Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 4 (22). С. 144–156

С. В. Белых[1], *К. С. Бормотин*[1], *А. А. Буренин*[2], *Л. В. Ковтанюк*[3], *А. Н. Прокудин*[2]

О БОЛЬШИХ ИЗОТЕРМИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ МАТЕРИАЛОВ С УПРУГИМИ, ВЯЗКИМИ И ПЛАСТИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ

[1] *Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет*

[2] *Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН*

[3] *Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН*

Аннотация. Предлагается математическая модель процессов деформирования материалов с упругими, вязкими и пластическими свойствами, способных приобретать большие деформации. Указаны возможные конкретизации модели с целью учета различных эффектов необратимого деформирования.

Ключевые слова: упругость, ползучесть, пластичность, большие деформации.

УДК: 539.374

Современное авиастроение при изготовлении деталей планеров вынуждено прибегать к технологиям формовки крупногабаритных, монолитных конструкционных элементов. К главным причинам, предопределившим данное обстоятельство и отказ от традиционных технологий, отнесем низкую технологичность последних и затратность по материалам. Более того, они приводят часто к недопустимому снижению в прочностных свойствах обрабатываемых материалов. В то же время холодная формовка за счет медленного режима ползучести оказывается [1], [2] наиболее перспективным технологическим процессом, сохраняющим прочностной ресурс материалов в условиях их интенсивного формоизменения.

Следует признать, что режимы холодной формовки, впрочем как и режимы традиционных технологий, не обходятся без возникновения локальных областей пластического течения, главным образом в местах воздействия оснасткой на деформируемые материалы. Возникновение областей течения как раз отрицательно сказывается на прочностных и деформационных свойствах формуемых материалов, в качестве которых чаще всего выступают высокопрочные алюминиевые сплавы. поэтому следует добиваться возможно большей ограниченности таких областей по объему. В то же время их наличие невозможно игнорировать при расчетном моделировании процесса интенсивного необратимого деформирования, поскольку они существенно влияют на уровень и распределение напряжений, следовательно, на процесс в целом. Это приводит к необходимости использовать в таком расчетном моделировании изотермические теории ползучести при одновременном учете возможностей возникновения и развития зон пластического течения. Связанные с интенсивным формоизменением технологические условия процесса не позволяют ограничиться только малыми деформациями. Следовательно, адекватной математической моделью для описания процессов типа холодной формовки может быть только теория больших деформаций материалов, обладающих как упругими, так и пластическими и вязкими свойствами. Таких моделей за более чем сорокалетнюю историю

Поступила 11.11.2014

[3] развития теории построено значительное количество [4], [5], [6], [7], [8], [9]. Обзор иностранных работ содержится в [10]. Здесь будем отталкиваться от модели упругопластических деформаций, предложенной в [7] и подробно описанной в [9]. Ее достоинство состоит в сохранении основных положений пластических теорий [11] деформирования упругопластических сред. Именно, пластические деформации не изменяются при обратимом деформировании, включая разгрузку; напряжения в среде полностью определяются уровнем и распределением упругих деформаций; разгрузочное состояние не зависит от пути разгрузки в пространстве напряжений. Принятие данных положений, которые могут опытно и не подтверждаться, существенно упрощает теорию настолько, что удается поставить и решить целый ряд краевых задач [12], [13], [14], [15], [16], включая получение точных решений.

Здесь, следуя основным идеям [7], [9], построим замкнутую модель больших деформаций, необратимые деформации в которой суммировались бы, последовательно накапливались в условиях ползучести, затем пластичности в условиях течения и снова ползучести при разгрузке. Таким образом необратимые деформации подразделяются на деформации ползучести и пластического течения только за счет механизма их производства. Полагаем, что для решения задач холодной формовки данный подход окажется наиболее перспективным.

Кинематика больших деформаций. Рассмотрим кинематику деформируемой среды, считая, что деформации ее могут быть и обратимыми, и необратимыми. Полагаем, что независимыми переменными являются пространственные координаты $x_i (i = 1, 2, 3)$ точек среды. Иначе, используем Эйлеров способ задания движения среды и для закона ее движения запишем:

$$a_i = a_i(x_1, x_2, x_3, t). \tag{1}$$

Здесь a_i – материальные координаты точки деформируемой среды (координаты Лагранжа), t – время. В качестве a_i принимаем координаты точек среды в ее свободном состоянии при $t = 0$.

Для компонент тензора дисторсии $a_{i,j} = \partial a_i / \partial x_j$ в используемой здесь прямоугольной декартовой системе координат имеем уравнения их изменения (переноса):

$$\begin{gathered}\frac{da_{i,j}}{dt} + a_{i,k} v_{k,j} = 0;\\ v_k = \frac{du_k}{dt} = \frac{\partial u_k}{\partial t} + v_m u_{k,m};\ u_k = x_k - a_k.\end{gathered} \tag{2}$$

Соотношениями (2) вводятся в рассмотрение координаты u_j, v_k векторов перемещений и скоростей точек среды соответственно. Для компонент тензора дисторсии и метрического тензора g_{ij} введем представление

$$\begin{gathered}a_{i,j} = Y_{i,k}(\delta_{kj} - e_{kj})\\ g_{ij} = a_{s,i} a_{s,j} = (\delta_{ik} - e_{ik})(\delta_{km} - 2p_{km})(\delta_{mj} - e_{mj}).\end{gathered} \tag{3}$$

Здесь δ_{ij} – компоненты единичного тензора (символы Кронекера).

Для тензора p_{ij} из (3) непосредственно следует:

$$p_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - Y_{m,i} Y_{m,j}).$$

Таким образом, введенный в (3) тензор с компонентами p_{ij} является симметричным $p_{ij} = p_{ji}$. Но тензор с компонентами e_{ij}, в общем случае представленный в (3), может и не быть симметричным; первое равенство из (3) не является полярным разложением тензора дисторсии. Исходя из (2) и (3), возможно записать уравнения изменения для введенных в (3) тензоров.

$$\frac{de_{ij}}{dt} = v_{i,j} - b_{ij} - e_{ik}v_{k,j} + b_{ik}e_{kj}$$
$$\frac{dp_{ij}}{dt} = \frac{1}{2}(b_{ij} + b_{ji}) - p_{ik}b_{kj} + b_{ki}p_{kj} \tag{4}$$
$$b_{ij} = -Y_{ik}^{-1}\frac{dY_{kj}}{dt}.$$

Потребуем теперь, чтобы тензор с компонентами e_{ij} был симметричным. Это возможно только при условии, следующем из (4):

$$b_{km}(\delta_{mj} - e_{mj}) - (\delta_{km} - e_{km})b_{mj} = (\delta_{km} - e_{km})v_{m,j} - v_{m,k}(\delta_{mj} - e_{mj}). \tag{5}$$

Таким образом, для симметрии $e_{ij} = e_{ji}$ тензора в (2) требуется выполнение условия (5). Иначе, тензор с компонентами b_{km} не может быть произвольным, а удовлетворять зависимостям (5), и только в этом случае $e_{ij} = e_{ji}$. Тензорное равенство (5) в таком случае следует рассматривать в качестве уравнения для b_{km}. Решением данного уравнения является [17]:

$$b_{ij} = r_{ij} + (\delta_{ik} - e_{ik})t_{kj}. \tag{6}$$

В решении (6) t_{kj} – компоненты произвольного, но симметричного тензора: $t_{kj} = t_{jk}$. Тензор с компонентами r_{ij} является кососимметричным $r_{ij} = -r_{ji}$ и для него

$$r_{ij} = w_{ij} + A^{-1}[B^2(\varepsilon_{ik}e_{kj} - e_{ik}\varepsilon_{kj}) + B(\varepsilon_{ik}e_{km}e_{mj} - e_{ik}e_{km}\varepsilon_{mj}) + e_{ik}\varepsilon_{km}e_{mn}e_{nj} - e_{ik}e_{km}\varepsilon_{mn}e_{nj}]$$
$$v_{i,j} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) - \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}) = \varepsilon_{ij} + w_{ij}$$
$$A = 8 - 8E_1 + 3E_1^2 - E_2 - \frac{1}{3}E_1^3 + \frac{1}{3}E_3;\ B = 2 - E_1;$$
$$E_1 = e_{jj}; E_2 = e_{ij}e_{ji}; E_3 = e_{ij}e_{jk}e_{ki}. \tag{7}$$

Зависимости (6) и (7) дают возможность переписать уравнения (4) изменения компонент e_{ij} и p_{ij} в форме

$$\frac{de_{ij}}{dt} = \varepsilon_{ij} - t_{ij} - r_{ij} + w_{ij} - e_{ik}(\varepsilon_{kj} + w_{kj} - t_{kj}) + (r_{ik} + t_{ik})e_{kj} - e_{im}t_{mk}e_{kj}$$
$$\frac{dp_{ij}}{dt} = t_{ij} - \frac{1}{2}(e_{ik}t_{kj} + t_{ik}e_{kj}) + (r_{ik} - t_{ik})p_{kj} - p_{ik}(r_{kj} + t_{kj}) + p_{ik}e_{km}t_{mj} + t_{im}e_{mk}p_{kj}. \tag{8}$$

Положим в (6) компоненты произвольного симметричного тензора t_{ij} равными нулю. Тогда уравнения переноса (8) упрощаются:

$$\frac{de_{ij}}{dt} = \varepsilon_{ij} + w_{ik}e_{kj} - e_{ik}w_{kj} - \frac{1}{2}(e_{ik}\varepsilon_{kj} + \varepsilon_{ik}e_{kj}) + \frac{1}{2}(z_{ik}e_{kj} + e_{ik}z_{kj})$$
$$\frac{dp_{ij}}{dt} = w_{ik}p_{kj} - p_{ik}w_{kj} + z_{ik}p_{kj} - p_{ik}z_{kj} \tag{9}$$
$$z_{ij} = r_{ij} - w_{ij}.$$

Если бы среда не деформировалась, то $\varepsilon_{ij} \equiv 0$, а из (7) следовало бы, что $z_{ij} = 0$. Тогда из второго равенства (9) вытекало бы, что производная Яумана от тензора с компонентами p_{ij} равна тождественно нулю и данные компоненты изменяются так же, как если среда двигалась бы как жесткое целое. Но присутствие двух последних слагаемых во втором соотношении (9), отличающих его от объективной производной p_{ij} по времени в смысле Яумана, не меняют существа этого вывода, меняя только саму объективную производную.

$$\frac{Dp_{ij}}{Dt} = \frac{dp_{ij}}{dt} - r_{ik}p_{kj} + p_{ik}r_{kj} = 0. \qquad (10)$$

В отличие от производной Яумана в (10) вместо тензора вращений с компонентами w_{ij} используется другой кососимметричный тензор ($r_{ij} = -r_{ji}$), компоненты r_{ij} которого в своей главной линейной части совпадают с w_{ij}. Согласно (10) изменяются компоненты p_{ij} при неизменном в целом данном тензоре. Это обстоятельство предоставляет возможность отождествить компоненты p_{ij} с необратимыми деформациями, а случай с $t_{ij} \equiv 0$ считать процессом обратимого деформирования. При этом необратимые деформации в среде могут присутствовать, но изменяться в соответствии с (10), то есть так, как если бы среда двигалась как жесткое целое, не изменяя тензор необратимых деформаций. Наличие двух последних слагаемых во втором равенстве из (9) связано с геометрической корректностью в «выборе» объективной производной [5] с тем, чтобы тензор необратимых деформаций с компонентами p_{ij} не менялся в случае обратимого деформирования $t_{ij} \equiv 0$. Заметим, что обратимое деформирование таким образом полностью кинематически определено, поскольку оно продолжается в течение такого промежутка времени, когда неизвестный до сих пор тензор остается нулевым ($t_{ij} \equiv 0$). Тогда же, когда необратимые деформации накапливаются, компоненты произвольного симметричного тензора t_{ij} обязаны быть определены из других условий. Заметим, наконец, что компоненты d_{ij} полных деформаций Альманси, следуя (2), (3), вычисляются через зависимости:

$$d_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - g_{ij}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j}) = e_{ij} + p_{ij} - \frac{1}{2}e_{ik}e_{kj} - e_{ik}p_{kj} - p_{ik}e_{kj} + e_{ik}p_{km}e_{mj}. \qquad (11)$$

Согласно (11) при признании p_{ij} необратимыми деформациями в качестве обратимых деформаций следует считать $s_{ij} = e_{ij} - 0.5e_{ik}e_{kj}$.

Определяющие законы. Рассмотрим первоначальный случай, когда необратимые деформации в среде не накапливаются, то есть в случае обратимого деформирования. Исходим из закона сохранения энергии, который запишем в форме:

$$\rho\frac{de}{dt} + q_{j,j} = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}. \qquad (12)$$

Здесь ρ – плотность среды, e – плотность распределения внутренней энергии, q_i – компоненты вектора потока тепла, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений.

Рассматривая медленные процессы, в качестве термодинамического потенциала будем использовать свободную энергию, для плотности распределения Ψ которой имеем:

$$\begin{gathered} \Psi(e_{ij}, T) = e(e_{ij}, s) - sT; \\ \frac{\partial\Psi}{\partial T} = -s; \frac{\partial e}{\partial s} = T, \end{gathered} \qquad (13)$$

где T – температура, s – плотность распределения энтропии. В (13) принимается гипотеза о том, что термодинамические потенциалы деформирования задаются лишь консервативным механизмом деформирования, а диссипативный механизм полностью ответственен за производство энтропии. Иными словами, полагаем, что Ψ не зависит от необратимых деформаций.

Подстановка (13) в (14) приводит к соотношению:

$$\rho(\frac{\partial\Psi}{\partial e_{ij}}\frac{de_{ij}}{dt} + T\frac{dS}{dt}) + q_{i,j} - \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = 0. \qquad (14)$$

Исключив из (14) производные деформаций с помощью первого равенства из (9), его можно переписать в виде:

$$
\begin{gathered}
(\rho(\frac{\partial\Psi}{\partial e_{ij}}-\frac{\partial\Psi}{\partial e_{ik}}e_{kj}+A^{-1}B^2(e_{ik}\frac{\partial\Psi}{\partial e_{km}}e_{mj}-\frac{\partial\Psi}{\partial e_{ik}}e_{km}e_{mj})+\\
A^{-1}B(e_{ik}e_{km}\frac{\partial\Psi}{\partial e_{mn}}e_{nj}-\frac{\partial\Psi}{\partial e_{ik}}e_{km}e_{mn}e_{nj})+A^{-1}(e_{ik}e_{km}\frac{\partial\Psi}{\partial e_{mn}}e_{nt}e_{tj}-e_{ik}\frac{\partial\Psi}{\partial e_{km}}e_{mn}e_{nt}e_{tj}))\sigma_{ij})\varepsilon_{ij}\\
+\rho r_{ij}(e_{ik}\frac{\partial\Psi}{\partial e_{kj}}-\frac{\partial\Psi}{\partial e_{ik}}e_{kj})+\rho T\frac{dS}{dt}+q_{i,j}=0.
\end{gathered}
\tag{15}
$$

Отсюда в силу независимости процессов, задаваемых e_{ij}, r_{ij} и T, учитывая симметрию тензора напряжений, получаем:

$$
\begin{gathered}
\sigma_{ij}=\rho\frac{\partial\Psi}{\partial e_{ik}}(\delta_{kj}-e_{kj})\\
\rho T\frac{dS}{dt}+q_{i,j}=0.
\end{gathered}
\tag{16}
$$

Первое соотношение из (16) представляет собой аналог известной в нелинейной теории упругости [17] формулы Мурнагана, второе – уравнение баланса энтропии в условиях обратимого деформирования. В областях, где необратимые деформации отсутствуют ($p_{ij}\equiv 0$), формула Мурнагана принимает классическую форму записи:

$$
\begin{gathered}
\sigma_{ij}=\rho\frac{\partial\Psi}{\partial d_{ik}}(\delta_{kj}-2d_{kj})\\
d_{ij}=e_{ij}-\frac{1}{2}e_{ik}e_{kj}.
\end{gathered}
\tag{17}
$$

Таким образом, напряжения через деформации вычисляются либо зависимостью (17) при отсутствии необратимых деформаций, либо первым соотношением из (16), когда необратимые деформации в среде присутствуют. При этом конкретные деформационные свойства среды обязаны определять задание конкретной функции $\Psi=\Psi(e_{ij},T)$ или, в случае отсутствия необратимых деформаций, – функции $\Psi=\Psi(d_{ij},T)$. Данные функции обязаны совпадать при p_{ij}, стремящемся к нулю. Важно подчеркнуть, что формула Мурнагана задает напряжения в среде в зависимости только от обратимых деформаций, и это справедливо также и тогда, когда необратимые деформации изменяются.

Такое положение вполне аналогично классическому случаю упругопластической среды в математических моделях типа Прандтля-Рейса [11], [18]. В нашем случае задание напряжений уровнем и распределением обратимых деформаций является следствием гипотезы о независимости термодинамических потенциалов (свободная энергия, внутренняя энергия) от необратимых деформаций. Пусть теперь $t_{ij}\neq 0$ в процессе деформирования. В таком случае в среде могут накапливаться необратимые деформации. Теперь вместо первой зависимости (9) в уравнение (14) следует подставить первую же зависимость из (8). Результат такой подстановки запишем в виде:

$$
\begin{gathered}
(\rho\frac{\partial\Psi}{\partial e_{ik}}(\delta_{ij}-e_{kj})-\sigma_{ij})\varepsilon_{ij}+\rho T\frac{dS}{dt}+q_{j,i}=\tau_{ij}t_{ij}\\
\tau_{ij}=\rho\frac{\partial\Psi}{\partial e_{ik}}(\delta_{kj}-2e_{kj}+e_{km}e_{mj})=\rho\frac{\partial\Psi}{\partial e_{ik}}(\delta_{kj}-s_{kj}).
\end{gathered}
\tag{18}
$$

Как и следовало ожидать, из (26) следуют формула Мурнагана (16) и уравнение баланса энтропии с источником. Перепишем последнее уравнение в канонической форме уравнения баланса:

$$\frac{\partial \rho S}{\partial t} = -(T^{-1}q_j + \rho S v_j)_j - T^{-2}q_j T_{,j} + T^{-1}\tau_{ij}t_{ji}. \tag{19}$$

В (27) первое слагаемое правой части представляет собой полный поток энтропии, а два последующих задают производство энтропии за счет необратимых процессов теплопроводности и необратимого деформирования соответственно. Ограничимся далее изотермическим процессом деформирования. Обобщение на неизотермический случай, по-видимому, не встретит дополнительных сложностей, как это было в случае, где приобретение необратимых деформаций связывалось только с идеальным пластическим течением [8], [9]. В изотермическом случае производство энтропии осуществляется только за счет необратимого процесса деформирования, то есть за счет пластического течения, либо за счет вязкого сопротивления деформированию, либо процесса ползучести, что также связано с учетом вязких свойств среды. Производство энтропии за счет пластичности и вязкости происходит по-разному, но его можно обобщенно представить одним соотношением:

$$D = \sigma_{ij}\gamma_{ij}. \tag{20}$$

Действительно, если среда не обладает пластическими свойствами, а только вязкими, или пластические свойства не проявляются в процессах, предваряющих течение или при разгрузке, то имеем классическое представление для источника энтропии [19]:

$$D = \sigma_{ij}e^v_{ij}. \tag{21}$$

В случае же идеальной пластичности для производства энтропии (его часто называют диссипативной функцией) также имеем классическое представление [20]:

$$D = \sigma_{ij}e^p_{ij}. \tag{22}$$

В (29) и (22) e^v_{ij} и e^p_{ij} – соответственно скорости деформации ползучести и пластичности. Следовательно $\gamma_{ij} = \varepsilon^v_{ij}$ в областях, где не происходит пластическое течение и $\gamma_{ij} = e^p_{ij}$ при пластическом течении. Более сложное представление для γ_{ij} остается для областей течения, когда такое течение невозможно считать идеальным. Вязкие свойства среды могут тормозить течение, что часто моделируется добавлением соответствующих слагаемых в пластический потенциал (поверхность нагружения). Однако представление (28) будет справедливо и в этом случае; только для γ_{ij} следует находить более точное определение. Согласно (27)–(28) в самом общем случае изотермического деформирования получаем:

$$\sigma_{ij}\gamma_{ij} = T^{-1}\tau_{ij}t_{ij}. \tag{23}$$

Вместе с (16) и (26) последнее соотношение позволяет записать:

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= T\sigma_{ik}(\delta_{kj} - e_{kj}), \\ \gamma_{ij} &= t_{ik}(\delta_{kj} - e_{kj}). \end{aligned} \tag{24}$$

Последняя зависимость (24) связывает до настоящего времени неизвестный симметричный тензор с компонентами t_{ik} с компонентами γ_{ij} тензора скоростей необратимых деформаций p_{ij}. Исключая данный неизвестный тензор при помощи второй зависимости из (24), будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{De_{ij}}{Dt} &= \varepsilon_{ij} - \gamma_{ij} - \frac{1}{2}\left((\varepsilon_{ik} - \gamma_{ik} + z_{ik})e_{kj} + \right). + e_{ik}(\gamma_{kj} - \varepsilon_{kj} - z_{kj})\right), \\ \frac{Dp_{ij}}{Dt} &= \gamma_{ij} - p_{ik}\gamma_{kj} - \gamma_{ik}p_{kj}, \\ \frac{Dn_{ij}}{Dt} &= \frac{dn_{ij}}{dt} - r_{ik}n_{kj} + n_{ik}r_{kj}. \end{aligned} \tag{25}$$

Согласно его механическому смыслу тензор с компонентами γ_{ij} следует называть тензором скоростей необратимых деформаций.

Последним равенством из (25) введена объективная производная, записанная для компонент некоторого произвольного тензора n_{ij}. Именно с ее помощью обратимые и необратимые деформации оказываются связанными в процессе деформирования с тем, чтобы, выполняя условия геометрической корректности, добиться неизменности тензора необратимых деформаций в тех случаях, когда их источник γ_{ij} тождественен нулю. Обратим еще раз внимание на то обстоятельство, что при равенстве нулю нелинейной части тензора вращений $r_{ij}(z_{ij} \equiv 0)$ введенная объективная производная совпадает с производной Яумана.

Возможные конкретизации определяющих зависимостей. Конкретизация общих зависимостей предыдущих параграфов связана с конкретизацией консервативного (упругого) и диссипативного (вязкопластического) механизмов деформирования. Консервативный механизм задается в рассматриваемом приближении изотермического деформирования заданием функции термодинамического потенциала $\Psi(e_{ij})$ (свободная энергия) в зависимости от обратимых (упругих) деформаций. Данный механизм может существовать независимо от диссипативного механизма деформирования, определяющего накопление необратимых деформаций. Диссипативный механизм определяется пластическими и реологическими свойствами среды, для его конкретизации следует определить скорости γ_{ij} роста необратимых деформаций в зависимости от напряжений в среде. Отметим еще раз принятые гипотезы при математическом моделировании общих соотношений предыдущего параграфа. К ним относятся принимаемые изначально положения о:

- присутствии в среде обратимых и необратимых деформаций;
- возможности существования чисто консервативного процесса деформирования, когда источник γ_{ij} в уравнениях изменения необратимых деформаций равен нулю ($t_{ij} \equiv 0$) и необратимые деформации изменяются при консервативном (упругом) процессе деформирования также, как если бы среда перемещалась как жесткое целое;
- том, что напряжения в среде определяются только уровнем и распределением обратимых деформаций или, что то же, свободная энергия является функцией только обратимых деформаций $\Psi = \Psi(e_{ij})$.

Принятие данных положений заставило в целях геометрической и термодинамической корректности модели принять соответствующий выбор (25) объективной производной по времени.

В целях конкретизации консервативного механизма деформирования зададим, например, термодинамический потенциал в форме его разложения в ряд по инвариантам тензора деформаций:

$$\begin{gathered} W(I_1, I_2, I_3) = \rho_0^{-1}\Psi(I_1, I_2, I_3) = \frac{\lambda}{2}I_1^2 + \mu I_2 + lI_1I_2 + mI_1^3 + nI_3 + \ldots \\ I_1 = s_{jj}; I_2 = s_{ij}s_{ji}; I_3 = s_{ij}s_{jk}s_{ki}. \end{gathered} \tag{26}$$

Зависимость (26) предполагает изотропию среды и присутствие в ней необратимых деформаций, изменяющихся или неизменяющихся, то есть (26) предполагает $p_{ij} \neq 0$. Когда $p_{ij} \equiv 0$, то вместо (26) следует использовать разложение:

$$\begin{gathered} W(J_1, J_2, J_3) = \rho_0^{-1}\Psi(J_1, J_2, J_3) = \frac{\lambda}{2}J_1^2 + \mu I_2 + lJ_1J_2 + mJ_1^3 + nJ_3 + \ldots \\ J_1 = d_{jj}; J_2 = d_{ij}d_{ji}; J_3 = d_{ij}d_{jk}d_{ki}. \end{gathered} \tag{27}$$

Очевидно, что зависимость (26) переходит в (27) при $p_{ij} = 0$. В них λ, μ – параметры Ламе, l, m, n – модули третьего порядка, значения которых опытно измерены для широкого класса материалов [17].

Если пластические свойства деформируемой среды проявляются при достижении поверхности нагружения, то вязкие присущи всем этапам процесса деформирования. Только пренебрегая свойством вязкости материала деформируемой среды, ее принимают в качестве упругой. Но свойство вязкости может оказаться определяющим для процесса деформирования причем, как в быстрых, так и в медленных таких процессах. В первом случае это влияние на процесс заметно проявляется в эффектах наклепа и эффекте Баушингера. Во втором данное свойство задает ползучесть материала и его усталостную прочность. Все такие свойства, определяемые вязкостью среды, могут задаваться различным их модельным учетом. Рассмотренные представления оставляют для этого соответствующий простор. Свойство ползучести, например, возможно включить в модель, постулируя закон ползучести конкретизированием источника γ_{ij} необратимых деформаций в форме:

$$\begin{gathered}\gamma_{ij} = \varepsilon^v_{ij} = \frac{\partial V(\Sigma)}{\partial \sigma_{ij}} \\ V(\Sigma) = B\Sigma^n(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \\ \Sigma = \sqrt{\frac{3}{2}}((\sigma_1 - \sigma)^2 + (\sigma_2 - \sigma)^2 + (\sigma_3 - \sigma)^2)^{1/2} \\ \sigma = \frac{1}{3}\sigma_{jj} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).\end{gathered} \tag{28}$$

Здесь $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – главные значения тензора напряжений, B, n – постоянные материала. Инвариант тензора напряжений Σ с точностью до числового множителя совпадает с октаэдрическим напряжением, то есть с интенсивностью напряжений. Зависимости (28) однозначно задают диссипативный механизм деформирования в областях, где пластическое деформирование отсутствует. Эти области соответствуют деформированию, предваряющему течение, и разгрузке. Согласно (28) ползучесть материала деформируемой среды соответствует степенному закону Нортона [23]. Когда в моделировании изотермической ползучести требуется учесть иные зависимости скоростей ползучести от напряжений, то для этого нет препятствий. Достаточно по-иному переписать соотношения (28), ведь последние выписаны только в качестве примера.

Предположим, также в качестве примера, что поверхностью нагружения является цилиндр Мизеса:

$$f(\sigma_{ij}) = \sigma'_{ij}\sigma'_{ji} - \frac{8}{3}k^2 = 0, \sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma, \tag{29}$$

где k – постоянная материала среды (предел текучести). Следуя принципу максимума Мизеса, формулируем ассоциированный закон пластического течения:

$$\varepsilon^p_{ij} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \lambda > 0. \tag{30}$$

Если положить теперь, что $\gamma_{ij} = \varepsilon^p_{ij}$, а именно, что единственным источником необратимых деформаций в областях пластического течения является только пластическое течение и следовательно $\gamma_{ij} = \varepsilon^p_{ij}$, то приходим к замкнутой математической модели. В такой модели пренебрегают вязкими свойствами среды при ее пластическом течении. Когда вязкими свойствами среды пренебрегают также при деформировании, предваряющем течение и в условиях разгрузки, то получаем математическую модель идеальной упругопластической среды, допускающей большие деформации [7], [9]. Выбор условия пластичности (29) здесь произволен и связывается с дополнительными предпочтениями. Когда вязкие свойства среды не учитываются только в условиях ее пластического течения, то упругопластические границы становятся местом, где кардинально изменяется механизм накопления необратимых деформаций. Накопленные такие деформации до включения механизма пластического течения оказываются начальными для своего дальнейшего роста уже согласно сменившимся законам.

Учет вязкости среды при ее пластическом течении приводит к замедлению течения. Если такой учет необходим, то его можно включить соответствующим изменением пластического потенциала. Так, условие пластичности можно обобщить, записав его в форме:

$$(\sigma'_{ij} - \eta\varepsilon'^{p}_{ij})(\sigma'_{ij} - \eta\varepsilon'^{p}_{ij}) = \frac{8}{3}k^2, \qquad \varepsilon'^{p}_{ij} = \varepsilon^{p}_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon^{p}_{kk}\delta_{ij}. \tag{31}$$

Постоянная n задает в (31) как раз вязкое сопротивление пластическому течению и называется коэффициентом вязкости. Ассоциированный закон пластического течения (30) в таком случае принимает вид:

$$\varepsilon'^{p}_{ij} = \varphi\frac{\partial f}{\partial\sigma'_{ij}}, \qquad \varphi = \frac{1}{\eta}\Big(1 - \frac{1}{2k}\sqrt{\frac{3}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ji}}\Big);\ \varepsilon^{p}_{ij} = \frac{1}{\eta}\frac{\sqrt{\sigma'_{ij}\sigma'_{ji}} - \sqrt{\frac{8}{3}}k}{\sqrt{\sigma'_{ij}\sigma'_{ji}}}. \tag{32}$$

Дальнейшее обобщение (29) можно связать с включением в него слагаемых, ответственных за упрочнение:

$$(\sigma'_{ij} - bp_{ij} - \eta\varepsilon'^{p}_{ij})(\sigma'_{ij} - bp_{ij} - \eta\varepsilon'^{p}_{ij}) = \frac{8}{3}k^2. \tag{33}$$

Здесь параметр b характеризует проявление при деформировании эффекта Баушингера. Когда бы требовалось учесть эффект необратимой сжимаемости в условиях пластического течения, то поверхность нагружения следовало бы принять в форме конуса Мизеса-Шлейхера:

$$(\sigma'_{ij} - \eta_1\varepsilon'^{p}_{ij})(\sigma'_{ij} - \eta_2\varepsilon'^{p}_{ij}) = 2(k - \delta\sigma + \eta_2|\varepsilon^p|)^2, \qquad \varepsilon^p = \frac{1}{3}\varepsilon^p_{ii}. \tag{34}$$

В (34) η_1, η_2 – коэффициенты вязкости. Иногда более удобными оказываются обобщения кусочно линейных условий пластичности [21]:

$$\max|\sigma_i - \sigma_j| = 2k + 2\eta\max|\varepsilon^p_k - \varepsilon^p_m|, \tag{35}$$

$$\max|\sigma_i - \sigma_j| = 2k + 2\eta\max|\varepsilon^p_k|, \tag{36}$$

$$\max|\sigma_i - \sigma| = \frac{3}{2}k + \frac{3}{2}\eta\max|\varepsilon^p_k|, \tag{37}$$

$$\big|(\sigma_i - \eta\varepsilon^p_i) - (\sigma_j - \eta\varepsilon^p_j)\big| = k. \tag{38}$$

где ε^p_k – главные значения тензора скоростей пластических деформаций. Поверхности нагружения (35)–(37) построены по аналогии с теорией изотропного упрочнения, условие (38) представляет собой видоизмененное условие пластичности, используемое в теории трансляционного упрочнения. Таким образом, в теории больших деформаций возможно использование всех математических моделей, зарекомендовавших себя так или иначе при использовании предположения о малости деформаций. При этом оставляется свобода для построения новых моделей, полагая, например, $\gamma_{ij} = \varepsilon^p_{ij} + \varepsilon^v_{ij}$, и задавая в области течения ε^p_{ij} и ε^v_{ij} самостоятельными зависимостями.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Олейников, А. И.* Интегрированное проектирование процессов изготовления монолитных панелей / А. И. Олейников, А. И. Пекарш – М. : Эком, 2009. – 109 с.

[2] *Горев, Б. В.* К вопросу обработки материалов давлением в режиме ползучести / Б. В. Горев, И. Д. Клопотов, Г. А. Раевская, О. В. Соснин // ПМТФ. – 1980. – № 5. – С. 185–191.

[3] *Lee, E. H.* Elastic-plastic deformation at finite strains / E. H. Lee // Trans ASME: J. Appl. Mech. – 1969. – Vol. 36 – № 1. – P. 1–6.

[4] *Кондауров, В. Н.* Об уравнениях упругопластической среды с конечными деформациями / В. Н. Кондауров // ПМТФ. – 1982. – № 4. – С. 133–139.

[5] *Левитас, В. И.* Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении / В. И. Левитас – Киев : Наукова Думка, 1987. – 232 с.

[6] *Быковцев, Г. И.* Конечные деформации упругопластических сред / Г. И. Быковцев, А. В. Шитиков // ДАН СССР. – 1990. – Т. 311. – №. 1. – С. 59–62.

[7] *Буренин, А. А.* Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях / А. А. Буренин, Г. И. Быковцев, Л. В. Ковтанюк // ДАН. – 1996. – Т. 347. – № 2. – С. 199–201.

[8] *Ковтанюк, Л. В.* Моделирование больших упругопластических деформаций в неизотермическом случае / Л. В. Ковтанюк // Дальневосточный математический журнал. – 2004. – Т. 5. – №. 1. – С. 104–117.

[9] *Буренин, А. А.* Большие необратимые деформации и упругое последействие / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк – Владивосток : Дальнаука, 2013. – 312 с.

[10] *Xia, Z.* A finite elasticplastic constitutive formulation with new co-rotational stress-rate and strain-hardning rule / Z. Xia, F. Ellain // Trans ASME: J. Appl. Mech. – 1995. – № 3. – P. 733–739.

[11] *Галин, Л. А.* Упругопластические задачи / Л. А. Галин. – М. : Наука, 1984. – 232 с.

[12] *Ковтанюк, Л. В.* О продавливании упруговязкопластического материала через жесткую цилиндрическую матрицу / Л. В. Ковтанюк // ДАН. – 2005. – Т. 400. – №. 6. – С. 764–767.

[13] *Буренин, А. А.* Формирование одномерного поля остаточных напряжений в окрестности цилиндрического дефекта сплошности упругопластической среды / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, М. В. Полоник // ПММ. – 2003. – Т. 64. – Вып. 2 – С. 316–325.

[14] *Буренин, А. А.* О точных решениях в теории больших упруговязкопластических деформаций / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк // Динамика сплошной среды, институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН. – Новосибирск. – 2007. – Вып. 125 – С. 28–31.

[15] *Буренин, А. А.* Развитие и торможение винтового вязкопластического течения с расчетом упругого отклика после остановки течения и разгрузки / А. А. Буренин, А. С. Устинова // Успехи механики сплошных сред. К 70-летию В. А. Левина. – Владивосток : Дальнаука, 2009. – С. 91–102.

[16] *Ковтанюк, Л. В.* Течение упруговязкопластической среды по трубе в условиях изменяющегося перепада давления / Л. В. Ковтанюк, В. П. Матвеенко, А. А. Буренин // Вестник Чувашского государственного педагогического университета имени И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2013. – № 1(15). – С. 69–80.

[17] *Лурье, А. И.* Нелинейная теория упругости / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1980. – 512 с.

[18] *Аннин, Б. Д.* Упругопластическая задача / Л. А. Галин, Г. П. Черепанов – Новосибирск : Наука, 1983. – 240 с.

[19] *Де Грост, С.* Неравновесная термодинамика / С. де Грост, П. Мазур – М. : Мир, 1964. – 456 с.

[20] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 232 с.

[21] *Знаменский, В. А.* Об уравнениях вязкопластического тела при кусочно-линейных потенциалах / В. А. Знаменский, Д. Д. Ивлев // Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение. – 1963. – №. 6. – С. 114–118.

[22] *Прагер, В.* Введение в механику сплошных сред / В. Прагер. – М. : Изд-во иностр. литер., 1963. – 312 с.

[23] *Локощенко, А. М.* Моделирование процесса ползучести и длительной прочности металлов / А. М. Локощенко. – М. : МГиУ, 2007. – 264 с.

[24] *Спорыхин, А. Н.* Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред / А. Н. Спорыхин. – Воронеж : Изд-во ВГУ, 1997. – 361 с.

Белых Сергей Викторович,

кандидат технических наук, доцент, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, г. Комсомольск-на-Амуре

e-mail: prnir@knastu.ru

Бормотин Константин Сергеевич,

кандидат технических наук, доцент, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, г. Комсомольск-на-Амуре

e-mail: cvmi@knastu.ru

Буренин Анатолий Александрович,

доктор физико-математических наук, член.-корр. РАН, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре

e-mail: mail@imim.ru

Ковтанюк Лариса Валентиновна,

доктор физико-математических наук, Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток

e-mail: lk@iacp.dvo.ru

Прокудин Александр Николаевич,

кандидат технических наук, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре

e-mail: prokudin@imim.ru

S. V. Belykh[1], *K. S. Bormotin*[1], *A. A. Burenin*[2], *L. V. Kovtanyuk*[3] *A. N. Prokudin*[2]

ON LARGE ISOTHERMAL DEFORMATION OF MATERIALS WITH ELASTIC, VISCOUS AND PLASTIC PROPERTIES

[1]*Komsomolsk-on-Amur state technical university*

[2]*Institute of machinery and metallury FEB RAS*

[3]*Institute of automation and control processes FEB RAS*

Abstract. Mathematical model of the deformation processes materials with elastic, viscous and plastic properties, the ability to acquire large deformation is proposed. Possible specification of the model to account for the different effects of irreversible deformation indicated.

Keywords: elasticity, creep, plasticity, large strains

REFERENCES

[1] *Oleinikov, A. I.* Integrated design of processes monolithic panels / A. I. Oleinikov, A. I. Pekarsh – M. : Ekom, 2009. – 109 p.

[2] *Gorev, B. V.* On the question of the treatment of materials in pressurized creep mode / B. V. Gorev, I. D. Klopotov, G. A. Raevskaya, O. V. Sosnin // PMTF. – 1980. – № 5. – P. 185–191.

[3] *Lee, E. H.* Elastic-plastic deformation at finite strains / E. H. Lee // Trans ASME: J. Appl. Mech. – 1969. – Vol. 36 – № 1. – P. 1–6.

[4] *Kondaurov, V. N.* On the equations of elastic-plastic medium with finite deformations / V. N. Kondaurov // PMTF. – 1982. – № 4 – P. 133–139.

[5] *Levitas, V. I.* Large elastic-plastic deformation of materials at high pressure / V. I. Levits – Kiev : Naukova Dumka, 1987. – 232 p.

[6] *Bykovtsev, G. I.* Finite deformation of elastoplastic media / G. I. Bykovtsev, A. B. Shitikov // DAN USSR. – 1990. – Vol. 311. – №. 1. – P. 59–62.

[7] *Burenin, A. A.* On a simple model for elastoplastic medium with finite deformations / A. A. Burenin, G. I. Bykovtsev, L. V. Kovtanyuk // DAN. – 1996. – Vol. 347. – №. 2. – P. 199–201.

[8] *Kovtanyuk, L. V.* The modeling of elastic-plastic deformations in the case of non-isothermal / L. V. Kovtanyuk // Far-east Mathematical Journal. – 2004. – Vol. 5. – №. 1. – P. 104–117.

[9] *Burenin, A. A.* Large irreversible deformation and springback / A. A. Burenin, L. V. Kovtanyuk – Vladivostok : Dalnauka, 2013. – 312 p.

[10] *Xia, Z.* A finite elasticplastic constitutive formulation with new co-rotational stress-rate and strain-hardning rule / Z. Xia, F. Ellain // Trans ASME: J. Appl. Mech. – 1995. – № 3 – P. 733–739.

[11] *Galin, L. A.* Elastoplastic problems / L. A. Galin. – M. : Nauka, 1984. – 232 p.

[12] *Kovtanyuk, L. V.* On the bursting of elastic-visco-plastic material through a rigid cylindrical die / L. V. Kovtanyuk // ДАН. – 2005. – Vol. 400. – №. 6. – P. 764-767.

[13] *Burenin, A. A.* Formation of one-dimensional residual stress field in the vicinity of the cylindrical defect continuity elastoplastic medium / A. A. Burenin, L. V. Kovtanyuk, M. V. Polonik // PMM. – 2003. – Vol. 64. – №. 2. – P. 316–325.

[14] *Burenin, A. A.* On exact solutions to the theory of large elastic-visco-plastic deformations / A. A. Burenin, L. V. Kovtanyuk // Dynamics of continuous medium, Institute of Hydrodynamics. SB RAS, Novosibirsk, Russia. – 2007. – Vol. 125. – P. 28–31.

[15] *Burenin, A. A.* Development and braking screw viscoplastic flow with calculation of elastic response after stopping the flow and discharge / A. A. Burenin, A. S. Ustinove // The progress in continuum mechanics. On the 70th anniversary of VA Levin. Vladivostok : Dalnauka. – 2009. – P. 91–102.

[16] *Kovtanyuk, L. V.* During elastoviscoplastic medium through a pipe in a changing differential pressure / L. V. Kovtanyuk, V. P. Matveenko, A. A. Burenin // Vestnik the Chuvash State Pedagogical University of I. J. Jakovleva. Line : Mechanics of a limiting condition. – 2013. – № 1 (15). – P. 69–80.

[17] *Lurie, A. I.* Nonlinear elasticity / A. I. Lurie. – M. : Nauka, 1980. – 512 p.

[18] *Annin, B. D.* Elastoplastic problem / B. D. Annin, G. P. Cherepanov – Novosibirsk : Nauka, 1983. – 240 p.

[19] *de Groste, S.* Non-equilibrium thermodynamics / S. de Groste, P. Mazur – M. : Mir, 1964. – 456 p.

[20] *Ivlev, D. D.* The theory of perfect plasticity / D. D. Ivlev. – M. : Nauka, 1966. – 232 p.

[21] *Znamenskii, V. A.* On the equations of the viscoplastic body with piecewise linear potentials / V. A. Znamenskii, D. D. Ivlev // Izv. AN SSR, OTN, Mechanics and Engineering. – 1963. – №. 6. – P. 114–118.

[22] *Prager, V.* Introduction to continuum mechanics / V. Prager. – M. : Izd. inostr. liter., 1963. – 312 p.

[23] *Lokoshchenko, A. M.* Simulation of Creep and creep rupture of metals/ A. M. Lokoshchenko. – M. : MGiU, 2007. – 264 p.

[24] *Sporykhin, A. N.* Perturbation method in problems of stability of complex media / A. N. Sporykhin. – Voronezh : Izd. VGU, 1997. – 361 p.

Belyh, Sergej Viktorovich

Candidate of Technical Sciences, Komsomolsk-on-Amur state technical university, Komsomolsk-on-Amur

Bormotin, Konstantin Sergeevich

Candidate of physics-mathematical sciences, Komsomolsk-on-Amur state technical university, Komsomolsk-on-Amur

Burenin, Anatolij Aleksandrovich

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Institute of machinery and metallury FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur

Kovtanjuk, Larisa Valentinovna

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Institute of automation and control processes FEB RAS, Vladivostok

Prokudin, Aleksandr Nikolaevich

Candidate of Technical Sciences Institute of machinery and metallury FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur