ВЕСТНИК ЧГПУ
им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
МЕХАНИКА
ПРЕДЕЛЬНОГО
СОСТОЯНИЯ
№ 2 • 2007

Максимова Л. А., Тихонов С. В.

ОБ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ СОСТОЯНИИ НЕОДНОРОДНОЙ ТРУБЫ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

(Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева)

Теория пластичности неоднородных сред привлекла внимание широкого круга исследователей [4]. Среди других методов, для решения задач теории пластичности неоднородных сред рядом исследователей используется метод малого параметра. В теории пластичности неоднородность материала характеризуется зависимостью предела текучести от координат точек тела. Обычно используется разложение предела текучести в ряд по некоторому безразмерному параметру, за исходное принимается напряженное состояние при постоянном пределе текучести. В этом направлении выполнены работы [1, 3, 5-6] и др.

В работе рассматривается упругопластическое состояние толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления. Материал трубы предполагается изотропным, неоднородным, сохраняющим значения предела текучести постоянным вдоль параллельных прямых, при этом предел текучести меняется линейно вдоль ортогональной прямой. Рассмотрено влияние неоднородности на напряженное состояние трубы.

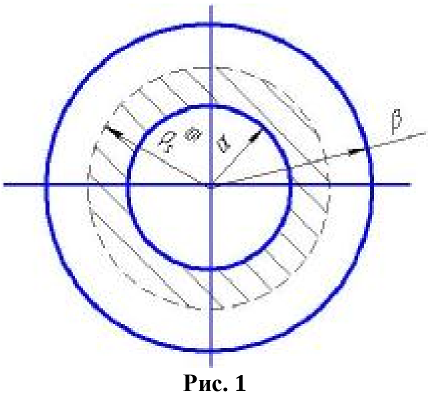

Рис. 1

Рассмотрим толстостенную трубу радиусов a, b, $a < b$ (рис. 1). Условие пластичности примем в виде

$$\left(s_r - s_q\right)^2 + 4t_{rq}^2 = 4k^2, \qquad (1)$$

где s_r, s_q, t_{rq} – компоненты напряжений в полярной системе координат r, q ; k – предел текучести.

Положим

$$k = k_0 + d\left(\bar{a}x + \bar{b}y\right),\ k_0, \bar{a}, \bar{b} - const, \tag{2}$$

где d – малый безразмерный параметр.

Впоследствии перейдем к безразмерным значениям радиусов трубы a, b и черту сверху у величин $\bar{a}, \bar{b}$ опустим. Положим

$$\alpha = a/r_s^{(0)}, \quad b = b/r_s^{(0)},$$

где $r_s^{(0)}$ – радиус пластической зоны в нулевом приближении.

Согласно (2) предел текучести k сохраняет постоянное значение вдоль прямых

$$ax + by = c, c - const \tag{3}$$

и изменяется в зависимости от изменения величины c.

Уравнение равновесия в полярной системе координат имеют вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial s_r}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial t_{rq}}{\partial q} + \dfrac{s_r - s_q}{r} = 0, \\ \dfrac{\partial t_{rq}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial s_q}{\partial q} + \dfrac{2t_{rq}}{r} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Будем считать, что на внутренней поверхности трубы действует постоянное давление p, а внешняя поверхность свободна от усилий.

Положим, что искомое решение зависит от некоторого параметра d, будем искать решение в виде

$$s_{ij} = s_{ij}^{(0)} + s'_{ij}d + s''_{ij}d^2 + \ldots, \quad r_s = r_s^{(0)} + r'_s d + r''_s d^2 + \ldots, \tag{5}$$

где r_s – радиус пластической зоны.

В дальнейшем припишем всем компонентам в упругой области индекс «*e*», в пластической области индекс «*p*». Все величины имеющие размерность напряжения, будем считать безразмерными и отнесенными к пределу текучести в нулевом приближении k_0, все линейные размеры тоже будем считать безразмерными, отнесенными к радиусу пластической зоны в нулевом приближении $r_s^{(0)}$.

В исходном нулевом приближении имеет место осесимметричное состояние трубы

$$t_{rq}^{(0)} = 0. \tag{6}$$

Из (1), (5), (6) имеет место

$$s_r^{(0)p} - s_q^{(0)p} = -2. \tag{7}$$

Решая совместно (4), (6), (7) получим

$$s_r^{(0)p} = 2\ln r + C, \quad s_q^{(0)p} = 2 + 2\ln r + C, \tag{8}$$

где $C - const.$

Предположим, что на внутренней границе действует постоянное давление p, внешняя граница трубы свободна от усилий:

$$s_r^{(0)p}\Big|_{r=a} = -p, \quad s_r^{(0)e}\Big|_{r=b} = 0.. \tag{9}$$

Из (8), (9) имеет место

$$s_r^{(0)p} = -p + 2\ln\frac{r}{a}, \quad s_q^{(0)p} = -p + 2k_0 + 2\ln\frac{r}{a}. \tag{10}$$

Решение в упругой области будем искать в виде

$$s_r^{(0)e} = A - B\frac{b^2}{r^2}, \quad s_q^{(0)e} = A + B\frac{b^2}{r^2}, \quad t_{rq}^{(0)e} = 0. \tag{11}$$

Из условия сопряжения компонент напряжений на упругопластической границе

$$s_r^{(0)p}\Big|_{r=1} = s_r^{(0)e}\Big|_{r=1}, \quad s_q^{(0)p}\Big|_{r=1} = s_q^{(0)e}\Big|_{r=1}.$$

Согласно (9), (10), (11), (12)

$$s_r^{(0)e} = \frac{p + 2\ln a}{b^2 - 1}\left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right), \quad s_q^{(0)e} = \frac{p + 2\ln a}{b^2 - 1}\left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right). \tag{12}$$

Радиус упругопластической зоны в нулевом приближении определяется соотношениями

$$b^2 = \frac{1}{1 - \ln a - p}.$$

Переходя к полярным координатам по формулам

$$x = r\cos q, \quad y = r\sin q,$$

из (1), (2), (5), (6), (7) получим в первом приближении

$$s_q'^{p} - s_p'^{p} = 2\left(a r\cos q + b r\sin q\right). \tag{13}$$

Уравнения равновесия удовлетворим, полагая, что

$$s_p'^{p} = \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial q^2}, \quad s_q'^{p} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}, \quad t_{rq}'^{p} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial q}\right). \tag{14}$$

Из (13), (14) имеет место

$$r^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} - r\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial q^2} = 2r^3\left(a\cos q + b\sin q\right). \tag{15}$$

Решение в пластической области имеет вид

$$\begin{gathered} s_r'^{p} = \cos q\left(\frac{C_{11}}{r} + r a\right) + \sin q\left(\frac{\bar{C}_{11}}{r} + r b\right), \\ t_{rq}'^{p} = \cos q\left(-r b - \frac{\bar{C}_{11}}{r}\right) + \sin q\left(r a + \frac{C_{11}}{r}\right). \end{gathered} \tag{16}$$

Имеет место

$$s_r'^{p}\Big|_{r=a} = 0, \quad t_{rq}'^{p}\Big|_{r=a} = 0. \tag{17}$$

Из (16), (17) получим

$$C_{11} = -a^2 a, \quad \bar{C}_{11} = -a^2 b.$$

Соотношения (16) согласно (17) запишем в виде

$$
\begin{aligned}
s'^{p}_{r} &= \cos q\left(-\frac{a^{2}a}{r}+a r\right)+\sin q\left(-\frac{a^{2}b}{r}+b r\right),\\
s'^{p}_{q} &= \cos q\left(-\frac{a^{2}a}{r}+3a r\right)+\sin q\left(-\frac{a^{2}b}{r}+3b r\right),\\
t'^{p}_{rq} &= \cos q\left(\frac{a^{2}b}{r}-b r\right)+\sin q\left(-\frac{a^{2}a}{r}+a r\right).
\end{aligned}
\tag{18}
$$

На упругопластической границе $r=1$ напряжения (18) имеют вид:

$$
\begin{aligned}
s'^{e}_{r} &= \cos q\,(-a^{2}a+a)+\sin q\,(-a^{2}b+b)=a_{1}''\cos q+b_{1}''\sin q,\\
t'^{e}_{rq} &= \sin q\,(-a^{2}a+a)+\cos q\,(a^{2}b-b)=b_{1}'''\sin q+a_{1}'''\cos q.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

На внешней границе трубы

$$
s'^{e}_{r}=t'^{e}_{rq}=0 \ \text{при} \ r=b\ . \tag{20}
$$

Из граничных условий (19), (20) определяются напряжения в упругой области [2]

$$
\begin{aligned}
s'^{e}_{r} &= \left[\frac{1}{b^{4}-1}\left(a^{2}-1\right)\left(r-\frac{b^{4}}{r^{3}}\right)\right]\left(a\cos q+b\sin q\right),\\
s'^{e}_{q} &= \left[\frac{1}{b^{4}-1}\left(a^{2}-1\right)\left(r+\frac{b^{4}}{r^{3}}\right)\right]\left(a\cos q+b\sin q\right),\\
t'^{e}_{rq} &= \left[\frac{1}{b^{4}-1}\left(a^{2}-1\right)\left(r-\frac{b^{4}}{r^{3}}\right)\right]\left(a\cos q+b\sin q\right).
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Радиус упругопластической области определяется из соотношений

$$
r'_{s}=\frac{\left(a^{2}-2b^{4}+a^{2}b^{4}\right)}{\left(b^{4}-2b^{4}\ln a-2b^{2}\ln a-1-p\right)}\left(a\cos q+b\sin q\right)=M\sin(q+z), \tag{22}
$$

где

$$
M=\frac{\left(a^{2}-2b^{4}+a^{2}b^{4}\right)\sqrt{a^{2}+b^{2}}}{\left(b^{4}-2b^{4}\ln a-2b^{2}\ln a-1-p\right)},\quad \tan z=\frac{a}{b}. \tag{23}
$$

Для внутреннего и внешнего радиуса при любом $a<1, b>1$ имеет место

$$
\left(a^{2}-2b^{4}+a^{2}b^{4}\right)<0,\ \left(b^{4}-2b^{4}\ln a-2b^{2}\ln a-1-p\right)>0. \tag{24}
$$

Согласно (24) $M<0$.

Из (22), (23), (24) следует, что упругопластическая граница в первом приближении смещается вдоль прямой $-bx+ay=0$ и смещается в сторону уменьшения предела текучести.

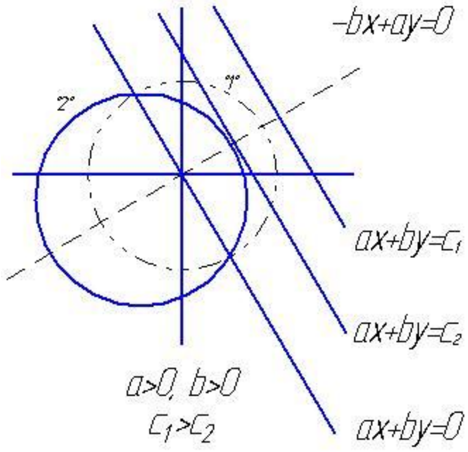

Рис. 2

На рис. 2 контур пластической зоны в нулевом приближении обозначен цифрой *«1»*, контур пластической зоны в первом приближении – *«2»*.

г. Чебоксары

Поступила: 28 марта 2007 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Друянов, Б. А* Вдавливание жесткого штампа в толстую пластически неоднородную пластинку / Б. А. Друянов // Изв. АН СССР. Механика и машиноведение. – 1959. – № 3. – С. 161–166.

2. *Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. – М. : Наука, 1978.

3. *Кузнецов, А. И.* Плоская деформация неоднородных пластических тел / А. И. Кузнецов // Вестник Ленинградского университета. – 1958. – № 13. – С. 112–131.

4. *Ольшак, В.* Теория пластичности неоднородных сред / В. Ольшак, Я. Рыхлевский, В. Урбановский. – М. : Мир, 1964. – 156 с.

5. *Целистова, Е. А.* Пространственное течение идеальнопластического слоя в случае неоднородных свойств материала /Е. А. Целистова // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. – 1999. – № 7. – С. 45–47.

6. *Spencer, A. J. M.* Perturbation methods in plasticity, I. Plane strain of non-homogeneous plastic solids / A. J. M. Spencer // J. Mech. and Phys. Solids. – 1961. – № 4.