ВЕСТНИК ЧГПУ
им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
МЕХАНИКА
ПРЕДЕЛЬНОГО
СОСТОЯНИЯ
№ 2 • 2007

УДК 539.374 *Миронов Б. Г.*

К ВОПРОСУ О СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СОСТОЯНИЯХ ПРИ УСЛОВИИ СОПРОТИВЛЕНИЯ ОТРЫВУ

(Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я Яковлева)

В работах [1] и [2] исследованы предельные соотношения статически определимых состояний при условии сопротивления отрыву в случае, когда величины двух главных напряжений равны.

В настоящей работе рассматриваются общие соотношения статически определимых состояний идеальнопластических тел при отрыве, не связанные с ограничениями на величины главных напряжений.

1. Рассмотрим соотношения связи между компонентами s_{ij} тензора напряжений в декартовой системе координат x, y, z и компонентами s_i главных напряжений

$$s_x = s_1 l_1^2 + s_2 m_1^2 + s_3 n_1^2 \ ,$$

$$t_{xy} = s_1 l_1 l_2 + s_2 m_1 m_2 + s_3 n_1 n_2 \ , \ (xyz, 123, lmn) \tag{1.1}$$

где l_i, m_i, n_i – направляющие косинусы, определяющие ориентацию главных напряжений. Для направляющих косинусов l_i, m_i, n_i справедливы соотношения

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1, \quad l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3 = 0 \, , \ (lmn)$$

а также

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1, \ \ l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0 \, . \ (lmn) \tag{1.2}$$

Пусть $s_3 \le s_2 \le s_1$. Обозначим

$$s_1 = n \, , \Sigma = s_1 - s_2 \, , \mathrm{T} = s_1 - s_3 \, . \tag{1.3}$$

Согласно (1.3) из (1.1) следует

$$s_x = n - \Sigma m_1^2 - \mathrm{T} n_1^2 \ , \ t_{xy} = -\Sigma m_1 m_2 - \mathrm{T} n_1 n_2 \ . \ (xyz, 123) \tag{1.4}$$

В случае статически определимых состояний условие пластичности запишется в виде трех соотношений

$$f_s(s_{ij}) = 0, \quad \text{s=1,2,3}. \tag{1.5}$$

Тогда из (1.4) и (1.5) имеем

$$f_s(n, \Sigma, \mathrm{T}, \mathbf{m}, \mathbf{n}) = 0, \quad \text{s=1,2,3}, \tag{1.6}$$

где $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$, $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$.

Введем обозначения

$$\mathbf{N}_i = \sqrt{\Sigma} m \mathbf{i} + \sqrt{\mathrm{T}} n \mathbf{j} \, , \ N_i = \left| \mathbf{N}_i \right| . \tag{1.7}$$

Тогда для скалярных произведений векторов $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3$ имеем

$$(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2) = N_1 N_2 \cos a_3, \ 0 \le a_i \le p \ . \ (123) \tag{1.8}$$

Для трех векторов $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3$, лежащих в одной плоскости, не нарушая общности, можно считать

$$\cos a_1 = \cos(a_2 + a_3). \tag{1.9}$$

Согласно (1.7) и (1.8)

$$\Sigma m_1^2 + \mathrm{T} n_1^2 = N_1^2, \ \ \Sigma m_1 m_2 + \mathrm{T} n_1 n_2 = N_1 N_2 \cos a_3. \ (123) \tag{1.10}$$

Из (1.7), (1.8) и (1.10) следует, что $\Sigma = 0$ или $\mathrm{T} = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\cos a_1 \cos a_2 \cos a_3 = 1. \tag{1.11}$$

С учетом (1.10), из (1.4) получим

$$s_x = n - N_1^2 \ , \ t_{xy} = -N_1 N_2 \cos a_3 \ . \ (xyz,123) \tag{1.12}$$

Следуя (1.12), из (1.5) имеем

$$f_s(n, a_2, a_3, N_1, N_2, N_3) = 0, \quad \text{s=1,2,3.} \tag{1.13}$$

Из (1.12) следует

$$\begin{aligned}
&(s_x - n)(s_y - n)\cos^2 a_3 = t_{xy}^2, \\
&(s_y - n)(s_z - n)\cos^2 a_1 = t_{yz}^2, \\
&(s_x - n)(s_z - n)\cos^2 a_2 = t_{xz}^2,
\end{aligned} \tag{1.14}$$

а также

$$\begin{aligned}
&(s_x - n) t_{yz} \cos a_2 \cos a_3 = t_{xy} t_{xz} \cos a_1, \\
&(s_y - n) t_{xz} \cos a_1 \cos a_3 = t_{xy} t_{yz} \cos a_2, \\
&(s_z - n) t_{xy} \cos a_1 \cos a_2 = t_{yz} t_{xz} \cos a_3.
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Необходимо отметить, что согласно (1.14) и (1.15) условие полной пластичности [2] имеет место лишь в случае, когда a_1, a_2, a_3 удовлетворяют (1.11).

Подставляя соотношения (1.12) в уравнения равновесия

$$\frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{xz}}{\partial z} = 0, \ (xyz) \tag{1.16}$$

получим

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial n}{\partial x} - N_1\left(\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y}\cos a_3 + \frac{\partial N_3}{\partial z}\cos a_2\right) - \\
&-\left(N_1 \frac{\partial N_1}{\partial x} + N_2 \frac{\partial N_1}{\partial y}\cos a_3 + N_3 \frac{\partial N_1}{\partial z}\cos a_2\right) + \\
&+ N_1\left(N_2 \sin a_3 \frac{\partial a_3}{\partial y} + N_3 \sin a_2 \frac{\partial a_2}{\partial z}\right) = 0. \ (xyz,123)
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Выражение мощности рассеяния механической энергии согласно (1.12) запишем в виде

$$\begin{aligned}
&N = s_{ij} e_{ij} = 3ne - \\
&- N_1(e_x N_1 + e_{xy} N_2 \cos a_3 + e_{xz} N_3 \cos a_2) - \\
&- N_2(e_{xy} N_1 \cos a_3 + e_y N_2 + e_{yz} N_3 \cos a_1) -
\end{aligned} \tag{1.18}$$

$$-N_3(e_{xz}N_1\cos a_2 + e_{yz}N_2\cos a_1 + e_z N_3).$$

Соотношения ассоциированного закона течения определяются из условия экстремума функционала

$$A = N - l_1 f_1 - l_2 f_2 - l_3 f_3 \tag{1.19}$$

и имеют вид

$$e = \frac{l_i}{3}\frac{\partial f_i}{\partial n},$$

$$N_2\left(e_{xy}N_2\sin a_3 + e_{yz}N_3\sin a_1\right) = \frac{l_i}{2}\frac{\partial f_i}{\partial a_3}, \tag{1.20}$$

$$N_3\left(e_{xz}N_1\sin a_2 + e_{yz}N_2\sin a_1\right) = \frac{l_i}{2}\frac{\partial f_i}{\partial a_2},$$

$$e_x N_1 + e_{xy}N_2\cos a_3 + e_{xz}N_3\cos a_2 = -\frac{l_i}{2}\frac{\partial f_i}{\partial N_1},$$

$$e_{xy}N_1\cos a_3 + e_y N_2 + e_{yz}N_3\cos a_1 = -\frac{l_i}{2}\frac{\partial f_i}{\partial N_2}, \tag{1.21}$$

$$e_{xz}N_1\cos a_2 + e_{yz}N_2\cos a_1 + e_z N_3 = -\frac{l_i}{2}\frac{\partial f_i}{\partial N_3}.$$

2. Предположим, что условия пластичности (1.13) не зависят от N_1, N_2, N_3, т. е. имеют вид

$$f_s(n, a_2, a_3) = 0, \quad \text{s=1,2,3.} \tag{2.1}$$

Тогда согласно (1.9) и (2.1) имеем

$$n = const, a_1 = const, a_2 = const, a_3 = const. \tag{2.2}$$

Предельное условие сопротивления отрыву имеет вид

$$(s_i)_{\max} \le p, p = const. \tag{2.3}$$

Предположим, что

$$n = p, s_2 < p, s_3 < p. \tag{2.4}$$

Тогда согласно (2.3) и (2.4) условие (2.2) описывает предельное состояние при отрыве.

Уравнения равновесия (1.17) согласно (2.2) приводятся к виду

$$N_1\left(\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y}\cos a_3 + \frac{\partial N_3}{\partial z}\cos a_2\right) +$$

$$+\left(N_1\frac{\partial N_1}{\partial x} + N_2\frac{\partial N_1}{\partial y}\cos a_3 + N_3\frac{\partial N_1}{\partial z}\cos a_2\right) = 0. \quad (xyz,123) \tag{2.5}$$

Соотношения ассоциированного закона пластического течения согласно (2.2) и (1.21) выглядят следующим образом

$$e_x N_1 + e_{xy}N_2\cos a_3 + e_{xz}N_3\cos a_2 = 0,$$

$$e_{xy}N_1\cos a_3 + e_y N_2 + e_{yz}N_3\cos a_1 = 0, \tag{2.6}$$

$$e_{xz}N_1\cos a_2 + e_{yz}N_2\cos a_1 + e_z N_3 = 0.$$

Умножив первое уравнение из (2.6) на N_2, второе уравнение – на N_1, согласно (1.12) получим

$$\frac{e_x t_{xy}}{\cos a_3} + e_{xy}(s_y - n)\cos a_3 + \frac{e_{xz} t_{yz}\cos a_2}{\cos a_1} = 0,$$

$$e_{xy}(s_x - n)\cos a_3 + \frac{e_y t_{xy}}{\cos a_3} + \frac{e_{yz} t_{xz}\cos a_1}{\cos a_2} = 0. \qquad (2.7)$$

Аналогично из второго и третьего уравнений системы (2.6), а также первого и третьего уравнений системы (2.6) получим

$$\frac{e_{xy} t_{xz}\cos a_3}{\cos a_2} + \frac{e_y t_{yz}}{\cos a_1} + e_{yz}(s_z - n)\cos a_1 = 0,$$

$$\frac{e_{xz} t_{xy}\cos a_2}{\cos a_3} + e_{yz}(s_y - n)\cos a_1 + \frac{e_y t_{yz}}{\cos a_1} = 0, \qquad (2.8)$$

$$e_{xz}(s_x - n)\cos a_2 + \frac{e_{yz} t_{xy}\cos a_1}{\cos a_3} + \frac{e_z t_{xz}}{\cos a_2} = 0,$$

$$\frac{e_x t_{xz}}{\cos a_2} + \frac{e_{xy} t_{yz}\cos a_3}{\cos a_1} + e_{xz}(s_z - n)\cos a_2 = 0. \qquad (2.9)$$

Из (2.7), (2.8), (2.9) следует

$$\frac{e_x t_{xy}}{\cos a_3} + e_{xy} s_y \cos a_3 + \frac{e_{xz} t_{yz}\cos a_2}{\cos a_1} =$$

$$= e_{xy} s_x \cos a_3 + \frac{e_y t_{xy}}{\cos a_3} + \frac{e_{yz} t_{xz}\cos a_1}{\cos a_2},$$

$$\frac{e_{xy} t_{xz}\cos a_3}{\cos a_2} + \frac{e_y t_{yz}}{\cos a_1} + e_{yz} s_z \cos a_1 =$$

$$= \frac{e_{xz} t_{xy}\cos a_2}{\cos a_3} + e_{yz} s_y \cos a_1 + \frac{e_y t_{yz}}{\cos a_1}, \qquad (2.10)$$

$$e_{xz} s_x \cos a_2 + \frac{e_{yz} t_{xy}\cos a_1}{\cos a_3} + \frac{e_z t_{xz}}{\cos a_2} =$$

$$= \frac{e_x t_{xz}}{\cos a_2} + \frac{e_{xy} t_{yz}\cos a_3}{\cos a_1} + e_{xz} s_z \cos a_2.$$

Если имеет место (1.11), то соотношения ассоциированного закона течения (2.10) приобретают вид [2]

$$e_x t_{xy} + e_{xy} s_y + e_{xz} t_{yz} = e_{xy} s_x + e_y t_{xy} + e_{yz} t_{xz},$$

$$e_{xy} t_{xz} + e_y t_{yz} + e_{yz} s_z = e_{xz} t_{xy} + e_{yz} s_y + e_y t_{yz}, \qquad (2.11)$$

$$e_{xz} s_x + e_{yz} t_{xy} + e_z t_{xz} = e_x t_{xz} + e_{xy} t_{yz} + e_{xz} s_z.$$

3. Рассмотрим случай, когда $a_3 = 0$. Тогда согласно (1.7) и (1.8)

$$a_1 = a_2 = a. \qquad (3.1)$$

Согласно (3.1) из (1.12) следует

$$s_x = n - N_1^2, \quad s_y = n - N_2^2, \quad s_z = n - N_3^2,$$

$$t_{xy} = -N_1 N_2, \quad t_{yz} = -N_2 N_3 \cos a, \quad t_{xz} = -N_1 N_3 \cos a. \qquad (3.2)$$

Уравнения равновесия (2.5) с учетом (3.2) примут вид

$$N_1\left(\frac{\partial N_1}{\partial x}+\frac{\partial N_2}{\partial y}+\frac{\partial N_3}{\partial z}\cos a\right)+$$
$$+\left(N_1\frac{\partial N_1}{\partial x}+N_2\frac{\partial N_1}{\partial y}+N_3\frac{\partial N_1}{\partial z}\cos a\right)=0,$$
$$N_2\left(\frac{\partial N_1}{\partial x}+\frac{\partial N_2}{\partial y}+\frac{\partial N_3}{\partial z}\cos a\right)+$$
$$+\left(N_1\frac{\partial N_2}{\partial x}+N_2\frac{\partial N_2}{\partial y}+N_3\frac{\partial N_2}{\partial z}\cos a\right)=0, \qquad (3.3)$$
$$N_3\left(\frac{\partial N_1}{\partial x}\cos a+\frac{\partial N_2}{\partial y}\cos a+\frac{\partial N_3}{\partial z}\right)+$$
$$+\left(N_1\frac{\partial N_3}{\partial x}\cos a+N_2\frac{\partial N_3}{\partial y}\cos a+N_3\frac{\partial N_3}{\partial z}\right)=0.$$

Согласно (3.1) соотношения ассоциированного закона пластического течения (2.6) примут вид

$$e_x N_1+e_{xy}N_2+e_{xz}N_3\cos a=0,$$
$$e_{xy}N_1+e_y N_2+e_{yz}N_3\cos a=0, \qquad (3.4)$$
$$e_{xz}N_1\cos a+e_{yz}N_2\cos a+e_z N_3=0.$$

Характеристические поверхности $y(x,y,z)=0$ систем (3.3) и (3.4) определяются из уравнения

$$q(q^2\cos a+2N_3 q y_z\sin^2 a-N_3^2 y_z\sin^2 a\cos a)=0, \qquad (3.5)$$

где $q=N_1 y_x+N_2 y_y+N_3 y_z\cos a$, $y_x=\frac{\partial y}{\partial x}$, $y_y=\frac{\partial y}{\partial y}$, $y_z=\frac{\partial y}{\partial z}$.

Согласно (3.5) характеристические поверхности систем (3.3) и (3.4) совпадают и имеют вид

$$N_1 y_x+N_2 y_y+N_3 y_z\cos a=0,$$
$$N_1 y_x+N_2 y_y+N_3 y_z(\cos a-(\sin a-1)tga)=0, \qquad (3.6)$$
$$N_1 y_x+N_2 y_y+N_3 y_z(\cos a-(\sin a+1)tga)=0.$$

С учетом (1.11) соотношения (3.6) примут вид [1]. Из (3.6) следует, что системы (3.3) и (3.4) принадлежат к гиперболическому типу.

4. Рассмотрим случай, когда $a_3=p$. Тогда согласно (1.7) и (1.8)

$$a_1=p-a,\; a_2=a. \qquad (4.1)$$

Согласно (4.1) из (1.12) следует

$$s_x=n-N_1^2,\quad s_y=n-N_2^2,\quad s_z=n-N_3^2,$$
$$t_{xy}=N_1N_2,\quad t_{yz}=N_2N_3\cos a,\quad t_{xz}=-N_1N_3\cos a. \qquad (4.2)$$

Уравнения равновесия (2.5) с учетом (4.2) примут вид

$$N_1\left(\frac{\partial N_1}{\partial x}-\frac{\partial N_2}{\partial y}+\frac{\partial N_3}{\partial z}\cos a\right)+$$

$$+\left(N_1 \frac{\partial N_1}{\partial x} - N_2 \frac{\partial N_1}{\partial y} + N_3 \frac{\partial N_1}{\partial z} \cos a \right) = 0,$$

$$N_2 \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} - \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z} \cos a \right) +$$

$$+\left(N_1 \frac{\partial N_2}{\partial x} - N_2 \frac{\partial N_2}{\partial y} + N_3 \frac{\partial N_2}{\partial z} \cos a \right) = 0, \tag{4.3}$$

$$N_3 \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} \cos a - \frac{\partial N_2}{\partial y} \cos a + \frac{\partial N_3}{\partial z} \right) +$$

$$+\left(N_1 \frac{\partial N_3}{\partial x} \cos a - N_2 \frac{\partial N_3}{\partial y} \cos a + N_3 \frac{\partial N_3}{\partial z} \right) = 0.$$

Согласно (4.1) соотношения ассоциированного закона пластического течения (2.6) примут вид

$$\begin{gathered} e_x N_1 + e_{xy} N_2 + e_{xz} N_3 \cos a = 0, \\ e_{xy} N_1 + e_y N_2 + e_{yz} N_3 \cos a = 0, \\ e_{xz} N_1 \cos a + e_{yz} N_2 \cos a + e_z N_3 = 0. \end{gathered} \tag{4.4}$$

Характеристические поверхности $y(x, y, z) = 0$ систем (4.3) и (4.4) определяются из уравнения

$$q(q^2 \cos a + 2N_3 q y_z \sin^2 a - N_3^2 y_z \sin^2 a \cos a) = 0, \tag{4.5}$$

где $q = N_1 y_x - N_2 y_y + N_3 y_z \cos a$.

Согласно (4.5) характеристические поверхности систем (4.3) и (4.4) совпадают и имеют вид

$$\begin{gathered} N_1 y_x - N_2 y_y + N_3 y_z \cos a = 0, \\ N_1 y_x - N_2 y_y + N_3 y_z (\cos a - (\sin a - 1) tg a) = 0, \\ N_1 y_x - N_2 y_y + N_3 y_z (\cos a - (\sin a + 1) tg a) = 0. \end{gathered} \tag{4.6}$$

Из (4.6) следует, что системы (4.3) и (4.4) принадлежат к гиперболическому типу.

г. Чебоксары
Поступила: 17 октября 2006 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 232 с.
2. *Ишлинский, А. Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 702 с.
3. *Качанов, Л. М.* Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М.: Наука, 1969. – 420 с.