

А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, Г. Л. Панченко

ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ В ПЛОСКОМ СЛОЕ ПРИ УЧЕТЕ РАЗОГРЕВА ЗА СЧЕТ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И ТРЕНИЯ НА ГРАНИЦЕ

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН

Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН

Владивостокский государственный университет экономики и сервиса

Аннотация. В статье представлено решение связанной задачи термоупругопластичности о развитии течения в плоском слое материала, находящегося в условиях нарастающего чистого сдвига, и последующем торможении течения при медленном снятии нагрузки. Теплофизические и деформационные процессы взаимосвязаны, предел текучести зависит от температуры. В качестве дополнительного источника тепла принимается его производство за счет трения материала слоя о граничную шероховатую плоскость. Найдены условия зарождения вязкопластического течения, закономерности продвижения по слою упругопластических границ, рассчитаны скорости течения, большие деформации, как необратимые, так и обратимые. Рассмотрено торможение течения при уменьшении нагружающих усилий с последующим остыванием материала слоя.

Ключевые слова: упругость, пластичность, вязкость, теплопроводность, большие деформации.

УДК: 539.374

Известно [1], что штампуемый материал выплавляемой модели, основное содержание которого составляет парафино-стеариновая смесь, пластически деформируется в пристеночных областях пресс-формы, нагревается до оплавления, заполняя ее конструктивные вогнутости, а после этого застывает, формируя упрочненный приповерхностный слой. Подобные эффекты присущи штамповке в порошковой металлургии. В таких процессах деформации, приобретаемые материалами, большие, наряду с упругими свойствами материалов необходимо учитывать пластические, а в областях течения и вязкие. При этом деформирование и трение о жесткие стенки вызывает заметный разогрев материала. Таким образом, соответствующая задача математического моделирования оказывается задачей теории больших деформаций сред с упругими, пластическими и вязкими свойствами, в которой предел текучести зависит от температуры, а деформирование, тепловыделение и теплопередача не разделяются. Постановок и решений задач, включающих в себя все отмеченные деформационные и теплофизические особенности, теория больших деформаций до настоящего времени не содержит. С целью модельно оценить процессы, происходящие в материале при штамповке выплавляемых моделей для соответствующего литья, рассмотрим простейшую модельную задачу данного класса

Поступила 12.10.2014

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания вузам на выполнение НИР (№ 2014/292) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 13-01-00283).

о чистом сдвиге, но с учетом таких эффектов. Сформулируем задачу в форме квазистатического процесса при меняющейся со временем внешней нагрузке так, как это происходит при технологической операции: разогрев и течение возникают и развиваются, затем течение замедляется и, наконец, материал остывает.

1. Пусть в пространстве с декартовой системой прямоугольных координат слой материала заполняет область $0 \leq x_2 \leq h$ (h – толщина слоя). С одной стороны он ограничен жесткой шероховатой плоскостью $x_2 = 0$, другая его граничная плоскость $x_2 = h$ нагружена

$$\sigma_{12}|_{x_2=h} = \zeta t, \quad \sigma_{22}|_{x_2=h} = a_0.$$

Здесь σ_{12} и σ_{22} – компоненты тензора напряжений Эйлера-Коши, t – время, ζ , a_0 – задаваемые постоянные. Считаем, что в последующие за $t = 0$ моменты времени материал слоя обратимо деформируется при отсутствии перемещений на границе $x_2 = 0$ до тех пор, пока слой удерживается за счет трения

$$\sigma_{21} < f |\sigma_{22}| \quad \text{при} \quad x_2 = 0,$$

f – коэффициент трения. Полагаем, что $a_0 < k_0 f^{-1}$ (k_0 – предел текучести при комнатной температуре), т.е. процесс скольжения начинается раньше пластического течения в момент времени $t = t_* = a_0 f \zeta^{-1}$. При $t > t_*$ условие прилипания заменяется законом трения скольжения

$$(\sigma_{12} - f |\sigma_{22}| - \xi v)|_{x_2=0} = 0, \tag{1}$$

где ξ – коэффициент вязкого трения, $v = v_1(x_2, t)$ – скорость точек среды. Трение скольжения вызовет разогрев слоя на его граничной плоскости $x_2 = 0$. Для формирующегося поля температур принимаем условия

$$\theta = \frac{T}{T_0} - 1 = \theta(x_2, t), \quad \theta(x_2, t_*) = 0, \quad \theta(0, t) = \gamma \phi(t), \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \right|_{x_2=h} = 0. \tag{2}$$

Здесь T_0 , T – комнатная и текущая абсолютная температура, $\phi(t) = u(0, t)$ – перемещение на границе слоя, γ – постоянная теплопроизводства за счет трения. Нагружаемую границу слоя $x_2 = h$ полагаем теплоизолированной, а производство тепла за счет трения таким, чтобы температура границы $x_2 = 0$ росла пропорционально смещениям трущихся поверхностей. Такие смещения отождествляем с перемещениями точек граничной плоскости, так как $\phi(t)$ считается далее монотонной.

Продолжающееся нагружение в условиях повышения температуры приведет к зарождению и развитию вязкопластического течения в окрестности подложки, и, следовательно, к большим деформациям материала в области развитого течения. Конкретизацию теплофизических и механических свойств материала слоя проведем в рамках модели больших упруго-пластических деформаций, построенной в [2] и обобщенной на неизотермический случай [3] и на случай учета вязкости при пластическом течении [4]. В полном объеме модель подробно

описана в [5]. Считаем, что материал слоя несжимаем, тогда

$$\begin{aligned}
\frac{Dm_{ij}}{Dt} &= \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p - \frac{1}{2} \left((\varepsilon_{ik} - \varepsilon_{ik}^p + z_{ik})m_{kj} + m_{ik}(\varepsilon_{kj} - \varepsilon_{kj}^p - z_{kj}) \right), \\
\frac{Dp_{ij}}{Dt} &= \varepsilon_{ij}^p - p_{ik}\varepsilon_{kj}^p - \varepsilon_{ik}^p p_{kj}, \quad m_{ij} = e_{ij} + \alpha(T - T_0)\delta_{ij}, \\
d_{ij} &= m_{ij} + p_{ij} - \frac{1}{2}m_{ik}m_{kj} - m_{ik}p_{kj} - p_{ik}m_{kj} + m_{ik}p_{ks}m_{sj}, \\
\sigma_{ij} &= -P\delta_{ij} + \frac{1}{1 + 3\alpha(T - T_0)} \frac{\partial W}{\partial d_{ik}} (\delta_{kj} - 2d_{kj}) \quad \text{при } p_{ij} \equiv 0, \\
\sigma_{ij} &= -P_1\delta_{ij} + \frac{1}{1 + 3\alpha(T - T_0)} \frac{\partial W}{\partial m_{ik}} (\delta_{kj} - m_{kj}) \quad \text{при } p_{ij} \neq 0, \\
\varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}), \quad v_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_{i,j}v_j, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \\
r_{ij} &= \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}) + z_{ij}(\varepsilon_{sk}, m_{sk}), \quad \frac{Dn_{ij}}{Dt} = \frac{dn_{ij}}{dt} - r_{ik}n_{kj} + n_{ik}r_{kj}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $\varepsilon_{ij}^p, d_{ij}$ – компоненты тензоров скоростей пластических деформаций и полных деформаций Альманси, α – коэффициент линейного расширения, P, P_1 – гидростатические давления. Требование неизменности тензора необратимых деформаций p_{ij} при термоупругом деформировании и при разгрузке приводит к объективной производной по времени определенного вида. В (3) она записана для произвольного симметричного тензора с компонентами n_{ij} . Кососимметричный тензор z_{ij} в [2, 5] выписан полностью. Полагая материал слоя изотропным, упругий потенциал W зададим в форме

$$\begin{aligned}
W &= -2\mu J_1 - \mu J_2 + bJ_1^2 + (b - \mu)J_1 J_2 - \chi J_1^3 + \nu_1 J_1 \theta + \nu_2 \theta^2 - \\
&- \nu_3 J_1 \theta^2 - \nu_4 J_1^2 \theta - \nu_5 J_2 \theta - \nu_6 \theta^3 + \dots, \quad J_1 = d_{kk}, \quad J_2 = d_{ik}d_{ki}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Зависимость (4) записана для случая $p_{ij} \equiv 0$, μ – модуль сдвига, b, χ, ν_m ($m = 1, 2, \dots, 6$) – термомеханические постоянные. При $p_{ij} \neq 0$ следует считать $J_1 = I_1 = c_{kk}, J_2 = I_2 = c_{ik}c_{ki}$, где $c_{ij} = m_{ij} - 0,5m_{ik}m_{kj}$. В случае изотермического деформирования ($\theta \equiv 0$) имеем $m_{ij} = e_{ij}$, тогда тензор с компонентами $e_{ij} - 0,5e_{ik}e_{kj}$ следует называть тензором упругих деформаций. В качестве условия пластичности будем использовать следующее обобщение функции нагружения Треска

$$\begin{aligned}
F(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) &= \max |\sigma_i - \sigma_j| - 2k + 2\eta \max |\varepsilon_k^p| = 0, \\
\varepsilon_{ij}^p &= \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \lambda > 0, \quad k = k_0 \left(1 - \frac{\theta^2}{\theta_{pl}^2} \right),
\end{aligned} \tag{5}$$

где $\sigma_i, \varepsilon_i^p$ – главные значения тензоров напряжений и скоростей пластических деформаций, η – коэффициент вязкости, θ_{pl} – температура плавления материала. Принимая закон теплопроводности Фурье, согласно уравнению баланса энтропии получаем уравнение теплопроводности вида

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{\beta_1}{\nu_2} \theta + \frac{\beta_2}{\nu_2} x_{jj} \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\beta_3}{\nu_2} y_{ji} x_{ij} &= q \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{l}{2\nu_2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^p, \\
\beta_1 &= \nu_2 (1 - 3\alpha T_0) - 3\nu_6, \quad \beta_2 = -\nu_3, \quad \beta_3 = -\nu_1 - \nu_5,
\end{aligned} \tag{6}$$

где q – коэффициент температуропроводности. Там, где деформирование обратимо, в (5) $x_{jj} = d_{jj}$, $y_{jj} = \varepsilon_{ij}$, $l = 0$; в области течения $x_{jj} = c_{jj}$, $y_{jj} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p$, $l = 1$; в области разгрузки $x_{jj} = c_{jj}$, $y_{jj} = \varepsilon_{ij}$, $l = 0$.

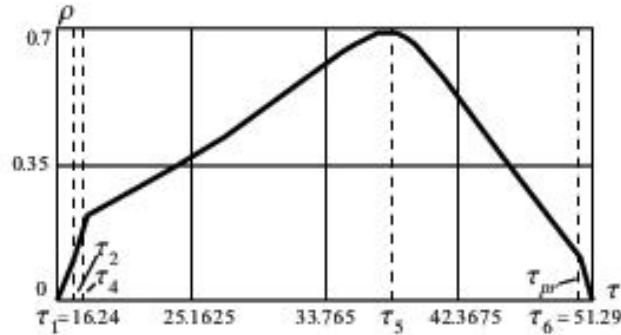


Рис. 1. Граница области вязкопластического течения

2. Как уже отмечалось, квазистатическое упругое равновесие слоя будет сохраняться до момента времени $t = t_*$, после которого начинается проскальзывание и разогрев. Во времена, следующие за t_* , получаем связанную задачу термоупругости. Поле температур, напряженно-деформированное состояние определяются при использовании (3) из уравнений равновесия их совместным решением с уравнением теплопроводности (5). Начальными условиями являются упругое равновесие в момент времени $t = t_*$ и $\theta(x_2, t_*) = 0$, краевыми условиями – соотношения (1), (2) и задаваемые условия нагружения. Решение задачи термоупругости, не содержащее дополнительных сложностей, будет справедливо до момента времени $t_1 > t_*$, когда начнет развиваться пластическое течение. Момент и место его зарождения находятся из полученного решения и условия (4), которое в данном случае имеет вид

$$(\sigma_{21} - k(\theta))|_{t=t_1, x_2=0} = 0. \quad (7)$$

С момента времени $t = t_1$ от границы $x_2 = 0$ развивается область течения, занимающая слой $0 \leq x_2 \leq r(t)$, $x_2 = r(t)$ – движущаяся по среде граница данной области, в слое $r(t) \leq x_2 \leq h$ материал деформируется обратимо. Положение упругопластической границы связывается с равенством нулю на ней скоростей пластических деформаций. Уравнение равновесия теперь следует проинтегрировать в двух областях отдельно; равенство (6), условия нагружения и условия непрерывности напряжений на упругопластической границе являются краевыми условиями. По найденному полю температур определяется кинематика течения и закон продвижения упругопластической границы. Интегрированием по времени найденных скоростей пластических деформаций при начальном условии $p_{ij}(t_1) = 0$ определяются компоненты необратимых деформаций p_{12} , p_{11} и p_{22} . После чего из (3) получаем дифференциальное уравнение для перемещения в области течения

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\zeta t}{\mu - l\theta} + 2p_{12}. \quad (8)$$

В области обратимого деформирования в (7) $p_{12} = 0$. Постоянная (функция времени) интегрирования определяется условием непрерывности перемещений на упругопластической границе.

Если далее с момента времени $t = t_2$ положить неизменным нагружающее усилие ($\sigma_{12}|_{x_2=h} = \zeta_1 t_2 = const$), то это порождает временную разгрузку среды: от плоскости

$x_2 = r(t_2)$ при $t \geq t_2$ отделяется новая упругопластическая граница $x_2 = r_1(t)$, продвигающаяся к плоскости скольжения. Однако в некоторый последующий момент времени $t = t_3$ движение данной границы меняет направление. В таком продвижении в момент времени $t = t_4$ она достигает плоскости $x_2 = r(t_2)$ и движется дальше к нагружаемой границе слоя. Таким образом, в промежутке времени $t_2 \leq t \leq t_3$ имеем три области, в которых процесс деформирования отвечает отличным друг от друга системам уравнений. В области $0 \leq x_2 \leq r_1(t)$ материал пластически деформируется, в области $r_1(t) \leq x_2 \leq r(t_2)$ деформирование обратимо, но в присутствии накопленных необратимых деформаций, область $r(t_2) \leq x_2 \leq h$ остается упругой. При $t \geq t_3$ таких областей остается две: область течения $0 \leq x_2 \leq r_1(t)$ и упругая область $r_1(t) \leq x_2 \leq h$. Для решения систем уравнений используются, как и ранее, краевые условия (2), условия непрерывности θ и $\partial\theta/\partial x_2$ на границах $r_1(t)$ и $r(t_2)$ и условие непрерывности θ при $t = t_2$.

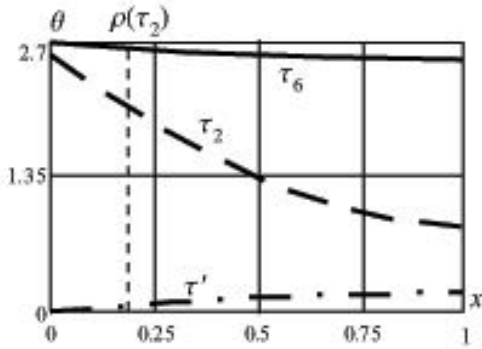


Рис. 2. Распределение температуры в разные моменты времени

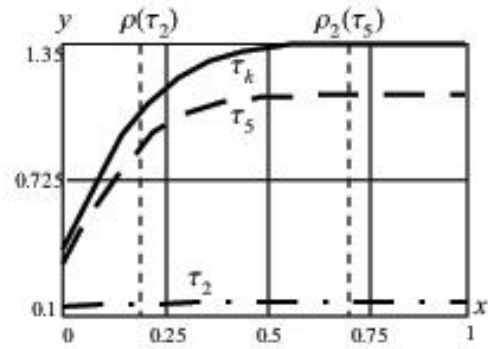


Рис. 3. Распределение перемещений в разные моменты времени

С момента времени $t = t_4$ рассматривается течение при уменьшающемся напряжении ($\sigma_{12}|_{x_2=h} = \zeta_1 t_2 - \zeta_2(t - t_4)$, $\zeta_2 > 0$) и разгрузка среды. Аналогично эффекту при постоянной нагрузке возникает новая граница $r_2(t)$, которая сначала движется от стационарной границы $r(t_4)$ к плоскости скольжения, затем меняет направление и движется вверх. В момент времени $t = t_5$ граница $r_2(t)$ перестает увеличиваться, т.е. вязкопластическое течение прекращается и появляется новая граница $r_3(t)$, движущаяся вниз от поверхности $r_2(t_5)$. В некоторый момент времени $t = t_{pr}$ вновь выполнится условие прилипания $\sigma_{12}|_{x_2=0} = f \sigma_{22}|_{x_2=0}$ и при дальнейшем уменьшении напряжения материал начнет остывать. В момент времени $t = t_6$ граница $r_3(t)$ достигнет нижнего края слоя $x_2 = 0$. После того, как при $t = t_7$ компонента тензора напряжений σ_{12} , а при $t' = t_{pr} + \gamma_1^{-1}$ температура θ станут равными нулю при $x_2 = 0$, дальнейшее охлаждение материала до конечного момента времени $t = t_k$ связано с заданием потока тепла на верхней границе слоя

$$\frac{\partial\theta}{\partial x_2} \Big|_{x_2=h} = \gamma_2 t, \quad \gamma_2 = const.$$

Иллюстрирующие решение графики приведены для значений: $f a_0 \mu^{-1} = 0,00005$, $\gamma h = 20$, $\mu q \zeta^{-1} h^{-2} = 1207,1429$, $\mu^2 (\xi \zeta h)^{-1} = 35 \cdot 10^4$, $\mu^2 (\eta \zeta)^{-1} = 2,8 \cdot 10^6$, $\beta_1 = 0,5$, $l \mu^{-1} = 0,01$, $\nu_2 \mu^{-1} = 0,02$, $\beta_3 = -0,5$, $k_0 \mu^{-1} = 0,00229796$, $\theta_{pl} = 2,68261$. Изменение упругопластической границы $\rho = r/h$ в зависимости от времени $\tau = \zeta t \mu^{-1}$ приведено на рис. . Распределения температуры θ и перемещений $y = u/h$ в процессе деформирования по слою $0 \leq x = x_2/h \leq 1$ показаны на рис. 2 и 3.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Сапченко, И. Г. Управление структурой и свойствами пористых комбинированных удаляемых моделей / И. Г. Сапченко, С. Г. Жилин, О. Н. Комаров. – Владивосток: Дальнаука, 2007. – 138 с.

[2] Буренин, А. А. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях / А. А. Буренин, Г. И. Быковцев, Л. В. Ковтанюк // Докл. РАН. – 1996. – Т. 347. – № 2. – С. 199–201.

[3] Ковтанюк, Л. В. Моделирование больших упругопластических деформаций в неизотермическом случае / Л. В. Ковтанюк // Дальневосточный математический журнал. – 2004. – Т. 5. – № 1. – С. 107–117.

[4] Ковтанюк, Л. В. О теории больших упругопластических деформаций материалов при учете температурных и реологических эффектов / Л. В. Ковтанюк, А. В. Шитиков // Вестн. ДВО РАН. – 2006. – № 4. – С. 87–93.

[5] Буренин, А. А. Большие необратимые деформации и упругое последствие / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк. – Владивосток: Дальнаука, 2013. – 312 с.

Буренин Анатолий Александрович,

член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре

e-mail: burenin@iacp.dvo.ru

Ковтанюк Лариса Валентиновна,

доктор физико-математических наук, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток

e-mail: lk@iacp.dvo.ru

Панченко Галина Леонидовна,

Владивостокский государственный университет экономики и сервиса, г. Владивосток

e-mail: panchenko.21@yandex.ru

A. A. Burenin, L. V. Kovtanyuk, G. L. Panchenko

VISCOPLASTIC FLOW IN A FLAT LAYER WITH ALLOWANCE FOR HEATING DUE TO DEFORMATION AND FRICTION AT THE BOUNDARY

Institute for Machine Engineering and Metallurgy of the Far Eastern Branch of Russian Academy of Science

Institute of Automation and Control Processes of Far Eastern Branch of Russian Academy of Science

Vladivostok State University Economics and Service

Abstract. The article presents a solution to the coupled problem of thermoelastoplasticity about development flow in a flat layer of material is in terms of increasing pure shear and subsequent deceleration of flow with slow removal of the load. Thermophysical and deformation processes are interrelated, the yield point depends on a temperature. As an additional source of heat taken its production due to the friction material layer on a rough plane boundary. Conditions for the birth of a viscoplastic flow and regularities propulsion on the layer of elastoplastic boundaries are found, flow rate, large deformation both reversible and irreversible are calculated. Braking current at reducing the biasing force followed by cooling of the material layer is considered.

Keywords: elasticity, plasticity, viscosity, thermal conductivity, large deformations.

REFERENCES

- [1] Sapchenko, I. G. Management of structure and properties of porous composite removable models / I. G. Sapchenko, S. G. Zhilin, O. N. Komarov. – Vladivostok: Dalnauka, 2007. – 138 p.
- [2] Burenin, A. A. A simple model of finite strain in an elastoplastic medium / A. A. Burenin, G. I. Bykovtsev, L. V. Kovtanyuk // Doklady Physics. – 1996. – Vol. 41. – I. 3. – P. 127–129.
- [3] Kovtanyuk, L. V. The modeling of elastoplastic deformations in the non-isothermal case / L. V. Kovtanyuk // Far Eastern Mathematical Journal – 2004. – Vol. 5. – I. 1. – P. 107–117.
- [4] Kovtanyuk, L. V. On the theory of large elastoplastic deformation of materials taking into account the temperature and the rheological effects / L. V. Kovtanyuk, A. V. Shitikov // Bulletin of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences – 2006. – I. 4. – P. 87–93.
- [5] Burenin, A. A. Large irreversible deformation and elastic aftereffect / A. A. Burenin, L. V. Kovtanyuk. – Vladivostok: Dalnauka, 2013. – 312 p.

Burenin Anatoly Aleksandrovich

Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Institute for Machine Engineering and Metallurgy of the Far Eastern Branch of Russian Academy of Science, Komsomolsk-on-Amur

Kovtanyuk Larisa Valentinovna

Dr. Sci. Phys. & Math., Institute of Automation and Control Processes of Far Eastern Branch of Russian Academy of science, Vladivostok

Panchenko Galina Leonidovna

Vladivostok State University Economics and Service, Vladivostok