sqrt{a^4 - C_1^2} - a^2}{\sqrt{a^4 - C_1^2} + a^2}\right|.$$

г. Чебоксары

Поступила: 11 октября 2006 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука. – 1978.– 208 с.

2. *Ивлев, Д. Д.* Теория предельного состояния и идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. − Воронеж. – 2005. − 205 с.

3. *Ишлинский, А. Ю.,* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. − М. : Физматлит. – 2001. − С. 33−185.

4. *Михайлова, М. В.* О влиянии сдвигов на упругоидеальнопластическое состояние пластины с круговым отверстием при двуосном растяжении / М. В. Михайлова, Л. И. Афанасьева // Проблемы механики неупругих деформаций. – М. : Физматлит. – 2001. – С. 211–228.