ВЕСТНИК ЧГПУ
им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
МЕХАНИКА
ПРЕДЕЛЬНОГО
СОСТОЯНИЯ
№ 2 • 2007

УДК 539.3 *Сенашов С. И.*

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ТИПА ДВУМЕРНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

(Сибирский государственный аэрокосмический университет)

Рассматриваются системы уравнения пластичности, которые содержат конечные соотношения – законы пластичности. Показано, как можно определить тип этих систем уравнений без преобразования их к квазилинейному виду.

Двумерные уравнения пластичности в стационарном случае кроме дифференциальных уравнений равновесия содержат конечные соотношения, связывающие компоненты тензора напряжений (условия пластичности). Поэтому для определения типа уравнений приходится делать замены переменных, которые превращают условие пластичности в тождество. Но такой подход не всегда удобен, а иногда и просто невозможен без дополнительных предположений.

В работе показано, как можно определить тип уравнения без каких – либо преобразований исходных уравнений.

1. Система уравнений, описывающая напряженное состояние, может быть записана в виде [1]:

$$\frac{\partial s_x}{\partial x}+\frac{\partial t}{\partial y}=0,\ \frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial s_y}{\partial y}=0, \tag{1}$$

$$f(s_x, s_y, t)=0\,. \tag{2}$$

Здесь s_x, s_y, t – компоненты симметричного тензора напряжений, (2) – закон пластичности общего вида, а f – достаточно гладкая функция.

Для уравнений (1) – (2) поставим задачу Коши.

Задача Коши. Задача Коши (задача о начальных значениях) является важнейшей в теории пластичности. Пусть L – некоторая кривая в плоскости *xoy*. На этой кривой заданы значения компонент тензора напряжений s_x, s_y, t, которые являются непрерывными функциями вместе со своими первыми и вторыми производными. Требуется восстановить решение уравнений (1) – (2), принимающие на кривой L заданные значения.

2. Определим необходимые условия на кривую L, которым она должна удовлетворять, чтобы задача Коши для уравнений (1) – (2) была разрешима однозначно.

Для этого продифференцируем по x и по y уравнение (2). В результате получим

$$f_1 \frac{\partial s_x}{\partial x} + f_2 \frac{\partial s_y}{\partial x} + f_3 \frac{\partial t}{\partial x} = 0 \qquad (3)$$

$$f_1 \frac{\partial s_x}{\partial y} + f_2 \frac{\partial s_y}{\partial y} + f_3 \frac{\partial t}{\partial y} = 0, \qquad (4)$$

где $f_1 = \frac{\partial f}{\partial s_x}$, $f_2 = \frac{\partial f}{\partial s_y}$, $f_3 = \frac{\partial f}{\partial t}$.

Вычислим дифференциальные формы Картана от компонент тензора напряжений. Получим

$$ds_x - \frac{\partial s_x}{\partial x} dx - \frac{\partial s_x}{\partial y} dy = 0 \qquad (5)$$

$$ds_y - \frac{\partial s_y}{\partial x} dx - \frac{\partial s_y}{\partial y} dy = 0 \qquad (6)$$

$$dt - \frac{\partial t}{\partial x} dx - \frac{\partial t}{\partial y} dy = 0. \qquad (7)$$

Формы (5) – (7) являются линейно зависимыми в силу соотношения

$$f_1 ds_x + f_2 ds_y + f_3 dt = 0,$$

которое следует из (2).

Поэтому для разрешимости задачи Коши, поставленной вдоль кривой L, необходимо, чтобы определитель при переменных $\frac{\partial s_x}{\partial x}, \frac{\partial s_y}{\partial x}, \frac{\partial t}{\partial x}, \frac{\partial s_x}{\partial y}, \frac{\partial s_y}{\partial y}, \frac{\partial t}{\partial y}$ в шести уравнениях (1), (3),(4), (5),(6) был отличен от нуля. Если же определитель вдоль кривой равен нулю, то эта кривая является характеристической. Найдем характеристики системы (1) – (2). Для этого выпишем искомый определитель и приравняем его к нулю. Имеем

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ f_1 & 0 & f_2 & 0 & f_3 & 0 \\ 0 & f_1 & 0 & f_2 & 0 & f_3 \\ dx & dy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dy & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (9)$$

Из формулы (9) без труда получаем уравнения характеристических кривых. Они определяются из следующих выражений

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{1,2} = \frac{-f_3 \pm \sqrt{f_3^2 - 4 f_1 f_2}}{2 f_2}. \qquad (10)$$

Вычислим характеристики для условий Мизеса –Треска

$$(s_x - s_y)^2 + 4t^2 = 4k_s^2, \qquad (11)$$

где k_s – постоянная пластичности, условия Мизеса для плоского напряженного состояния

$$s_x^2 + s_y^2 - s_x s_y + 3t^2 = 3k_s^2. \qquad (12)$$

Условия Д. Д. Ивлева для анизотропной плоской среды [1]

$$A(s_x - s_y)^2 + 4Bt^2 + 2C(s_x - s_y)t = 2, \qquad (13)$$

где *A, B, C* – некоторые постоянные.

Для условия (11) получаем

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = \frac{2t \pm 2k_s}{s_x - s_y}. \qquad (14)$$

Если в (11) сделать стандартную замену М. Леви, то получим общепринятые характеристики

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = tgq, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_2 = -ctgq.$$

Для условия (12) получаем

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = \frac{-3t \pm \sqrt{6k_s^2 + 3t^2 - 3s_x s_y}}{2s_y - s_x}. \qquad (15)$$

Выражение (15) после замены, приведенной, например, в [1], сводится к известным характеристикам.

В заключение этого пункта приведем вид характеристик для условия (13), которое имеет вид

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = \frac{-8Bt - 2C(s_x - s_y) \pm}{2s_y - s_x} \qquad (16)$$

$$\frac{\pm\sqrt{(4Bt + 2C(s_x - s_y))^2 + 16(A(s_x - s_y + 2Ct)^2}}{2s_y - s_x}.$$

Из (16) видно, что система уравнений с таким условием пластичности является гиперболической.

Уравнения характеристик в виде (14) – (16) выписаны, насколько известно автору , впервые и позволяют взглянуть на условие гиперболичности несколько под другим углом зрения.

3. В заключение статьи найдем соотношения на характеристиках. Для системы (1)-(2) они определятся из уравнения

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & f_2 & 0 & f_3 & 0 \\ 0 & f_1 & 0 & f_2 & 0 & f_3 \\ ds_x & dy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ds_y & 0 & dx & dy & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (17)$$

Раскрывая определитель (17), получаем:

$$ds_x(f_1 f_3 \pm f_1\sqrt{f_3^2 - 4f_1 f_2}) + ds_y(f_2 f_3 \pm f_2\sqrt{f_3^2 - 4f_1 f_2}) = 0. \qquad (18)$$

В частности, для условия пластичности Мизеса–Треска условие (18) принимает вид

$$ds_x(t \pm k_s) - ds_y(-t \pm k_s) = 0, \qquad (19)$$

которое заменой М. Леви превращается в условие

$$d\sigma \mp 2k_s d\theta = 0 .$$

Аналогичным образом выписываются соотношения на характеристиках и для условий пластичности (12) – (13).

г. Красноярск
Поступила: 28 декабря 2006 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ишлинский, А. Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2001. – 702 с.