ВЕСТНИК ЧГПУ
им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
МЕХАНИКА
ПРЕДЕЛЬНОГО
СОСТОЯНИЯ
№ 1 • 2008

Амензаде Р. Ю., Киясбейли Э. Т.

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ НЕОДНОРОДНЫХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

(Бакинский государственный университет)

Тонкостенные оболочечные конструкции находят широкое применение в различных областях современной техники – авиастроении, судостроении, ракетной технике, нефтяном машиностроении и т.д. К настоящему времени фундаментальные результаты в этой области отражены в многочисленных монографиях и статьях [1; 5 – 7].

Однако, в последние годы в связи с запросами инженерной практики (повышение требований к надежности несущих конструкций, вопросы оптимального проектирования и снижения веса) возникла необходимость дальнейшего развития теории и методов расчета оболочечных конструкций, учитывающих все усложняющиеся условия их эксплуатации, использование композитных материалов и направленных на преодоление трудностей математического и вычислительного характера. Здесь одним из таких важных аспектов является развитие приближенных, в частности вариационных методов.

В публикуемой статье, в геометрически нелинейной постановке, разработан вариационный принцип, на основе которого могут быть исследованы задачи определения напряженно-деформированного состояния неоднородных по толщине тонкостенных упругих анизотропных элементов конструкций (оболочек, пластинок).

Заметим, что учет геометрической нелинейности позволяет с полным основанием считать возможным применять сформулированный вариационный метод к задачам устойчивости и выпучивания оболочек.

1. «Оболочечный» вариационный принцип получим исходя из трехмерной теории упругости неоднородного анизотропного тела. В начале неоднородность будем интерпретировать в виде идеализации непрерывного изменения физико-механических свойств от точки к точке. Рассмотрим равновесие гетерогенной анизотропной среды, которая занимает в трехмерном эвклидовом пространстве с криволинейными координатами x^γ область V, ограниченную достаточно гладкой поверхностью S. Тогда для геометрически нелинейной теории оно описывается следующей краевой задачей:

$$\nabla_j \left\{ \sigma^{ij} \left(\delta_i^k + \nabla_i u^k \right) \right\} = 0, \qquad \forall x^\gamma \in V \tag{1.1}$$

$$\overset{\vee}{\varepsilon}_{ij} = C_{ijkl}\left(x^\gamma\right)\sigma^{kl}, \qquad \forall x^\gamma \in V \tag{1.2}$$

$$2\varepsilon_{ij} = \nabla_i u_j + \nabla_j u_i + \nabla_i u^k \nabla_j u_k, \qquad \forall x^\gamma \in V \tag{1.3}$$

$$\overline{u}_k = u_k, \qquad \forall x^\gamma \in S_2 \tag{1.4}$$

$$\overline{T} = \sigma^{ij} n_j \left(\delta_i^k + \nabla_i u^k \right). \qquad \forall x^\gamma \in S_1 \tag{1.5}$$

Здесь применены обычные обозначения: ε_{ij} – ковариантные компоненты тензора конечной деформации, $\overset{\vee}{\varepsilon}_{ij}$ – значения деформации, определяемые физическим законом, σ^{ij} – контравариантные составляющие тензора напряжений, δ_i^k – тензор Кронекера, u_i и u^i соответственно ковариантные и контравариантные составляющие вектора перемещения, $\bar{u}_k$ и $\bar{T}^k$ – заданные на границе компоненты вектора перемещения и усилия, ∇_j – оператор ковариантного дифференцирования, n_j – единичный вектор нормали, а $S = S_1 \bigcup S_2$. Краевую задачу (1.1) – (1.5) можно сформулировать с помощью вариационной теоремы следующим образом: стационарное значение функционала

$$\delta R = 0 \tag{1.6}$$

где

$$R = \int_V \left\{ \dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\sigma}^{ij} + \frac{1}{2}\sigma^{ij}\nabla_i \dot{u}^k \nabla_j \dot{u}_k - \frac{1}{2}C_{ijkl}\dot{\sigma}^{kl}\dot{\sigma}^{ij} \right\} dV - \int_{S_1} \dot{\bar{T}}^i \dot{u}_i ds - \int_{S_2} \left(\dot{u}_i - \dot{\bar{u}}_i \right) \dot{T}^i ds \tag{1.7}$$

при условиях (1.2) и (1.3) в качестве уравнений Эйлера приводит к уравнениям (1.1) и граничным условиям (1.4) и (1.5). За независимые варьируемые величины принимаются $\dot{\sigma}^{ij}$ и $\dot{u}_i$, а точкой сверху обозначается дифференцирование по некоторому параметру, характеризующему процесс нагружения. Доказательство данной теоремы аналогично [4] и поэтому здесь не приводится. Необходимо отметить, что уравнения равновесия (1.1) и физические соотношения (1.2) при варьировании получаются независимо друг от друга. Этот факт и предопределяет справедливость модификации функционала (1.7) для построения вариационного принципа теории неоднородных по толщине оболочек.

Сформулированная краевая задача (1.1) – (1.5) и эквивалентный ей вариационный принцип (1.7) носят формальный характер. Поэтому к ним следует относиться с осторожностью в том смысле, что в трехмерной постановке линейный закон Гука, строго говоря, справедлив только в случае малых деформаций. Однако здесь это допущение сделано сознательно, так как нашей конечной целью является построение двумерного функционала, описывающего нелинейное напряженно-деформируемое состояние тонкостенных линейно-упругих оболочек, относительно которых такой подход правомерен.

2. Для осуществления перехода от трехмерной системы координат к двумерной в начале установим модель, представляющую в теоретических исследованиях реальные оболочки. Для этого необходимо сделать ряд допущений. При этом если за z принять координату x^3 а под x^1 и x^2 – соответственно криволинейные координаты срединной поверхности, то в основу предлагаемой здесь теории неоднородных тонкостенных оболочек ставятся следующие предположения:

а) ограничимся рассмотрением «жестконеоднородной» оболочки, для которой можно принять силовую гипотезу о незначительности нормального напряжения $\sigma^{33}\left(\sigma^{33} \approx 0\right)$ [3];

б) будем использовать гипотезы плоских сечений Кирхгофа – Лява;

в) учитывается нелинейность перемещения только в направлении нормали к поверхности оболочки.

Теперь перемещения произвольных точек оболочки, считая их меняющимися вдоль толщины z по линейному закону, запишем в виде:

$$\tilde{u}_\alpha\left(x^1,x^2,x^3\right)=u_\alpha\left(x^1,x^2\right)+z\psi_\alpha\left(x^1,x^2\right). \qquad (2.1)$$

Что касается перемещения $\tilde{u}_3$, то примем

$$\tilde{u}_3\left(x^1,x^2,x^3\right)=w\left(x^1,x^2\right). \qquad (2.2)$$

Будем считать, что греческие индексы принимают значения 1 и 2, u_α и w – перемещения точек срединной поверхности вдоль координатных линий x^1, x^2 и нормали соответственно, а ψ_α – компоненты вектора сдвига по соответствующим координатным линиям. Отметим, что в выражениях (2.1), (2.2) и далее величины, отмеченные со знаком ~ отнесены к любой эквидистантной поверхности, а без него – только к срединной поверхности. Пользуясь допущением б), для функции ψ_α запишем

$$\psi_\alpha=-\left(\nabla_\alpha w+b_{\alpha\gamma}u^\gamma\right), \qquad (2.3)$$

где ∇_α – двумерный оператор ковариантного дифференцирования, $b_{\alpha\beta}$ – коэффициенты второй квадратичной формы. Теперь, учитывая последнюю формулу, равенство (2.1) перепишем в виде

$$\tilde{u}_\alpha=u_\alpha-z\left(\nabla_\alpha w+b_{\alpha\gamma}u^\gamma\right) \qquad (2.4)$$

Подставляя выражения для перемещений (2.4) и (2.2) в общую формулу для определения компонент тензора конечной деформации, принимая гипотезу в) и пренебрегая членами, содержащими z^2, как малыми высшего порядка, для деформаций произвольной точки эквидистантной поверхности получим следующие выражения:

$$\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta}=\varepsilon_{\alpha\beta}+z\vartheta_{\alpha\beta}. \qquad (2.5)$$

Здесь $\vartheta_{\alpha\beta}$ – коэффициенты кривизны срединной поверхности. При этом входящие в формулу (2.5) величины $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и $\vartheta_{\alpha\beta}$ могут быть записаны в следующей форме:

$$2\varepsilon_{\alpha\beta}=\nabla_\alpha u_\beta+\nabla_\beta u_\alpha-2b_{\alpha\beta}w+b_\alpha^\gamma b_{\beta\gamma}w^2+\nabla_\alpha w\nabla_\beta w, \qquad (2.6)$$

$$2\vartheta_{\alpha\beta}=-\nabla_\alpha\left(b_{\beta\gamma}u^\gamma\right)-\nabla_\beta\left(b_{\alpha\beta}u^\gamma\right)-2\nabla_\alpha\nabla_\beta w. \qquad (2.7)$$

В рассматриваемой «жестконеоднородной» модели оболочки (допущение а)), принимая во внимание линейный характер изменения напряжений по толщине, компоненты контравариантного тензора напряжений могут быть представлены как

$$\tilde{\sigma}^{\alpha\beta}=\sigma^{\alpha\beta}+z\sigma_*^{\alpha\beta}. \qquad (2.8)$$

Учитывая теперь, что величина z меняется в пределах всей толщины оболочки, усилия $N^{\alpha\beta}$ и моменты $M^{\alpha\beta}$ определим через компоненты тензора напряжений посредством формул:

$$N^{\alpha\beta} = \int_{-h}^{h} \tilde{\sigma}^{\alpha\beta} dz , \qquad M^{\alpha\beta} = \int_{-h}^{h} \tilde{\sigma}^{\alpha\beta} z dz , \tag{2.9}$$

в которых $2h$ – толщина оболочки.
Подставляя значения (2.8) в формулы (2.9), находим

$$N^{\alpha\beta} = \int_{-h}^{h} \left\{ \sigma^{\alpha\beta} + z\sigma_*^{\alpha\beta} \right\} dz = \sigma^{\alpha\beta} \int_{-h}^{h} zdz = 2h\sigma^{\alpha\beta} ,$$

$$M^{\alpha\beta} = \int_{-h} \left\{ \sigma^{\alpha\beta} + z\sigma_*^{\alpha\beta} \right\} zdz = \frac{2}{3} h^3 \sigma^{\alpha\beta} .$$

В силу полученных равенств компоненты тензора напряжений через компоненты усилий и моментов запишутся следующими выражениями:

$$\tilde{\sigma}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2h} N^{\alpha\beta} + \frac{3}{2h^3} z M^{\alpha\beta} . \tag{2.10}$$

3. Выделив переменную z и выписав все необходимые соотношения принятой теории тонких оболочек, перейдем к преобразованию объемного интеграла функционала (1.7) в поверхностный интеграл «оболочечного» функционала. Для осуществления соответствующих выкладок, будем исходить из условия, что

$$dV = dsdz ,$$

где ds – элементарная площадь срединной поверхности оболочки.
С учетом вышесказанного, первый объемный интеграл запишется как

$$\int_V \dot{\varepsilon}_{i\,j} \dot{\sigma}^{ij} dV = \int_{-h}^{h} \int_S \dot{\tilde{\sigma}}^{\alpha\beta} \dot{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha\beta} dzds .$$

Так как на основании выражения (2.5) имеем, что

$$\dot{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha\beta} = \dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} + z\dot{\vartheta}_{\alpha\beta} ,$$

то дальнейшее преобразование этого члена будет следующим

$$\int_{-h}^{h} \int_S \left\{ \left(\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} + z\dot{\vartheta}_{\alpha\beta} \right) \dot{\tilde{\sigma}}^{\alpha\beta} \right\} dsdz = \int_S \left\{ \dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} \left(\int_{-h}^{h} \dot{\tilde{\sigma}}^{\alpha\beta} \right) dz + \dot{\vartheta}_{\alpha\beta} \left(\int_{-h}^{h} \dot{\tilde{\sigma}}^{\alpha\beta} zdz \right) \right\} ds .$$

Здесь, принимая во внимание равенства (2.8), преобразованный первый член функционала (1.7) запишем в окончательной форме

$$\int_V \dot{\varepsilon}_{ij} \, \dot{\sigma}^{ij} dV = \int_S \left\{ \dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} \dot{N}^{\alpha\beta} + \dot{\vartheta}_{\alpha\beta} \dot{M}^{\alpha\beta} \right\} ds . \tag{3.1}$$

Преобразования второго члена функционала (1.7) через параметры эквидистантной поверхности проводится следующим образом:

$$\int_V \sigma^{ij} \nabla_i \dot{u}^k \nabla_j \dot{u}_k dV = \int_{-h}^{h} \left\{ \tilde{\sigma}^{\alpha\beta} \left[b_\alpha^\gamma b_{\beta\gamma} \dot{w}^2 + \nabla_\alpha \dot{w} \nabla_\beta \dot{w} \right] \right\} dsdz$$

Далее, представляя тензор напряжения согласно формулам (2.10), пренебрегая членами, содержащими z^2, как малыми высшего порядка и учитывая, что произведения продольных усилий на перемещения значительно превышают значения произведений моментов на соответствующие им обобщенные перемещения, находим, что

$$\int_V \sigma^{ij}\nabla_i\dot{u}^k\nabla_j\dot{u}_k dV = \int_S \left\{N^{\alpha\beta}\left[b_\alpha^\gamma b_{\beta\gamma}\dot{w}^2 + \nabla_\alpha\dot{w}\nabla_\beta\dot{w}\right]\right\} ds\,. \qquad (3.2)$$

Теперь, аналогично приведенным выше рассуждениям и вычислениям, дадим преобразование третьего члена функционала

$$\int_V C_{ijkl}\dot{\sigma}^{ij}\dot{\sigma}^{kl} dV = \int_S \left\{C^{(0)}_{\alpha\beta\gamma\eta}\dot{N}^{\alpha\beta}\dot{N}^{\gamma\eta} + 2C^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\eta}\dot{N}^{\alpha\beta}\dot{M}^{\gamma\eta} + C^{(2)}_{\alpha\beta\gamma\eta}\dot{M}^{\alpha\beta}\dot{M}^{\gamma\eta}\right\} ds\,. \qquad (3.3)$$

Здесь для краткости записи введены следующие обозначения

$$C^{(0)}_{\alpha\beta\gamma\eta} = \frac{1}{4h^2}\int_{-h}^{h} C_{\alpha\beta\gamma\eta}dz\,; \quad C^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\eta} = \frac{3}{4h^4}\int_{-h}^{h} C_{\alpha\beta\gamma\eta}zdz\,; \quad C^{(2)}_{\alpha\beta\gamma\eta} = \frac{9}{4h^6}\int_{-h}^{h} C_{\alpha\beta\gamma\eta}z^2dz\,. \qquad (3.4)$$

Назовем $C^{(0)}_{\alpha\beta\gamma\eta}$, $C^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\eta}$, $C^{(2)}_{\alpha\beta\gamma\eta}$ приведенными механическими характеристиками соответственно нулевого, первого и второго порядка.

Допустим теперь, что неоднородная по толщине оболочка многослойна и составлена из n чередующихся различных по толщине слоев, которые жестко связаны между собой* общими поверхностями параллельными срединной поверхности оболочки, с различными упругими характеристиками $C^{(k+1)}_{\alpha\beta\gamma\eta}$ $[k = 0,1\ldots(n-1)]$. Толщину каждого слоя обозначим через δ_k. Таким образом

$$\sum_{k=0}^{n-1}\delta_k = 2h\,,$$

а δ_0 принимается равным нулю. В этом случае для вычисления коэффициентов (3.4) введем обозначения

$$s_k = -h + \sum_{j=0}^{k}\delta_j\,, \quad s_{k+1} = -h + \sum_{j=0}^{k+1}\delta_j = s_k + \delta_{k+1}\,.$$

Тогда для величин $C^{(0)}_{\alpha\beta\gamma\eta}$, $C^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\eta}$ и $C^{(2)}_{\alpha\beta\gamma\eta}$ получим следующие выражения

$$C^{(0)}_{\alpha\beta\gamma\eta} = \frac{1}{4h^2}\sum_{k=0}^{n-1}C^{(k+1)}_{\alpha\beta\gamma\eta}\int dz\,; \quad C^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\eta} = \frac{3}{4h^4}\sum_{k=0}^{n-1}C^{(k+1)}_{\alpha\beta\gamma\eta}\int zdz\,; \quad C^{(2)}_{\alpha\beta\gamma\eta} = \frac{9}{4h^6}\sum_{k=0}^{n-1}C^{(k+1)}_{\alpha\beta\gamma\eta}\int z^2dz\,.$$

В последних формулах интегрирование по z ведется от s_k до $s_k + \delta_{k+1}$.

4. Таким образом, функционал для решения задач теории неоднородных по толщине оболочек с учетом геометрической нелинейности принимает вид

$$\begin{aligned} R = \int_S \Big\{ & \dot{\varepsilon}_{\alpha\beta}\dot{N}^{\alpha\beta} + \dot{\vartheta}_{\alpha\beta}\dot{M}^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}N^{\alpha\beta}\left(b_\alpha^\gamma b_{\beta\gamma}\dot{w}^2 + \nabla_\alpha\dot{w}\nabla_\beta\dot{w}\right) - \\ & -\frac{1}{2}\left(C^{(0)}_{\alpha\beta\gamma\eta}\dot{N}^{\alpha\beta}\dot{N}^{\gamma\eta} + 2C^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\eta}\dot{N}^{\alpha\beta}\dot{M}^{\gamma\eta} + C^{(2)}_{\alpha\beta\gamma\eta}\dot{M}^{\alpha\beta}\dot{M}^{\gamma\eta}\right)\Big\} ds - R_L\,, \end{aligned} \qquad (4.1)$$

* в этом предположении справедлива гипотеза Кирхгофа-Лява.

где [2]

$$R_L = \int\limits_{L_1} \left[\left(\dot{T}_*^{\alpha} - b_{\alpha}^{\gamma} \dot{\overline{P}}_*^{\alpha} \right) \dot{u}_{\alpha} + \left(\dot{\overline{T}}_*^{3} + \overline{n_{\beta} \nabla_{\alpha} M^{\alpha\beta}} \right) \dot{w} - \overline{P}_*^{\alpha} \nabla_{\alpha} \dot{w} \right] dl +$$

$$+ \int\limits_{L_2} \left\{ \left(\dot{u}_{\alpha} - \dot{\overline{u}}_{\alpha} \right) \left(\dot{T}_*^{\alpha} - b_{\alpha}^{\gamma} \dot{P}_*^{\alpha} \right) + \left(\dot{w} - \dot{\overline{w}} \right) \left[\dot{T}_*^{3} + \left(n_{\beta} \nabla_{\alpha} M^{\alpha\beta} \right)^{\bullet} \right] - \right.$$

$$\left. - \left(\nabla_{\alpha} \dot{w} - \nabla_{\alpha} \dot{\overline{w}} \right) \dot{P}_* \right\} dl ,$$

контурный интеграл, не зависящий от физических соотношений и соответствующий принятой гипотезе Кирхгофа-Лява. Здесь

$$T_*^{\alpha} = N^{\alpha\beta} n_{\beta} ; \qquad T_*^{3} = N^{\beta\gamma} n_{\beta} \nabla_{\gamma} w ; \qquad P_*^{\alpha} = M^{\beta\alpha} n_{\beta} ,$$

L_1 – часть контура, где заданы усилия и моменты, а на оставшейся части L_2 – перемещения, n_{β} – косинусы нормали к контуру, а $\dot{u}^{\alpha}$, $\dot{w}$, $\dot{N}^{\alpha\beta}$ и $\dot{M}^{\alpha\beta}$ – независимые варьируемые величины.

Применяя известную процедуру, не трудно получить уравнения Эйлера для функционала (4.1). Они определяются следующим образом:

$$\begin{gathered}
\left(e_{\alpha\beta} - C_{\alpha\beta\gamma\eta}^{(0)} N^{\gamma\eta} - C_{\alpha\beta\gamma\eta}^{(1)} M^{\gamma\eta} \right)^{\bullet} = 0 , \\
\left(\vartheta_{\alpha\beta} - C_{\alpha\beta\gamma\eta}^{(1)} N^{\gamma\eta} - C_{\alpha\beta\gamma\eta}^{(2)} M^{\gamma\eta} \right)^{\bullet} = 0 , \\
\left(\nabla_{\alpha} N^{\alpha\gamma} + b_{\alpha}^{\gamma} \nabla_{\beta} M^{\alpha\beta} \right)^{\bullet} = 0 , \\
\left[N^{\alpha\beta} \left(b_{\alpha\beta} w - b_{\alpha}^{\gamma} \right) + \nabla_{\beta} \left(N^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} w \right) + \nabla_{\beta} \nabla_{\alpha} M^{\alpha\beta} \right]^{\bullet} = 0 , \\
\left(n_{\beta} N^{\gamma\beta} - b_{\alpha}^{\gamma} n_{\beta} M^{\alpha\beta} - \overline{T}_*^{\gamma} + b_{\alpha}^{\gamma} \overline{P}_*^{\alpha} \right)^{\bullet} = 0 , \quad \forall l \in L_1 , \qquad (4.2) \\
\left(n_{\beta} N^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} w + n_{\beta} \nabla_{\alpha} M^{\alpha\beta} - \overline{T}_*^{3} - \overline{n_{\beta} \nabla_{\alpha} M^{\alpha\beta}} \right)^{\bullet} = 0 , \quad \forall l \in L_1 , \\
\left(M^{\alpha\beta} n_{\beta} - \overline{P}_*^{\alpha} \right)^{\bullet} = 0 , \qquad \forall l \in L_1 , \\
\left(u_{\alpha} - \overline{u}_{\alpha} \right)^{\bullet} = 0 , \qquad \forall l \in L_2 , \\
\left(w - \overline{w} \right)^{\bullet} = 0 , \qquad \forall l \in L_2 , \\
\left(\nabla_{\alpha} w - \nabla_{\alpha} \overline{w} \right)^{\bullet} = 0 , \qquad \forall l \in L_2 .
\end{gathered}$$

Полученная система (4.2) является дифференциальной относительно параметра, характеризующего процесс нагружения. Проинтегрировав её в предположении, что напряженное состояние в начале нагружения отсутствует, окончательно запишем:

$$\begin{gathered}
e_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta\gamma\eta}^{(0)} N^{\gamma\eta} + C_{\alpha\beta\gamma\eta}^{(1)} M^{\gamma\eta} , \\
\vartheta_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta\gamma\eta}^{(1)} N^{\gamma\eta} + C_{\alpha\beta\gamma\eta}^{(2)} M^{\gamma\eta} , \\
\nabla_{\alpha} N^{\alpha\gamma} + b_{\alpha}^{\gamma} \nabla_{\beta} M^{\alpha\beta} = 0 , \\
N^{\alpha\beta} \left(b_{\alpha}^{\gamma} b_{\beta\gamma} w - b_{\alpha\beta} \right) - \nabla_{\beta} \left(N^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} w \right) - \nabla_{\beta} \nabla_{\alpha} M^{\alpha\beta} = 0 ,
\end{gathered}$$

при следующих граничных условиях

$$u_{\alpha} = \overline{u}_{\alpha} , \qquad w = \overline{w} , \quad \nabla_{\alpha} w = \nabla_{\alpha} \overline{w} , \qquad \forall l \in L_2 ,$$

$$T_*^\alpha = \overline{T}_*^\alpha, \quad T_{**}^3 = \overline{T}_{**}^3, \quad P_*^\alpha = \overline{P}_*^\alpha, \qquad \forall l \in L_1 .$$

С получением выше выписанных соотношений, доказательство вариационной теоремы для неоднородных по толщине и многослойных тонких упругих анизотропных оболочек можно считать завершенным.

В заключении более определенно отметим сущность предложенного вариационного метода. Особенностью предложенного функционала является то, что он сформулирован в скоростях. Если построить аналогичный функционал Рейснера, то применение численных методов, например метода Ритца, приведет к решению системы нелинейных алгебраических уравнений или системы трансцендентных уравнений, реализация которых на ЭВМ весьма затруднительна. Применение же аналогичного приближенного метода в данном случае приводит к решению задачи Коши для системы квазилинейных дифференциальных уравнений, численная реализация которой значительно проще.

г. Баку
Поступила: 08 февраля 2008 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абовский, Н. П.* Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек / Н. П. Абовский, Н. П. Андреев, А. П. Деруга – М. : Наука, 1978. – 288 с.
2. *Ализаде, А. Н.* О применении вариационной теоремы Дж. Л. Сендерса, Х. Г. Мак-комба, Ф. Р. Шлехте к тонким оболочкам / А. Н. Ализаде, Р. Ю. Амензаде // Уч. записки МВ и ССО Азерб. ССР. сер. физ-мат. наук. – 1976. – № 6. – С. 82–88.
3. *Амензаде, Р. Ю.* Вариационный принцип теории неоднородных оболочек при облучении / Р. Ю. Амензаде, А. Н. Ализаде, И. Н. Преображенский // Механика твердого тела. – 1988. – №2, – с. 151–155.
4. *Васидзу, К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности / К. Васидзу – М. : Мир, 1987, – 542 с.
5. *Вольмир, А. С.* Устойчивость деформируемых систем / А. С. Вольмир – М. : Наука, 1987. – 984 с.
6. *Галимов, К. З.* Основы нелинейной теории тонких оболочек / К. З. Галимов – Казань : Изд-во КГУ, 1975. – 325 с.
7. *Гольденвейзер, А. П.* Теория упругих тонких оболочек / А. П. Гольденвейзер – М. : Наука, 1976. – 512 с.