ВЕСТНИК ЧГПУ
им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
МЕХАНИКА
ПРЕДЕЛЬНОГО
СОСТОЯНИЯ
№ 2 • 2007

Тихонов С. В.

О ДВУОСНОМ РАСТЯЖЕНИИ ПЛОСКОСТИ ИЗ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО НЕОДНОРОДНОГО МАТЕРИАЛА

(Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева)

Л. А. Галин [2] дал замечательное решение упругопластической задачи о двуосном растяжении плоскости с круговым отверстием (случай плоской деформации). Г. П. Черепанов [4] получил решение аналогичной задачи в случае плоского напряженного состояния. В дальнейшем были получены различные результаты для упругопластических задач, обобщающих решение Л. А. Галина и Г. П. Черепанова, ряд решений приведен в монографии [1].

В настоящей работе задача Л. А. Галина обобщается на случай неоднородной пластической среды. Предполагается, что неоднородность сохраняет постоянное значение вдоль эллиптических кривых. В первом приближении определяется напряженное состояние и радиус упругопластической зоны. Отметим, что случай, когда предел текучести сохраняет постоянное значение вдоль параллельных прямых рассмотрен в [3].

Рассмотрим бесконечную плоскость с круговым отверстием радиуса a (рис. 1). Условие пластичности примем в виде:

$$\left(s_r - s_q\right)^2 + 4t_{rq}^2 = 4k^2, \qquad (1)$$

где s_r, s_q, t_{rq} – компоненты напряжений в полярной системе координат r, q; k – предел текучести.

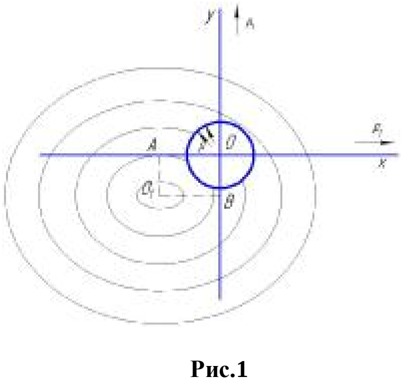

Рис.1

Положим:

$$k = k_0 + d\left(\frac{(x+A)^2}{\bar{a}^2} + \frac{(y+B)^2}{\bar{b}^2}\right),\ k_0, \bar{a}, \bar{b}, A, B - const, \tag{2}$$

где d – малый безразмерный параметр.

Впоследствии перейдем к безразмерным значениям радиусов трубы a и черту сверху у величин $\bar{a}, \bar{b}$ опустим. Положим:

$$a = a / r_s^{(0)},$$

где $r_s^{(0)}$ – радиус пластической зоны в нулевом приближении.

Согласно (2) предел текучести k сохраняет постоянное значение вдоль эллипсов

$$\frac{(x+A)^2}{\bar{a}^2} + \frac{(y+B)^2}{\bar{b}^2} = c,\ A, B - const \tag{3}$$

и изменяется в зависимости от изменения величины c.

Уравнения равновесия в полярной системе координат имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial s_r}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial t_{rq}}{\partial q} + \dfrac{s_r - s_q}{r} = 0, \\ \dfrac{\partial t_{rq}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial s_q}{\partial q} + \dfrac{2t_{rq}}{r} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Будем считать, что на контуре отверстия действует нормальное давление p, а на бесконечности плоскость растягивается взаимно перпендикулярными усилиями p_1, p_2.

Из уравнений перехода из декартовой системы координат в полярную систему координат

$$s_r = \frac{s_x + s_y}{2} + \frac{s_x - s_y}{2}\cos 2q, \quad s_q = \frac{s_x + s_y}{2} - \frac{s_x - s_y}{2}\cos 2q,$$

$$t_{rq} = \frac{s_x - s_y}{2}\sin 2q,$$

граничные условия на бесконечности в упругой зоне запишем в виде:

$$s_r^e\Big|_{r=\infty} = q - d\cos 2q, \quad s_q^e\Big|_{r=\infty} = q + d\cos 2q, \quad t_{rq}^e\Big|_{r=\infty} = d\sin 2q,$$

где

$$d = \frac{p_1 - p_2}{2}, \quad q = \frac{p_1 + p_2}{2}.$$

Положим, что искомое решение зависит от некоторого параметра d, будем искать решение в виде:

$$s_{ij} = s_{ij}^{(0)} + s_{ij}'d + s_{ij}''d^2 + \ldots, \quad r_s = r_s^{(0)} + r_s'd + r_s''d^2 + \ldots, \tag{5}$$

где r_s – радиус пластической зоны.

В дальнейшем припишем всем компонентам в упругой области индекс «*e*», а в пластической области индекс «*p*». Все величины, имеющие размерность напряжения, будем считать безразмерными и отнесенными к пределу текучести в нулевом приближении k_0, все линейные размеры будем считать безразмерными, отнесенными к радиусу пластической зоны в нулевом приближении $r_s^{(0)}$.

В исходном нулевом приближении имеет место осесимметричное состояние

$$t_{rq}^{(0)p} = 0\,. \tag{6}$$

Из (1), (5), (6) имеет место:

$$s_{r}^{(0)p} - s_{q}^{(0)p} = -2\,. \tag{7}$$

Решая совместно (4), (6), (7) получим:

$$s_{r}^{(0)p} = 2\ln r + C, \quad s_{q}^{(0)p} = 2 + 2\ln r + C\,, \tag{8}$$

где *C – const.*

Предположим, что на внутренней границе действует постоянное давление *p*:

$$s_{r}^{(0)p}\Big|_{r=a} = -p\,. \tag{9}$$

Из (8), (9) имеет место:

$$s_{r}^{(0)p} = -p + 2\ln\frac{r}{a}, \quad s_{q}^{(0)p} = -p + 2 + 2\ln\frac{r}{a}\,. \tag{10}$$

Решение в упругой области будем искать в виде

$$s_{r}^{(0)e} = A - B\frac{1}{r^2}, \quad s_{q}^{(0)e} = A + B\frac{1}{r^2}, \quad t_{rq}^{(0)e} = 0\,. \tag{11}$$

Из условия сопряжения компонент напряжений на упругопластической границе определим постоянные A, B:

$$s_{r}^{(0)p}\Big|_{r=1} = s_{r}^{(0)e}\Big|_{r=1}, \quad s_{q}^{(0)p}\Big|_{r=1} = s_{q}^{(0)e}\Big|_{r=1}.$$

Откуда получим:

$$s_{r}^{(0)e} = q - \frac{q + p + 2\ln a}{r^2}, \quad s_{q}^{(0)e} = q + \frac{q + p + 2\ln a}{r^2}\,. \tag{12}$$

Радиус упругопластической зоны в нулевом приближении определяется соотношениями

$$2\ln a = -p - q + 1\,.$$

Переходя к полярным координатам по формулам

$$x = r\cos q, \quad y = r\sin q\,,$$

из (1), (5), (6), (7) получим в первом приближении:

$$\begin{gathered} k = k_0 + \frac{d}{2a^2b^2}\Big[(b^2 - a^2)r^2\cos 2q + 4Ba^2 r\sin q + 4Ab^2 r\cos q + \\ + (a^2 + b^2)r^2 + 2b^2A^2 + 2a^2B^2\Big], \end{gathered} \tag{13}$$

из (1), (5), (6), (7) получим:

$$\begin{gathered} s_{q}^{\prime p} - s_{r}^{\prime p} = \frac{1}{a^2b^2}\Big[(b^2 - a^2)r^2\cos 2q + 4Ba^2 r\sin q + 4Ab^2 r\cos q + \\ + (a^2 + b^2)r^2 + 2b^2A^2 + 2a^2B^2\Big]. \end{gathered} \tag{14}$$

Уравнения равновесия удовлетворим, полагая:

$$s_{p}^{\prime p} = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial q^2}, \quad s_{q}^{\prime p} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}, \quad t_{rq}^{\prime p} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial q}\right). \tag{15}$$

Из (14), (15) имеет место:

$$r^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}-r\frac{\partial\Phi}{\partial r}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial q^2}=\frac{r^2}{a^2b^2}\Big[(b^2-a^2)r^2\cos 2q+4Ba^2r\sin q+$$
$$+4Ab^2r\cos q+(a^2+b^2)r^2+2b^2A^2+2a^2B^2\Big]. \qquad (16)$$

Решение уравнения представим в виде суммы однородного и неоднородного решений:

$$\Phi=\Phi_{одн}+\Phi_{неодн}.$$

Тогда имеет место

$$r^2\frac{\partial^2\Phi_{одн}}{\partial r^2}-r\frac{\partial\Phi_{одн}}{\partial r}-\frac{\partial^2\Phi_{одн}}{\partial q^2}=0. \qquad (17)$$

Решение будем искать в виде

$$\Phi_{одн}=R(r)\cos(nq+q_0). \qquad (18)$$

Из (17), (18) получим уравнение Эйлера:

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2}-r\frac{dR}{dr}+n^2R=0. \qquad (19)$$

Из (15), (18), (19) получим решения для однородного уравнения:

$$s'^{p\,одн}_{r}=C_{00}+\frac{C_{11}}{r}\cos(q)+\frac{\overline{C}_{11}}{r}\sin(q)+$$
$$+\frac{1}{r}\Big([-3C_{21}+\sqrt{3}C_{22}]\cos(\sqrt{3}\ln r)+[-\sqrt{3}C_{21}-3C_{22}]\sin(\sqrt{3}\ln r)\Big)\cos(2q)+ \qquad (20)$$
$$+\frac{1}{r}\Big([-3\overline{C}_{21}+\sqrt{3}\overline{C}_{22}]\cos(\sqrt{3}\ln r)+[-\sqrt{3}\overline{C}_{21}-3\overline{C}_{22}]\sin(\sqrt{3}\ln r)\Big)\sin(2q),$$

$$t'^{p\,одн}_{rq}=\frac{C_{11}}{r}\sin(q)-\frac{\overline{C}_{11}}{r}\cos(q)+$$
$$+\frac{1}{r}\Big(2\sqrt{3}C_{22}\cos(\sqrt{3}\ln r)-2\sqrt{3}C_{21}\sin(\sqrt{3}\ln r)\Big)\sin(2q)+$$
$$+\frac{1}{r}\Big(-2\sqrt{3}\overline{C}_{22}\cos(\sqrt{3}\ln r)+2\sqrt{3}\overline{C}_{21}\sin(\sqrt{3}\ln r)\Big)\cos(2q),$$

где $C_{00},C_{11},\overline{C}_{11},C_{21},\overline{C}_{21},C_{22},\overline{C}_{22}$ – некоторые постоянные.

Из (16) определим неоднородные решения для функции напряжений:

$$\Phi_{неодн}=\frac{b^2-a^2}{12a^2b^2}r^4\cos 2q+\frac{B}{b^2}r^3\sin q+\frac{A}{a^2}r^3\cos q+\frac{a^2+b^2}{8a^2b^2}r^4-\frac{1}{a^2b^2}[B^2a^2+A^2b^2]\ln r. \qquad (21)$$

Из (15), (21) получим напряжения:

$$s'^{p\,неодн}_{r}=\frac{1}{2a^2b^2}\left(4Ab^2r\cos q+4Ba^2r\sin q+(a^2+b^2)r^2-2b^2A^2\frac{1}{r^2}-2a^2B^2\frac{1}{r^2}\right),$$

$$s_q'^{\,неодн} = \frac{1}{2a^2b^2}\Big(2(b^2-a^2)\,r^2\cos 2q + 12Ab^2 r\cos q + 12Ba^2 r\sin q + \\ + (3a^2+3b^2)\,r^2 + 2b^2A^2\frac{1}{r^2} + 2a^2B^2\frac{1}{r^2}\Big), \tag{22}$$

$$t_{rq}'^{\,неодн} = \frac{1}{2a^2b^2}\left((b^2-a^2)\,r^2\sin 2q - 4Ba^2 r\cos q + 4Ab^2 r\sin q\right).$$

Общее решение определяется суммой решений (20), (22):

$$s_r'^{p} = s_r'^{p\,одн} + s_r'^{p\,неодн}, \quad t_{rq}'^{p} = t_{rq}'^{p\,одн} + t_{rq}'^{p\,неодн}, \quad s_q'^{p} = s_q'^{p\,одн} + s_q'^{p\,неодн}.$$

Учитывая, что внутренняя граница в первом приближении свободна от усилий

$$s_r'^{p}\Big|_{r=a} = 0, \quad t_r'^{p}\Big|_{r=a} = 0\,, \tag{23}$$

решение в пластической зоне будет определяться из (14), (22), (23):

$$s_r'^{p} = \left(\frac{A^2}{a^2}+\frac{B^2}{b^2}\right)\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r^2}\right) + \frac{a^2+b^2}{2a^2b^2}\left(r^2-a^2\right) + \\ + \left(-\frac{2Aa^2}{a^2}\frac{1}{r}+\frac{2A}{a^2}r\right)\cos q + \left(-\frac{2Ba^2}{b^2}\frac{1}{r}+\frac{2B}{b^2}r\right)\sin q - \\ - \frac{1}{2}\frac{b^2-a^2}{a^2b^2r}\left(a^3\cos(\sqrt{3}\ln\frac{r}{a}) - r^3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\sin(\sqrt{3}\ln\frac{r}{a})\right)\cos 2q,$$

$$t_{rq}'^{p} = \left(-\frac{2Aa^2}{a^2}\frac{1}{r}+\frac{2A}{a^2}r\right)\sin q + \left(\frac{2Ba^2}{b^2}\frac{1}{r}-\frac{2B}{b^2}r\right)\cos q + \\ + \frac{b^2-a^2}{a^2b^2r}\frac{\sqrt{3}a^3}{3}\sin(\sqrt{3}\ln\frac{r}{a})\sin 2q, \tag{24}$$

$$s_q'^{p} = \left(\frac{A^2}{a^2}+\frac{B^2}{b^2}\right)\left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{a^2}+2\right) + \frac{(a^2+b^2)}{2a^2b^2}\left(3r^2-a^2\right) + \\ + \left(-\frac{2Aa^2}{a^2}\frac{1}{r}+\frac{6A}{a^2}r\right)\cos q + \left(-\frac{2Ba^2}{b^2}\frac{1}{r}+\frac{6B}{b^2}r\right)\sin q - \\ - \frac{1}{2}\frac{b^2-a^2}{a^2b^2r}\left(a^3\cos(\sqrt{3}\ln\frac{r}{a}) - \frac{\sqrt{3}}{3}\sin(\sqrt{3}\ln\frac{r}{a}) - 3r^3\right)\cos 2q.$$

На упругопластической границе из (24) справедливо:

$$s_r'^{p} = a_0'' + a_1''\cos q + b_1''\sin q + a_2''\cos 2q, \\ t_{rq}'^{p} = b_1'''\sin q + a_1'''\cos q + b_2'''\sin 2q, \tag{26}$$

где

$$a_0'' = \frac{a^2+b^2}{2a^2b^2}(1-a^2) + \left(\frac{A^2}{a^2}+\frac{B^2}{b^2}\right)\left(\frac{1}{a^2}-1\right), \quad a_1'' = \frac{2A}{a^2}(1-a^2),$$

$$b_1'' = \frac{2B}{b^2}(1-a^2), \quad a_2'' = \frac{1}{2}\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}\left[-a^3\cos(\sqrt{3}\ln a) + 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\sin(\sqrt{3}\ln a)\right], \qquad (27)$$

$$b_1''' = \frac{2A}{a^2}(1-a^2), \quad a_1''' = \frac{2B}{b^2}(a^2-1), \quad b_2''' = -\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}\frac{\sqrt{3}}{3}a^3\sin(\sqrt{3}\ln a).$$

1) Положим, что на границе упругопластической области имеет место (26) при

$$a_0'' = \frac{a^2+b^2}{2a^2b^2}(1-a^2) + \left(\frac{A^2}{a^2}+\frac{B^2}{b^2}\right)\left(\frac{1}{a^2}-1\right), \quad a_1'' = b_1'' = a_1'' = b_1''' = a_1''' = a_2'' = b_2''' = 0.$$

Тогда напряжения в упругой области равны:

$$s_r'^e = \left[\frac{a^2+b^2}{2a^2b^2}(1-a^2) + \left(\frac{A^2}{a^2}+\frac{B^2}{b^2}\right)\left(\frac{1}{a^2}-1\right)\right]\frac{1}{r^2},$$

$$s_q'^e = \left[\frac{a^2+b^2}{2a^2b^2}(a^2-1) + \left(\frac{A^2}{a^2}+\frac{B^2}{b^2}\right)\left(1-\frac{1}{a^2}\right)\right]\frac{1}{r^2}, \quad t_{rq}'^e = 0. \qquad (28)$$

2) Положим, что на границе упругопластической области имеет место (26) при

$$a_1'' = \frac{2A}{a^2}(1-a^2), \quad b_1''' = \frac{2A}{a^2}(1-a^2), \quad a_0'' = a_1'' = b_1'' = a_1''' = a_2'' = b_2''' = 0.$$

Тогда напряжения будут определяться:

$$s_r'^e = \frac{2A}{a^2}(1-a^2)\frac{1}{r^3}\cos q, \quad s_q'^e = -\frac{2A}{a^2}(1-a^2)\frac{1}{r^3}\cos q,$$

$$t_{rq}'^e = \frac{2A}{a^2}(1-a^2)\frac{1}{r^3}\sin q. \qquad (29)$$

3) Положим, что на границе упругопластической области имеет место (26) при

$$b_1'' = \frac{2B}{b^2}(1-a^2), \quad a_1''' = \frac{2B}{b^2}(a^2-1), \quad a_0'' = a_1'' = a_1'' = b_1''' = a_2'' = b_2''' = 0.$$

Тогда напряжения в упругой области будут определяться:

$$s_r'^e = \frac{2B}{b^2}(1-a^2)\frac{1}{r^3}\sin q, \quad s_q'^e = -\frac{2B}{b^2}(1-a^2)\frac{1}{r^3}\sin q,$$

$$t_{rq}'^e = \frac{2B}{b^2}(1-a^2)\frac{1}{r^3}\cos q. \qquad (30)$$

4) Положим, что на границе упругопластической области имеет место (26) при

$$a_2'' = \frac{1}{2}\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}\left[-a^3\cos(\sqrt{3}\ln a) + 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\sin(\sqrt{3}\ln a)\right],$$

$$a_0'' = a_1'' = b_1'' = a_1'' = b_1''' = a_1''' = b_2''' = 0.$$

Тогда напряжения в упругой области будут определяться:

$$s_r^{\prime e}=\frac{1}{2}\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}\left[-a^3\cos(\sqrt{3}\ln a)+1-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin(\sqrt{3}\ln a)\right]\left(-\frac{1}{r^4}+\frac{2}{r^2}\right)\cos 2q\ ,$$

$$s_q^{\prime e}=\frac{1}{2}\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}\left[-a^3\cos(\sqrt{3}\ln a)+1-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin(\sqrt{3}\ln a)\right]\frac{1}{r^4}\cos 2q\ , \qquad (31)$$

$$t_{rq}^{\prime e}=\frac{1}{2}\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}\left[-a^3\cos(\sqrt{3}\ln a)+1-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin(\sqrt{3}\ln a)\right]\left(-\frac{1}{r^4}+\frac{1}{r^2}\right)\sin 2q\ .$$

5) Положим, что на границе упругопластической области имеет место (26) при

$$b_2'''=-\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}\frac{\sqrt{3}}{3}a^3\sin(\sqrt{3}\ln a),\quad a_0''=a_1''=b_1''=a_1''=b_1'''=a_1'''=a_2''=0.$$

Тогда напряжения в упругой области будут определяться:

$$s_r^{\prime e}=-\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3\sin(\sqrt{3}\ln a)\left(\frac{1}{r^4}-\frac{1}{r^2}\right)\cos 2q\ ,$$

$$s_q^{\prime e}=\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3\sin(\sqrt{3}\ln a)\frac{1}{r^4}\cos 2q\ , \qquad (32)$$

$$t_{rq}^{\prime e}=-\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}\frac{\sqrt{3}}{3}a^3\sin(\sqrt{3}\ln a)\left(\frac{2}{r^4}-\frac{1}{r^2}\right)\sin 2q\ .$$

6) Положим, что на границе упругопластической области имеет место (26) при

$$a_0''=a_1''=b_1''=a_1''=b_1'''=a_1'''=b_2'''=0,$$

на бесконечности заданы усилия:

$$s_r^{\prime e}\Big|_{r=\infty}=a_2\cos 2q+b_2\sin 2q\ .$$

где $a_2=-1,\quad b_2'=b_2=a_2'=0$.

Тогда напряжения в упругой области имеют вид:

$$s_r^{\prime e}=-\left[1-\frac{4}{r^2}+\frac{3}{r^4}\right]\cos 2q,\quad s_q^{\prime e}=\left[1+\frac{3}{r^4}\right]\cos 2q,$$

$$t_{rq}^{\prime e}=\left[1+\frac{2}{r^2}-\frac{3}{r^4}\right]\sin 2q. \qquad (33)$$

Результирующее напряжение в упругой области определяется как сумма напряжений (28)–(33):

$$s_r^{\prime e}=\left[\frac{a^2+b^2}{2a^2b^2}(1-a^2)+\left(\frac{A^2}{a^2}+\frac{B^2}{b^2}\right)\left(\frac{1}{a^2}-1\right)\right]\frac{1}{r^2}+2(1-a^2)\frac{1}{r^3}\left(\frac{A}{a^2}\cos q+\frac{B}{b^2}\sin q\right)+$$

$$+\left(\frac{L-3}{r^4}+\frac{\bar{L}+4}{r^2}-1\right)\cos 2q,$$

$$s_q'^{e}=\left[\frac{a^2+b^2}{2a^2b^2}(a^2-1)+\left(\frac{A^2}{a^2}+\frac{B^2}{b^2}\right)\left(1-\frac{1}{a^2}\right)\right]\frac{1}{r^2}-2\left(1-a^2\right)\frac{1}{r^3}\left(\frac{A}{a^2}\cos q+\frac{B}{b^2}\sin q\right)+$$
$$+\left(-\frac{L-3}{r^4}+1\right)\cos 2q,$$
$$t_{rq}'^{e}=2\left(1-a^2\right)\frac{1}{r^3}\left(\frac{A}{a^2}\sin q+\frac{B}{b^2}\cos q\right)+\left(\frac{L-3}{r^4}+\frac{\bar{L}+2}{r^2}+1\right)\sin 2q\,, \tag{34}$$

где

$$L=\frac{b^2-a^2}{2a^2b^2}\left[a^3\cos\left(\sqrt{3}\ln a\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}\left(-4a^3+1\right)\sin\left(\sqrt{3}\ln a\right)-1\right],$$
$$\bar{L}=\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}\left[-a^3\cos\left(\sqrt{3}\ln a\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}\left(2a^3-1\right)\sin\left(\sqrt{3}\ln a\right)+1\right].$$

Из (12) получим:

$$\left.\frac{ds_q^{(0)p}}{dr}\right|_{r=1}=2,\quad \left.\frac{ds_q^{(0)e}}{dr}\right|_{r=1}=-2,$$

тогда для радиуса упругопластической области в первом приближении получим:

$$r_s'=\frac{s_q'^{p}-s_q'^{e}}{\dfrac{ds_q^{(0)e}}{dr}-\dfrac{ds_q^{(0)p}}{dr}}=\frac{1}{4}\left(s_q'^{e}-s_q'^{p}\right).$$

Из (24), (34) получим радиус упругопластической области в первом приближении:

$$r_s'=-2\left(\frac{A^2}{a^2}+\frac{B^2}{b^2}\right)+\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}\left(a^2-2\right)+4\left(a^2-2\right)\frac{A}{a^2}\cos q+$$
$$+4\left(a^2-2\right)\frac{B}{b^2}\sin q+\frac{2(b^2-a^2)}{a^2b^2}\left[\frac{\sqrt{3}}{3}a^3\sin(\sqrt{3}\ln a)-1\right]\cos 2q. \tag{35}$$

Таким образом, напряженное состояние в пластической (24) и упругой (34) полностью определено, изменение границы пластической зоны определяется из соотношений (35).

г. Чебоксары
Поступила: 15 апреля 2007 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аннин, Б. Д.* Упруго-пластическая задача / Б. Д. Аннин, Г. П. Черепанов. – Новосибирск: Наука, 1983. – 238 с.

2. *Галин, Л. А.* Плоская упругопластическая задача / Л.А. Галин // Прикладная математика и механика. – 1946. – Т. 10. – №3.

3. *Максимова, Л. А.* Об упругопластическом состоянии неоднородной трубы, находящейся под действием внутреннего давления / Максимова Л. А., Тихонов С. В. // Вестник Чувашского государственного педагогического университета. Серия: Механика предельного состояния. – 2007. – №2.

4. *Черепанов, Г. П.* Об одном методе решения упругопластической задачи / Г. П. Черепанов // Прикладная математика и механика. – 1963. – Т. 27. – №3.