

Е. В. Свиридонова

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ТРЕЩИН В СМЕШАННОЙ ПОСТАНОВКЕ

Оренбургский государственный университет, г. Оренбург

Аннотация. В работе приведено численно-аналитическое решение плоских задач о раскрытии берегов плоской трещины со смешанными краевыми условиями. Решение осуществлялось одним из методов граничных элементов – методом разрывных смещений. Нормальные и сдвиговые раскрытия берегов зияющей части трещины аппроксимировались функциональными зависимостями с помощью метода наименьших квадратов. Построены аналитические выражения коэффициентов интенсивности напряжений 1-го и 2-го рода в виде предельных соотношений, основанных на разрывных смещениях. Определены положения зон развития и стагнации трещины на основе силового критерия хрупкого разрушения сплошных сред с трещиной.

Ключевые слова: зияющая трещина, смешанные краевые условия, коэффициенты интенсивности напряжений 1-го и 2-го рода, оценка состояния развития трещины.

УДК: 517

Введение. Известно, что горные породы имеют структурно-неоднородное блочно-слоистое строение. Блочная структура проявляется на разных масштабных уровнях, от размеров кристаллических зерен до блоков горного массива [1]. Зачастую блоки связаны между собой пустыми или заполненными грунтом зияющими трещинами. Разрушение геоматериалов происходит в результате скольжения, сдвига, поворота, смещения друг относительно друга блоков породы как жесткого целого вдоль нарушений сплошности массива. Поэтому, при моделировании процесса разрушения нужно знать, как раскрывается зияющая трещина под действием смещений и напряжений.

Трещина в деформируемом твердом теле состоит из фронта трещины, на котором смыкают поверхности полости, и берегов трещины [2]. В окрестности фронта наблюдается наибольшая концентрация напряжений и происходит локальное разрушение материала. С точки зрения постановки и решения задач теории упругости, берега трещины играют роль дополнительной границы тела и из-за малого расстояния между берегами реальную трещину можно рассматривать как математический разрез, т.е. полость нулевого объема, ограниченную двумя геометрически совпадающими поверхностями и – берегами разреза. В нашем случае трещина – это граница двух блочных структур.

Задача о расклинивании плоскости полубесконечным разрезом, к берегам которого приложены постоянные разрывные смещения, с зияющей трещиной (первая задача) рассмотрена в работе Г. П. Черепанова [3] (основная часть содержит устье, а зияющая – вершину трещины). Расклинивание характеризуется перемещением берегов трещины и при достаточных усилиях приводит к разрушению. В связи с этим, в работе [4] различаются типы поверхностей разрыва смещений. Если реализуется разрыв нормального к поверхности смещения, то трещина

характеризует отрыв и является трещиной нормального отрыва, а если реализуется разрыв касательного к трещине смещения, то трещина является трещиной сдвига. Также в работе [3] рассмотрена задача о расклинивании с зияющей трещиной отрыва, в которой на полубесконечном разрезе задавались постоянные нормальные смещения, а зияющая трещина находилась под действием сжимающих напряжений (вторая задача). В обеих задачах представлено аналитическое выражение нормального раскрытия зияющей трещины в верхней полуплоскости. С помощью асимптотического критерия можно записать коэффициент интенсивности напряжений в конце трещины отрыва на оси ординат и найти длину трещины. Следует отметить, что данные задачи были решены в аналитическом виде и не учитывали структуру разрушаемого материала и влияние смешанного нагружения. Поэтому для таких задач поиск аналитических представлений коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) в задачах со смешанными краевыми условиями (СКУ), приложенными к берегам трещины, приобретает особую актуальность.

Целью настоящего исследования является численное решение краевых задач о раскрытии берегов плоской трещины смешанного типа в песчанике при различных краевых условиях, построение алгоритма вычисления раскрытий берегов трещины, коэффициентов интенсивности напряжений 1-го и 2-го рода, оценка состояния развития трещины на основе силового критерия хрупкого разрушения.

Постановка и метод решения задач. В рамках работы решение задач производится в условиях, когда трещина моделируется прямолинейным математическим разрезом конечной длины. В постановке со смешанными краевыми условиями в общем случае часть берегов трещины находится под действием сдвиговых и нормальных смещений, а часть – под действием сдвиговых и нормальных напряжений. Поэтому для i -го граничного элемента ($i = \overline{1, J}$)

$$u_s^i = u_s^0, \quad u_n^i = u_n^0, \quad \sigma_s^i = \sigma_s^0, \quad \sigma_n^i = \sigma_n^0.$$

Для упрощения дальнейших рассуждений запишем вектора правой части граничных условий

$$u_0 = (u_n^0 \quad u_s^0)^T, \quad \sigma_0 = (\sigma_n^0 \quad \sigma_s^0)^T; \tag{1}$$

вектора левой части на берегах основной ($b = OA$) и зияющей ($L = OB$) частей трещины [5]

$$u_i = (u_n^i \quad u_s^i)^T, \quad \sigma_i = (\sigma_n^i \quad \sigma_s^i)^T. \tag{2}$$

Общее представление геометрической модели трещины и постановки граничных условий задает рис. 1.

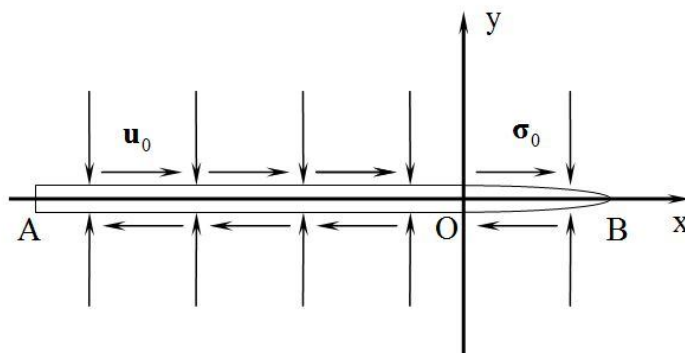


Рис. 1. Геометрическая модель трещины смешанного типа

В качестве метода численного решения задач теории трещин со смешанными краевыми условиями выбран один из типов метода граничных элементов – метод разрывных смещений. Граничные интегральные уравнения метода разрывных смещений детально рассмотрены в работе А. М. Линькова [6], где показано, как при переходе от интегральной формы записи к конечным суммам образуется система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$u_s^i = \sum_{j=1}^J B_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^J B_{sn}^{ij} D_n^j, \quad (3)$$

$$\sigma_s^i = \sum_{j=1}^J A_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^J A_{sn}^{ij} D_n^j, \quad (4)$$

$$u_n^i = \sum_{j=1}^J B_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^J B_{nn}^{ij} D_n^j, \quad (5)$$

$$\sigma_n^i = \sum_{j=1}^J A_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^J A_{nn}^{ij} D_n^j, \quad (6)$$

где $B_{ss}^{ij}, B_{sn}^{ij}, B_{ns}^{ij}, B_{nn}^{ij}, A_{ss}^{ij}, A_{sn}^{ij}, A_{ns}^{ij}, A_{nn}^{ij}$ – граничные коэффициенты влияния, $D_n = u_n(x, 0_-) - u_n(x, 0_+)$ – нормальные раскрытия (разрывы) берегов трещины; $D_s = u_s(x, 0_-) - u_s(x, 0_+)$ – сдвиговые раскрытия (разрывы) берегов трещины; $u_n(x, 0_-), u_n(x, 0_+)$ – нормальные смещения соответственно нижнего и верхнего берегов трещины; $u_s(x, 0_-), u_s(x, 0_+)$ – касательные смещения нижнего и верхнего берегов трещины.

При этом считается, что:

- внутренняя нормаль к берегам трещины направлена внутрь трещины;
- при $D_n > 0$ берега трещины сближаются;
- при $D_s > 0$ наружный (верхний) берег смещается относительно внутреннего (нижнего) берега против часовой стрелки (влево).

Алгоритм решения. Ниже представлен алгоритм решения краевых задач теории трещин, который можно записать следующим образом.

1. Формирование таблицы физических свойств горной породы и геометрической модели трещины в виде математического разреза плоскости.
2. Формирование системы граничных условий.
3. Формирование замкнутой СЛАУ.
4. Решение СЛАУ.
5. Представление решения СЛАУ в виде таблицы нормальных и сдвиговых раскрытий по номерам граничных элементов.
6. Аппроксимация раскрытий в зияющей части трещины

$$D_n(x) = D_n^{(1)}(x) p_n \sum_{i=0}^M \alpha_{in} (u_s^0/u_n^0)^i + D_n^{(\sigma)}(x) \sum_{i=0}^M \beta_{in} (\sigma_s^0/\sigma_n^0)^i, \quad (7)$$

$$D_s(x) = D_n^{(1)}(x) p_s \sum_{i=0}^M \alpha_{is} (u_n^0/u_s^0)^{i-1} + D_n^{(\sigma)}(x) \sum_{i=0}^M \beta_{is} (\sigma_n^0/\sigma_s^0)^{i-1}, \quad (8)$$

где

$$p_n = [\gamma_{0n} + \gamma_{1n} \exp(\gamma_{2n} bL^{-1})] [\eta_{0n} + \eta_{1n} \exp(\eta_{2n} bL^{-1})], \quad (9)$$

$$p_s = [\gamma_{0s} + \gamma_{1s} \exp(\gamma_{2s} bL^{-1})] [\eta_{0s} + \eta_{1s} \exp(\eta_{2s} bL^{-1})], \quad (10)$$

а смещение $D_n^{(\sigma)}$ учитывает поправку на действие напряжений σ_n^0 .

7. Вычисление КИН 1-го и 2-го рода в виде пределов по формулам, приведенным в работе А. М. Липькова [6]

$$K_I = -\frac{G}{2(1-\nu)}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow L} \frac{D_n(x)}{\sqrt{L-x}}, \quad (11)$$

$$K_{II} = -\frac{G}{2(1-\nu)}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow L} \frac{D_s(x)}{\sqrt{L-x}}, \quad (12)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

где G — модуль сдвига, Н/м^2 ; ν — коэффициент Пуассона.

Для трещин отрыва $p_n, p_s = 1$, $D_n^{(\sigma)} = 0$, а постоянные коэффициенты α_{in} и α_{is} находятся методом наименьших квадратов.

Для трещин сдвига $D_n^{(\sigma)} = 0$, и с помощью метода наименьших квадратов находятся коэффициенты, а затем постоянные γ_{in} , γ_{is} , η_{in} и η_{is} для зияющей части трещины.

Для смешанного типа трещин и трещин в трещиноватом массиве проводятся последовательно действия для трещин отрыва и сдвига, а затем находятся для зияющей части трещины коэффициенты β_{in} и β_{is} .

На основе вычислительного алгоритма, была создана прикладная программа, получившая название “Численное моделирование раскрытий берегов трещины смешанного типа”, предназначенная для проведения численных расчетов по определению нормальных и сдвиговых разрывов смещений берегов трещины [7].

Численное решение задач. Решение задач осуществлялось, при следующих исходных данных: $L_0 = 10$ мм — длина ОВ, $x \in [0, L_0]$, $b = 10L_0$ — длина ОА, $x \in [-b, 0]$, $u_0 = -1.2$ мкм — смещение берегов, $\sigma_0 = -98$ кН/м² — напряжение на берегах, $E = 3 \cdot 10^{10}$ Па, $\nu = 0.3$ механические свойства песчаника, $J' = 30$ — количество граничных элементов на ОА, $J - J' = 750$ — количество граничных элементов на ОВ.

Обратимся к вопросу об устойчивости решения СЛАУ. Граничные условия для каждого граничного элемента могут быть заданы с различной точностью. Известно, что для проверки устойчивости [8] правой части СЛАУ достаточно для объединенной матрицы проверить выполнимость условия

$$\det \{C\} \neq 0. \quad (13)$$

Связь между относительными погрешностями правой и левой частей устанавливается на основе числа обусловленности

$$m_C = \|C^{-1}\| \cdot \|C\|, \quad (14)$$

позволяющего вычислить относительную погрешность решения системы методом Гаусса как

$$\Delta_C = O [2^{-t} m_C \dim(C)], \quad (15)$$

где t — число разрядов мантиссы в двоичном представлении чисел на ЭВМ с плавающей запятой. С целью проверки устойчивости решения СЛАУ пункт 4 алгоритма реализовывался двумя методами — методом Гаусса и методом QR-разложения, поскольку последний не зависит от (16). В ходе анализа подобия получены результаты, свидетельствующие о том, что для всех решений СЛАУ характерна полная идентичность результатов каждым из методов. В связи с этим предпочтительным является метод Гаусса, эффективный из-за меньшего объема вычислений. Следует отметить, что в рамках метода Гаусса использовались преобразования, позволяющие получить детерминант, равный 1, что автоматически исключает необходимость проверки условия (16). Они включали в себя построчную нормировку строк матрицы на

наибольшее значение элемента матрицы $\{C\}$ в строке, после чего матрица приводилась к треугольному виду. В связи с этим точность ВЭ при $t = 53$ составила 10^{-13} .

Поскольку для трещины отрыва из [3] известно аналитическое решение задачи в виде

$$D_n^{(1)}(x) = \frac{-4u_n^0}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{x}{L-x}} \right) \right], \quad (16)$$

то в дальнейшем будем именовать его аналитическим решением Черепанова.

Используя формулу (11), нетрудно получить аналитическое выражение для КИН 1-го рода в виде

$$K_I^{(1)} = \frac{\sqrt{2}Gu_n^0}{\sqrt{\pi L}(1-\nu)}, \quad (17)$$

В таблице 1 представлены численные значения (17).

Таблица 1

Численные значения нормальных раскрытий

x , мм	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9.5
D_n , мкм	-1.978	-1.725	-1.54	-1.379	-1.226	-1.081	-0.931	-0.769	-0.585	-0.332

На рис. 2 представлены графики функции $|D_n(x)|$ (решение Черепанова и численное решение МРС).

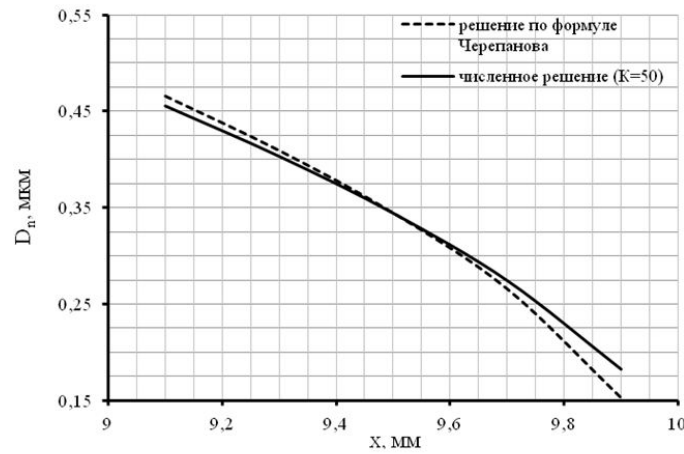


Рис. 2. Нормальное раскрытие зияющей части трещины

В рамках вычислительного эксперимента (ВЭ) варьировалась длина основной трещины. Исходя из анализа полученных данных при разных значениях длины установлено, что влияние длины основной трещины b на распределение нормальных раскрытий ничтожно мало при $b \geq 10L_0$ [9]. Таким образом, в следующих ВЭ можно ограничиться условием

$$b \leq 10L_0. \quad (18)$$

В работе [10] установлено, что существует подобие между нормальными смещениями для “первой задачи” Черепанова и сдвиговыми для задачи у которой на берегах основной части трещины заданы касательные смещения с тем же знаком. Результаты расчетов показывают,

что касательные смещения совпадают по величине и знаку с нормальными во всех точках на берегах трещины с погрешностью. Из установленного подобия в модели трещины смешанного типа функцию сдвигового раскрытия берегов можно записать, подобно (17), в виде

$$D_s^{(1)}(x) = \frac{u_s^0}{u_n^0} D_n^{(1)}(x). \quad (19)$$

Тогда по формуле (12) КИН 2-го рода, подобно (17), запишется как

$$K_{II}^{(1)} = \frac{u_s^0}{u_n^0} K_I^{(1)}. \quad (20)$$

Постановка задачи в условиях сжатия берегов трещины

$$u_n^0 = -U_0, \quad \sigma_n^0 = \sigma_0 \quad (21)$$

и ее решение рассмотрено в работах [11], [12]. Решение подобной задачи имеется в [3] и представлено в виде суммы

$$D_n^{(2)}(x) = D_n^{(1)}(x) + D_n^{(\sigma)}(x), \quad (22)$$

$$D_n^{(\sigma)}(x) = \frac{2(1-\nu)\sigma_n^0}{G} \sqrt{x(L-x)}. \quad (23)$$

Численные значения (24) представлены в таблице 2.

Таблица 2

Численные значения нормальных раскрытий ($\sigma_n^0 > 0$)

$x, \text{ мм}$	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9.5
$D_n, \text{ мкм}$	-2.029	-1.749	-1.547	-1.375	-1.216	-1.063	-0.909	-0.747	-0.564	-0.318

На рис. 3 представлены графики функции в условиях (23).

По формуле (11) при вычислении предела получим выражение КИН 1-го рода в виде

$$K_I^{(2)} = K_I^{(1)} - q_n, \quad q_n = \sqrt{\frac{\pi L}{2}} \sigma_n^0. \quad (24)$$

В результате численного решения установлено подобие между нормальными смещениями для задачи с краевыми условиями

$$u_n^0 = U_0, \quad \sigma_n^0 = \sigma_0 \quad (25)$$

и сдвиговыми для задачи с краевыми условиями

$$u_s^0 = U_0, \quad \sigma_s^0 = \sigma_0. \quad (26)$$

Согласно полученным данным, нормальные раскрытия совпадают по величине и знаку с касательными во всех точках на берегах трещины с погрешностью.

Из установленного подобия в модели трещины смешанного типа функцию сдвигового раскрытия берегов можно записать подобно, (24), т. е.

$$D_s^{(2)}(x) = D_s^{(1)}(x) + D_s^{(\sigma)}(x) \quad (27)$$

$$D_s^{(\sigma)}(x) = \frac{\sigma_s^0}{\sigma_n^0} D_n^{(\sigma)}(x). \quad (28)$$

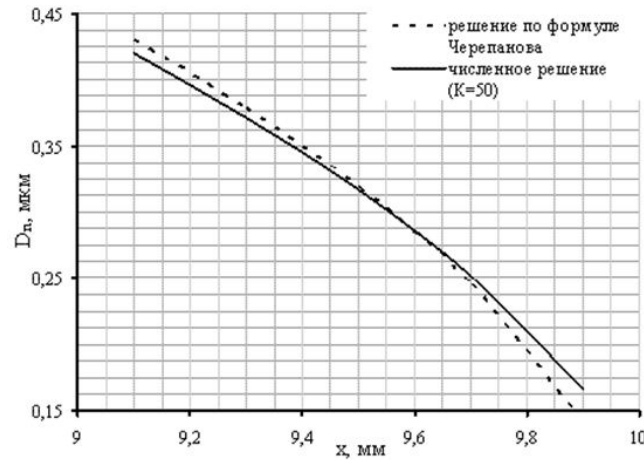


Рис. 3. Нормальное раскрытие зияющей части трещины

Результаты ВЭ для (27) представлены в работе [12]. Обращаясь к формуле (12), КИН 2-го рода, подобно (27), запишется как

$$K_{II}^{(2)} = K_{II}^{(1)} - q_s, \quad q_s = \frac{\sigma_s^0}{\sigma_n^0} q_n. \quad (29)$$

Постановка задачи с граничными условиями растяжения берегов трещины

$$u_n^0 = U_0, \quad \sigma_n^0 = \sigma_0 \quad (30)$$

и ее решение рассмотрено в работе [13]. В работе [3] приведено решение подобной задачи, где нормальное раскрытие зияющей трещины в аналитическом виде определено формулой (24). В таблице 3 представлены численные значения аналитического решения Черепанова [13].

Таблица 3

Численные значения нормальных раскрытий (\$\sigma_n^0 < 0\$)

\$x\$, мм	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9.5
\$D_n\$, мкм	-2.081	-1.835	-1.652	-1.491	-1.337	-1.184	-1.025	-0.852	-0.651	-0.371

На рис. 4 представлены графики функции для задачи в условиях (29). Поведение кривых аналогично показанным на рис. 2–3.

Характер поведения нормальных разрывов, полученных по аналитической формуле Черепанова и с помощью метода разрывных сечений (рис. 2–4), характеризует полное совпадение решений на расстоянии 0.02L–0.04L от вершины трещины и образование перекрещивающихся гладких кривых.

По аналогии с (27) смена знака напряжения приводит к выражению

$$K_I^{(3)} = K_I^{(1)} + q_n. \quad (31)$$

На рис. 5 представлены графики КИН как функции нормальных смещений и нормальных напряжений, полученных из (17) (линия “а”), (27) (линия “б”) и (31) (линия “в”) для трещины в песчанике, имеющие критические КИН

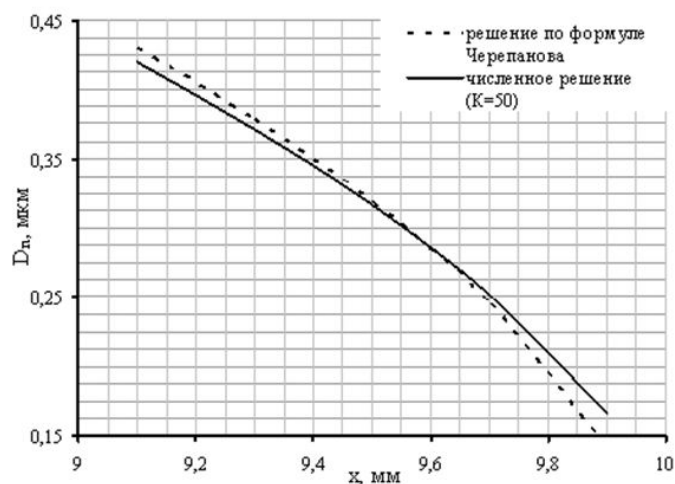


Рис. 4. Нормальное раскрытие зияющей части трещины

$$K_{Ic} = 2.15 \cdot 10^6 \text{ Н} / \text{м}^{3/2}, \quad K_{IIc} = 4.3 \cdot 10^6 \text{ Н} / \text{м}^{3/2}. \quad (32)$$

Критическим при $K_I^{(1)} = K_{Ic}$ является смещение величиной 16.345 мкм (точка пересечения всех линий на рис. 5), которое не зависит от величины напряжения. Зоны развития трещины находятся в секторах I–III, зоны стагнации – в остальных. Областью критических смещений на линии уровня $K_I^{(2)} = K_{Ic}$ является наклонная прямая “б”, разделяющая зоны развития (II–IV) и зоны стагнации (I, V, VI) на две полуплоскости. Областью критических смещений при $K_I^{(2)} = K_{Ic}$ является наклонная прямая “в”, разделяющая зоны развития (I, II, VI) и зоны стагнации (III–V) также на две полуплоскости. Общей зоной развития для всех является зона II, а зоной стагнации – зона V.

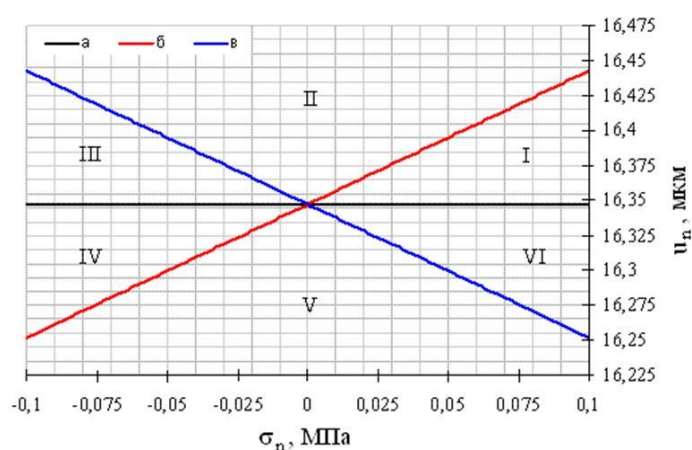


Рис. 5. График функций $u_n = f(\sigma_n, K_{Ic})$

Выводы.

Получен ряд численных решений плоских задач теории трещин при различных комбинациях смешанных граничных условий, заданных в смещениях и напряжениях.

Создан алгоритм численно-аналитического решения краевых задач теории трещин в смешанной постановке.

Образованы аналитические выражения раскрытий берегов трещины с помощью аппроксимирующих полиномов, зависящих от определяющих констант краевых условий задачи.

Построены аналитические выражения КИН 1-го и 2-го рода, соответствующие различным комбинациям смешанных граничных условий.

Определены положения зон развития и стагнация трещины для рассмотренных задач.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Садовский, М. А. Естественная кусковатость горной породы / М. А. Садовский // Докл. АН СССР. 1979. – Т. 247. – № 4. – С. 829–831.
- [2] Партон, В. З. Механика разрушения : От теории к практике / В. З. Партон. – М. : Наука, 1990. – 240 с.
- [3] Черепанов, Г. П. Механика разрушения горных пород в процессе бурения. – М. : Недра, 1987. – 308 с.
- [4] Черепанов, Г. П. Механика хрупкого разрушения. – М. : Наука, 1974. – 640 с.
- [5] Полкунов, Ю. Г. Математическое моделирование разрушения упругой плоскости полубесконечными разрезами с зияющими трещинами / Ю. Г. Полкунов, Е. В. Спиридонова // Вестник Оренбургского государственного университета. – 2008. – № 5. – С. 111–114.
- [6] Линьков, А. М. Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости / А. М. Линьков. – СПб. : Наука, 1999. – 382 с.
- [7] Спиридонова, Е. В. Численное моделирование раскрытий берегов трещины смешанного типа : прикладная программа / Е. В. Спиридонова, С. В. Белобородова. Свидетельство о регистрации программного средства № 706 от 29.12.2011.
- [8] Самарский, А. А. Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М. : Наука, 1989. – 432 с.
- [9] Полкунов, Ю. Г. Математическая модель расклинивания материала с различной длиной основной и зияющей трещины / Ю. Г. Полкунов, Е. В. Спиридонова // Вестник Оренбургского государственного университета. – 2010. – № 9. – С. 55–58.
- [10] Полкунов, Ю. Г. Математическое моделирование разрушения упругой плоскости полубесконечными разрезами с зияющими трещинами / Ю. Г. Полкунов, Е. В. Спиридонова // Вестник Оренбургского государственного университета. – 2008. – № 5. – С. 111–114.
- [11] Полкунов, Ю. Г. Численное определение коэффициентов интенсивности напряжений в задачах со смешанными краевыми условиями / Ю. Г. Полкунов, Е. В. Спиридонова // Вестник СамГУ. Естественная серия. – 2009. – № 6 (72). – С. 118–129.
- [12] Полкунов, Ю. Г. Численные методы вычисления критериев роста трещин в смешанных задачах теории упругости / Ю. Г. Полкунов, Е. В. Спиридонова // Вестник Оренбургского государственного университета. – 2008. – № 11. – С. 127–131.
- [13] Спиридонова, Е. В. Определение коэффициентов интенсивности напряжений при смешанном типе нагружения трещины / Е. В. Спиридонова // Сборник трудов международной конференции “Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики” (часть 2). – Воронеж : ПЦ ВГУ, 2009. – С. 182–189.

Спиридонова Екатерина Владимировна,

старший преподаватель кафедры математического анализа, Оренбургский государственный университет, г. Оренбург

e-mail: nailyak1975@gmail.com

E. V. Spiridonova

THE NUMERICAL AND ANALYTICAL SOLUTION OF FLAT TASKS OF THE THEORY OF CRACKS IN THE MIXED STATEMENT

Orenburg State University, Orenburg

Abstract. In this paper we present a numerical-analytical solution of plane problems of disclosure shores planar crack with mixed boundary conditions. The decision by one of the boundary element method - the method of discontinuous displacements. Normal and shear disclosure shores of the gaping cracks approximated functional dependencies by using the method of least squares. The analytical expression of the stress intensity factors of the 1st and 2nd kind in the form of limiting relations based on discontinuous displacements. The positions of development zones and stagnation cracks on the basis of power criterion of brittle fracture of continuous media with a crack.

Keywords: gaping crack, mixed boundary conditions, the stress intensity factors of the 1st and 2nd kind, assessment of the development of the crack.

REFERENCES

- [1] *Sadovsky, M. A.* Natural rock lumpiness / M. A. Sadovsky // Dokl. USSR Academy of Sciences. – 1979. – Vol. 247. – № 4. – P. 829–831. (in Russian)
- [2] *Parton, V. Z.* Fracture Mechanics: From theory to practice / V. Z. Parton. – M. : Nauka, 1990. – 240 p. (in Russian)
- [3] *Cherepanov, G. P.* Fracture Mechanics of rocks during drilling / G. P. Cherepanov. – M. : Nedra, 1987. – 308 p. (in Russian)
- [4] *Cherepanov, G. P.* Mechanics of brittle fracture / G. P. Cherepanov. – M. : Nauka, 1974. – 640 p. (in Russian)
- [5] *Polkunov, Y. G.* Mathematical modeling of the destruction of the elastic semi-infinite plane cuts with gaping cracks / Y. G. Polkunov, E. V. Spiridonova // Vestnik OSU. – 2008. – № 5. – P. 111–114. (in Russian)
- [6] *Linkov, A. M.* Complex method of boundary integral equations of the theory of elasticity / A. M. Linkov. – SPb. : Science, 1999. – 382 p. (in Russian)
- [7] *Spiridonova, E. V.* The application program "Numerical simulation of crack disclosures of mixed type" / E. V. Spiridonov, S. Beloborodova. The certificate of registration software tool №706 from 29.12.2011. (in Russian)
- [8] *Samarski, A. A.* Numerical methods / A. A. Samarski, A. V. Gulin. – M. : Nauka, 1989. 432 p. (in Russian)
- [9] *Polkunov, Y. G.* Mathematical model of wedging material with different length of the basic and gaping cracks / Y. G. Polkunov, E. V. Spiridonova // Vestnik OSU. – 2010. – № 9. – P. 55–58. (in Russian)
- [10] *Polkunov, Y. G.* Mathematical modeling of the destruction of the elastic semi-infinite plane cuts with gaping cracks / Y. G. Polkunov, E. V. Spiridonova // Vestnik OSU. – 2008. – № 5. – P. 111–114. (in Russian)
- [11] *Polkunov, Y. G.* Numerical determination of the stress intensity factors in problems with mixed boundary conditions / Y. G. Polkunov, E. V. Spiridonova // Vestnik of SSU (Natural Science Series). – 2009. – № 6 (72). – P. 118–129. (in Russian)
- [12] *Polkunov, Y. G.* Numerical methods for calculating the criteria of crack growth in mixed problems of elasticity / Y. G. Polkunov, E. V. Spiridonova // Vestnik OSU. – 2008. – № 11. – P. 127–131. (in Russian)
- [13] *Spiridonova, E. V.* Determination of stress intensity factors at the crack mixed type of loading / E. V. Spiridonova // Proceedings of the international conference "Actual problems of