ВЕСТНИК ЧГПУ
им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
МЕХАНИКА
ПРЕДЕЛЬНОГО
СОСТОЯНИЯ
№ 1 • 2008

Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Мазелис А. Л.

ОБ УЧЁТЕ УПРУГИХ СВОЙСТВ СРЕДЫ ПРИ ЕЁ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОМ ТЕЧЕНИИ В ЗАЗОРЕ МЕЖДУ КОАКСИАЛЬНЫМИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

(Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН)

Прямолинейные движения вязкопластической среды изучались неоднократно [4;5;7;9;10]. Влияние упругих свойств среды на параметры подобных движений оказалось возможным учесть только в рамках теории больших деформаций. Именно на такой основе были получены первые решения некоторых модельных задач [3;6;8] о прямолинейных движениях упруговязкопластических сред с последующей разгрузкой. В настоящей заметке построим точное аналитическое решение краевой задачи теории больших упруговязкопластических деформаций о движении среды в зазоре между коаксиальными цилиндрическими поверхностями, когда внешняя из них неподвижна, а внутренняя движется первоначально ускоренно с последующей равнозамедленной остановкой. Указывается характер движения упругопластических границ и рассчитываются остаточные напряжения в материале.

1. Основные модельные соотношения. Для решения поставленной задачи воспользуемся моделью больших упругопластических деформаций, предложенной в [2;9]. В декартовой прямоугольной системе пространственных эйлеровых координат x_i компоненты обратимой (упругой) e_{ij} и необратимой (пластической) p_{ij}, не измеримых в опытах составляющих тензора деформаций Альманси d_{ij} определяются дифференциальными уравнениями изменения (переноса) в форме

$$\frac{De_{ij}}{Dt} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p - \frac{1}{2}\left(\left(\varepsilon_{ik} - \varepsilon_{ik}^p + z_{ik}\right)e_{kj} + e_{ik}\left(\varepsilon_{kj} - \varepsilon_{kj}^p - z_{kj}\right)\right),$$

$$\frac{Dp_{ij}}{Dt} = \varepsilon_{ij}^p - p_{ik}\varepsilon_{kj}^p - \varepsilon_{ik}^p p_{kj},$$

$$\frac{Dn_{ij}}{Dt} = \frac{dn_{ij}}{dt} - r_{ik}n_{kj} + n_{ik}r_{kj}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(v_{i,j} + v_{j,i}\right), \quad v_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_{i,j}v_j,$$

$$z_{ij} = A^{-1}\{B^2\left(\varepsilon_{ik}e_{kj} - e_{ik}\varepsilon_{kj}\right) + B\left(\varepsilon_{ik}e_{ks}e_{sj} - e_{ik}e_{ks}\varepsilon_{sj}\right) + +e_{ik}\varepsilon_{ks}e_{st}e_{tj} - e_{ik}e_{ks}\varepsilon_{st}e_{tj}\}, \quad (1.1)$$

$$A = 8 - 8E_1 + 3E_1^2 - E_2 - \frac{1}{3}E_1^3 + \frac{1}{3}E_{3,} \quad B = 2 - E_1,$$

$$E_1 = e_{kk}, \quad E_2 = e_{ij}e_{ji}, \quad E_3 = e_{ij}e_{jk}e_{ki}, \quad r_{ij} = w_{ij} + z_{ij}, \quad w_{ij} = \frac{1}{2}\left(v_{i,j} - v_{j,i}\right).$$

В соотношениях (1.1) u_i, v_i – компоненты векторов перемещений и скоростей точек среды, символом $\frac{D}{Dt}$ обозначена объективная производная тензоров по времени, источник ε_{ij}^p в уравнении изменения тензора p_{ij} следует, как и в классической теории, называть компонентами тензора скоростей пластических деформаций, r_{ij} – тензор вращений, компоненты которого в своей нелинейной части z_{ij} зависят от обратимых деформаций и скоростей деформирования. Согласно уравнениям (1.1) в условиях разгрузки $\left(\varepsilon_{ij}^p = 0\right)$ компоненты тензора необратимых деформаций p_{ij} изменяются как при жестком перемещении тела. Компоненты тензора полных деформаций Альманси d_{ij} через его составляющие e_{ij} и p_{ij} представляются в виде

$$d_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j}\right) = e_{ij} + p_{ij} - \frac{1}{2}e_{ik}e_{kj} - e_{ik}p_{kj} - p_{ik}e_{kj} + e_{ik}p_{km}e_{mj}. \quad (1.2)$$

Напряжения в среде полностью определяются обратимыми деформациями и, следуя законам термодинамики, для несжимаемой среды связаны с ними зависимостями

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial d_{ik}}\left(\delta_{kj} - 2d_{kj}\right)$$

при $p_{ij} \equiv 0$,

$$\sigma_{ij} = -p_1\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial e_{ik}}\left(\delta_{kj} - 2e_{kj}\right) \quad (1.3)$$

при $p_{ij} \neq 0$.

В данных зависимостях p и p_1 – добавочные гидростатические давления. Считая среду изотропной, упругий потенциал W примем в виде

$$W = -2\mu J_1 - \mu J_2 + bJ_1^2 + (b-\mu)J_1J_2 - \chi J_1^3 + \ldots,$$

$$J_k = \begin{cases} L_k & \textit{при} \quad p_{ij} = 0 \\ I_k & \textit{при} \quad p_{ij} \neq 0 \end{cases}, \quad L_1 = d_{kk}, \quad L_2 = d_{ik}d_{ki}, \quad (1.4)$$

$$I_1 = e_{kk} - \frac{1}{2}e_{sk}e_{ks}, \qquad I_2 = e_{st}e_{ts} - e_{sk}e_{kt}e_{ts} + \frac{1}{4}e_{sk}e_{kt}e_{tn}e_{ns}.$$

Здесь μ, b, χ – упругие модули среды, а выбор инвариантов I_1, I_2 тензора обратимых деформаций в виде (1.4) обеспечивает предельный переход от второй зависимости (1.3) к первый при стремлении необратимых деформаций к нулю.

Считаем, что необратимые деформации в материале накапливаются при достижении напряженным состоянием поверхности нагружения, которая в условиях принимаемого принципа максимума Мизеса является пластическим потенциалом. В качестве такой поверхности будем использовать условие пластичности Треска, обобщенное на случай учета вязких свойств материалов [11], в форме

$$\max\left|\sigma_i - \sigma_j\right| = 2k + 2\eta\left|\varepsilon_k^p\right|, \quad (1.5)$$

где k – предел текучести, η – коэффициент вязкости, σ_i – компоненты главных напряжений, ε_k^p – компоненты главных скоростей пластических деформаций.

Связь скоростей необратимых деформаций с напряжениями устанавливается ассоциированным законом пластического течения

$$\varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad f\left(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p\right) = k, \quad \lambda > 0. \tag{1.6}$$

2. Начальное упругое равновесие. Пусть несжимаемый упруговязкопластический материал, деформационные свойства которого описаны выше, находится между двумя жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями: неподвижной внешней поверхностью, радиус которой равен *R*, и внутренней, радиусом $r = r_0$, которая движется вдоль оси z. Таким образом, решение данной краевой задачи ищется в цилиндрической системе координат r, θ, z. Искать его будем в классе функций $u = u_z(r,t), v = v_z(r,t), p = p(r,z,t)$. Граничными условиями задачи являются

$$\begin{aligned} &u(R,t) = v(R,t) = 0, \\ &v(r_0,t) = \alpha t. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Полагаем, что до момента времени $t_0 = 0$ материал деформировался упруго, а с этого момента времени в окрестности внутренней (подвижной) жесткой стенки начинается пластическое течение. Вычислим параметры данного упругого равновесного состояния, которое является начальным условием для последующего процесса необратимого деформирования.

Для отличных от нуля компонент тензора деформаций в рассматриваемом случае имеем

$$d_{rr} = -\frac{1}{2}u'^2, \quad d_{rz} = \frac{1}{2}u', \quad u' = \frac{\partial u}{\partial r}. \tag{2.2}$$

Из (1.3), (1.4) и (2.2) для компонент напряжений с точностью до слагаемых второго порядка малости по компонентам градиента перемещений получим зависимости

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} &= -(p + 2\mu) - \frac{1}{2}(b + \mu)u'^2 = -s, \\ \sigma_{zz} &= -(p + 2\mu) - \frac{1}{2}(b - \mu)u'^2 = -s + \mu u'^2, \\ \sigma_{rz} &= \mu u'. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Согласно условиям равновесия

$$\sigma_{rz,r} + \sigma_{zz,z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0, \quad \sigma_{rr,r} + \sigma_{rz,z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0. \tag{2.4}$$

s является функцией только z, так что $s = az + a_0$. Для того, чтобы напряжения $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}$ и σ_{zz} были конечными при $z \to \infty$, необходимо положить $a = 0$. Тогда решение упругой задачи получаем в виде

$$\sigma_{rz} = \frac{c}{r}, \quad u = \frac{c}{\mu}\ln\frac{r}{R},$$

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = -a_0\,, \quad \sigma_{zz} = -a_0 + \frac{c^2}{\mu r^2}\,. \tag{2.5}$$

Для нахождения компоненты перемещения и использовалось первое граничное условие (2.1). Для определения постоянной с воспользуемся условием пластичности (1.5), которое в нашем случае принимает форму

$$\sigma_{rz}\Big|_{r=r_0} = -k\,. \tag{2.6}$$

Постоянная a_0 влияет только на распределение компонент нормальных напряжений. Поэтому её можно считать заданной величиной, как остающейся постоянной во время пластического течения, так и изменяющейся со временем. Величина u_0, на которую, таким образом, необходимо сдвинуть внутреннюю поверхность для начала на ней пластического течения, равна

$$u_0 = \frac{k}{\mu} r_0 \ln\frac{R}{r_0}\,. \tag{2.7}$$

Компоненты обратимых деформаций по найденному полю перемещений согласно (1.2) определяются зависимостями

$$e_{rz} = \frac{1}{2}u' = -\frac{1}{2}\frac{k}{\mu}\frac{r_0}{r}\,,$$

$$e_{rr} = -\frac{3}{2}e_{rz}^2\,, \quad e_{zz} = \frac{1}{2}e_{rz}^2\,. \tag{2.8}$$

3. Вязкопластическое течение. Положим далее, что, начиная с момента времени $t_0 = 0$, внутренняя поверхность движется со скоростью $v = \alpha t$, $\alpha = const$. При этом развивающаяся область необратимого деформирования будет ограничена поверхностями $r_0 \le r \le r_1(t)$. В области $r_1(t) \le r \le R$ материал остается в упругом состоянии. Рассчитаем параметры напряженно-деформированного состояния, соответствующего скорости $v^* = \alpha t_1 (t \ge t_0)$ при $r = r_0$.

В области обратимого деформирования $r_1 \le r \le R$, интегрируя уравнение равновесия (квазистатическое приближение), как и ранее, найдем

$$\sigma_{rz} = \frac{c(t_1)}{r}\,, \; u = \frac{c(t_1)}{\mu}\ln\frac{r}{R}\,, \;\; v = 0\,. \tag{3.1}$$

Согласно формуле Мурнагана (1.3) при $p_{ij} \ne 0$ с учётом кинематических зависимостей (2.8) для компонент напряжений в области пластического течения получим

$$\begin{gathered}\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = -(p_1 + 2\mu) - 2(b+\mu)e_{rz}^2 = -s_1\,,\\ \sigma_{zz} = -(p_1 + 2\mu) - 2(b-\mu)e_{rz}^2 = -s_1 + 4\mu e_{rz}^2\,,\\ \sigma_{rz} = 2\mu e_{rz}\,.\end{gathered} \tag{3.2}$$

С другой стороны, интегрируя уравнения равновесия в области пластического течения $r_0 \le r \le r_1(t)$, можно получить

$$s_1 = a_1, \quad \sigma_{rz} = \frac{c_1(t_1)}{r}, \quad e_{rz} = \frac{c_1(t_1)}{2\mu r}. \tag{3.3}$$

Из условий непрерывности компонент напряжений на упругопластической границе $r = r_1(t)$ следует, что

$$a_1 = a_0, \quad c_1(t_1) = c(t_1).$$

Пластический потенциал (1.5) в нашем случае запишется в форме

$$f\left(\sigma_{rz}, \varepsilon_{rz}^p\right) = \sigma_{rz}^2 - \left(k - \eta\varepsilon_{rz}^p\right)^2 = 0. \tag{3.4}$$

Следуя ассоциированному закону пластического течения (1.6), из (3.4) найдем

$$\sigma_{rz} = -k + \eta\varepsilon_{rz}^p, \quad \lambda = \frac{\varepsilon_{rz}^p}{\eta\varepsilon_{rz}^p - k}. \tag{3.5}$$

Сравнение (3.3) и (3.5) позволяет найти скорость пластической деформации

$$\varepsilon_{rz}^p = \frac{1}{\eta}\left(\frac{c(t_1)}{r} + k\right). \tag{3.6}$$

Учитывая, что на упругопластической границе $r = r_1(t)$, $\varepsilon_{rz}^p = 0$, получим

$$r_1 = -\frac{c}{k}. \tag{3.7}$$

Кинематические зависимости

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}v_{z,r} = \varepsilon_{rz}^e + \varepsilon_{rz}^p,$$

$$d_{rz} = e_{rz} + p_{rz}, \tag{3.8}$$

имеющие место в рассматриваемом случае, позволяют найти скорости точек в области пластического течения

$$v = \frac{2}{\eta}\left(c\ln\frac{r}{r_0} + k(r - r_0)\right) + v^*. \tag{3.9}$$

Из условия равенства скоростей (3.1) и (3.9) на упругопластической границе $r = r_1$, учитывая (3.7), получаем уравнение для определения значения r_1, соответствующего значению скорости $v^* = \alpha t_1$ на поверхности $r = r_0$

$$k\left[r_1\left(\ln\frac{r_1}{r_0} - 1\right) + r_0\right] = \frac{\eta\alpha t_1}{2}. \tag{3.10}$$

Перемещение в области необратимого деформирования находится интегрированием (3.9) с точностью до произвольной функции $f(r)$

$$u = \frac{2t}{\eta}\left(c\ln\frac{r}{r_0} + k(r - r_0)\right) + v^* t + f(r). \tag{3.11}$$

Функция $f(r)$ должна быть такой, чтобы перемещения (3.1) и (3.11) и их производные u' были непрерывны при $r = r_1$, а также, чтобы перемещения (2.7) и (3.11) совпадали при $t = t_0 = 0$. Таким образом, получим

$$f(r) = \frac{c}{\mu} \ln \frac{r}{R} . \tag{3.12}$$

Окончательное решение задачи о вязкопластическом течении представляется зависимостями:

в упругой области

$$\sigma_{rz} = -k \frac{r_1}{r}, \quad u = \frac{k}{\mu} r_1 \ln \frac{R}{r}, \quad v = 0 , \quad e_{rz} = -\frac{k}{2\mu} \frac{r_1}{r} ;$$

в области вязкопластического течения

$$u = \frac{2kt}{\eta} \left(r_1 \ln \frac{r_0}{r} + r - r_0 \right) + v^* t + \frac{k}{\mu} r_1 \ln \frac{R}{r} ,$$

$$v = \dot{u} ,$$

$$\varepsilon_{rz}^{p} = \frac{k}{\eta} \left(1 - \frac{r_1}{r} \right) .$$

Обратимые деформации, а, следовательно, и напряжения в области вязкопластического течения вычисляются по тем же зависимостям, что и в упругой области. Необратимые деформации согласно (1.2) находятся соотношениями

$$p_{rz} = \frac{kt}{\eta} \left(1 - \frac{r_1}{r} \right), \quad p_{zz} = 2 e_{rz} p_{rz} ,$$

$$p_{rr} = 2 e_{rz} \left(e_{rz} + p_{rz} \right) - \frac{1}{2} u'^2 . \tag{3.13}$$

Развитие границы области вязкопластического течения $r_1 \to \frac{r_1}{R}$ от времени $\tau = \frac{\alpha t^2}{r_0}$ при значениях постоянных

$$\frac{r_0}{R} = 0.2 ; \quad \frac{k}{\mu} = 0.00621 , \quad b = \frac{\mu}{\eta} \sqrt{\frac{r_0}{\alpha}} = 400 \tag{3.14}$$

приведено на рис.1, распределение перемещений $u \to \frac{u}{R}$ при $\frac{r_1}{R} = 0.8$ – на рис. 2

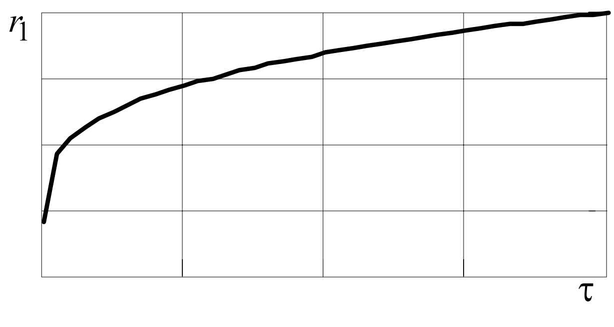

Рис. 1. Изменение границы области вязкопластического течения

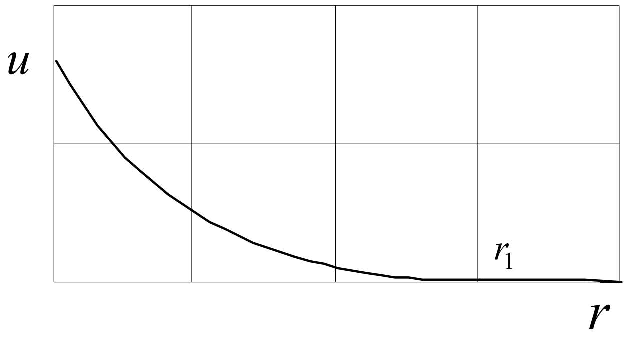

Рис. 2. Распределение перемещений в текущий момент времени

4. Разгрузка. Пусть, начиная с некоторого момента времени $t = t_1$, скорость поверхности $r = r_0$ уменьшается, например, по закону

$$v = \alpha t_1 - \beta(t - t_1) \tag{4.1}$$

до нуля, то есть конечным моментом разгрузки является $t_k = \left(\frac{\alpha}{\beta} + 1\right) t_1$. Рассмотрим изменение параметров напряженно-деформированного состояния в каждый момент времени $t_1 \le t^* \le t_k$ процесса разгрузки.

Начиная с момента времени $t = t_1$, в материале присутствует 3 области: область обратимого деформирования $R \le r \le r_1$, область с не изменяющимися накопленными необратимыми деформациями $r_1 \le r \le r_2(t)$ и область $r_2(t) \le r \le r_0$, в которой продолжается пластическое течение.

Интегрируя уравнение равновесия в упругой области, также как и ранее, найдем

$$\sigma_{rz} = \frac{c(t^*)}{r}, \quad u = \frac{c(t^*)}{\mu} \ln \frac{r}{R}, \quad v = 0\,. \tag{4.2}$$

В области $r_1 \le r \le r_2(t)$ согласно уравнениям переноса изменяются компоненты p_{rr}, p_{zz} пластических деформаций и ε_{rr}^p, ε_{zz}^p скоростей необратимых деформаций за счет изменения упругих деформаций. Неизменной остается компонента деформаций p_{rz} ($\varepsilon_{rz}^p = 0$)

$$p_{rz} = \frac{k t_1}{\eta}\left(1 - \frac{r_1}{r}\right). \tag{4.3}$$

Перемещение в этой области найдем из условия $\frac{1}{2} u' = e_{rz} + p_{rz}$, постоянную интегрирования определяя из условия равенства перемещений при $r = r_1$

$$u = \frac{2 k t_1}{\eta}\left(r - r_1 + r_1 \ln \frac{r_1}{r}\right) + \frac{c(t^*)}{\mu} \ln \frac{r}{R}\,, \tag{4.4}$$

тогда скорость $v = \dot{u} = 0$.

В области продолжающегося пластического течения $r_2(t) \le r \le r_0$, также как были получены зависимости (3.6), (3.7), (3.9) и (3.11), найдем

$$\varepsilon_{rz}^{p} = \frac{1}{\eta}\left(\frac{c\left(t^*\right)}{r} + k\right), \quad r_2 = -\frac{c\left(t^*\right)}{k},$$

$$v = \frac{2}{\eta}\left(c\left(t^*\right)\ln\frac{r}{r_0} + k\left(r - r_0\right)\right) + v^* - \beta\left(t^* - t_1\right), \tag{4.5}$$

$$u = \frac{2t}{\eta}\left(c\left(t^*\right)\ln\frac{r}{r_0} + k\left(r - r_0\right)\right) + v^* t - \beta\left(t^* - t_1\right)t + g(r).$$

Из условий непрерывности перемещения и его производных при $r = r_2$ определим $g(r)$ и получим уравнение для определения значения r_2, соответствующего значению $v^* - \beta\left(t^* - t_1\right)$ скорости поверхности $r = r_0$

$$g(r) = \frac{2kt_1}{\eta}\left(r - r_1 + r_1\ln\frac{r_1}{r}\right) + \frac{c\left(t^*\right)}{\mu}\ln\frac{r}{R},$$

$$\frac{2k}{\eta}\left(r_2\left(\ln\frac{r_2}{r_0} - 1\right) + r_0\right) = v^* - \beta\left(t^* - t_1\right). \tag{4.6}$$

Изменение поверхности $r_2 \to \dfrac{r_2}{R}$ показано на рис. 3.

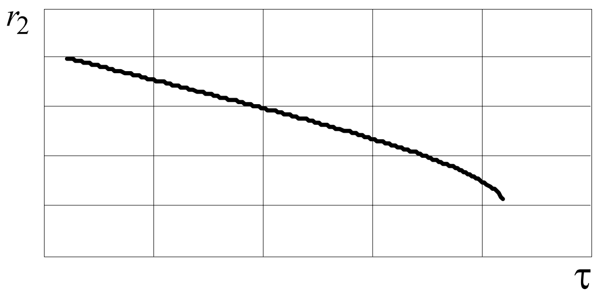

Рис. 3. Изменение границы области вязкопластического течения при разгрузке

Как видно, в конечный момент разгрузки $t = t_k$ r_2 совпадает с поверхностью $r = r_0$, и компонента p_{rz} деформаций будет постоянной в области $r_1 \le r \le r_0$.

В любой текущий момент процесса разгрузки t^* решение задачи определяется зависимостями:

в упругой области

$$\sigma_{rz} = -k\frac{r_2}{r}, \quad u = \frac{k}{\mu}r_2\ln\frac{R}{r}, \quad v = 0, \quad e_{rz} = -\frac{k}{2\mu}\frac{r_2}{r};$$

в области $r_1 \le r \le r_2(t)$

$$u=\frac{2kt_1}{\eta}\left(r-r_1+r_1\ln\frac{r_1}{r}\right)-\frac{k}{\mu}r_2\ln\frac{r}{R},\ v=0;$$

$$p_{rz}=\frac{kt_1}{\eta}\left(1-\frac{r_1}{r}\right);$$

в области вязкопластического течения $r_2(t)\le r\le r_0$

$$u=\frac{2kt}{\eta}\left(r-r_0-r_2\ln\frac{r}{r_0}\right)+\frac{2kt_1}{\eta}\left(r-r_1+r_1\ln\frac{r_1}{r}\right)-\frac{k}{\mu}r_2\ln\frac{r}{R}+v^*t-\beta\left(t^*-t_1\right)t,$$

$$v=\dot u,\quad p_{rz}=\frac{kt}{\eta}\left(1-\frac{r_2}{r}\right)+\frac{kt_1}{\eta}\left(1-\frac{r_1}{r}\right).$$

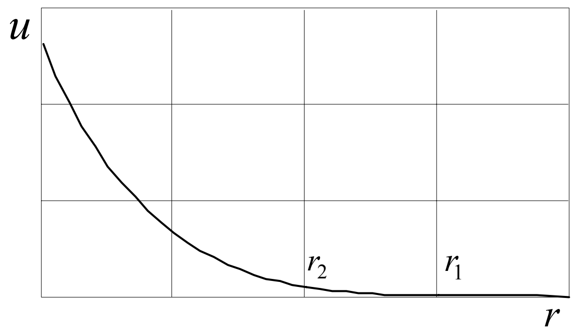

Рис. 4. Распределение перемещений в текущий момент разгрузки

В конечный момент разгрузки $t=t_k$ компонента остаточных напряжений $\sigma_{rz}=-\frac{kr_0}{r}$, то есть она равно тому же самому значению, что и в момент начала пластического течения.

Распределение перемещений в текущий момент разгрузки показано на рис. 4.

г. Владивосток
Поступила: 30 ноября 2007 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Буренин, А. А.* Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях / А. А. Буренин, Г. И. Быковцев, Л. В. Ковтанюк // Докл. АН СССР. – 1996. Т.347. – №2. – С. 199–201.

2. *Буренин, А. А.* Продавливание упруговязкопластического материала между двумя жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, А. Л. Мазелис // Прикладная математика и механика. – 2006. Т. 70. Вып. 3. – С. 481–489.

3. *Быковцев, Г. И.* О вязкопластическом течении в некруговых цилиндрах при наличии перепада давления / Г. И. Быковцев, А. Д. Чернышов // ПМТФ. – 1964. – №4. – С. 94–96.

4. *Знаменский, В. А.* Об уравнениях вязкопластического тела при кусочно-линейных потенциалах / В. А. Знаменский, Д. Д. Ивлев // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1963. – № 6. – С. 114–118.

5. *Ковтанюк, Л. В.* Вязкопластическое течение и остаточные напряжения в тяжелом слое несжимаемого материала, находящегося на наклонной плоскости. / Л. В. Ковтанюк // Математические модели и методы механики сплошных сред. Сборник научных трудов к 60-летию А. А. Буренина. Владивосток : ИАПУ ДВО РАН, – 2007. – С. 120–128.

6. *Ковтанюк, Л. В.* О продавливании упруговязкопластического материала через жесткую круговую цилиндрическую матрицу / Л. В. Ковтанюк // ДАН. – 2005. Т. 400. – №6. – С. 764–767.

7. *Ковтанюк, Л. В.* О теории больших упругопластических деформаций при учете температурных и реологических эффектов / Л. В. Ковтанюк, А. В. Шитиков // Вестник ДВО РАН. – 2006. – №4. – С. 87–93.

8. *Мосолов, П. П.* Механика жесткопластических сред. / П. П. Мосолов, В. П. Мясников. – М. : Наука, 1981. – 208 с.

9. *Мясников, В. П.* Некоторые точные решения для прямолинейных движений вязкопластической среды / В. П. Мясников // ПМТФ. – 1961. – № 2. – С. 79–86.

10. *Огибалов, П. М.* Нестационарные движения вязкопластических сред / П. М. Огибалов, А. Х. Мирзаджанзаде. – М. : Изд-во Московского университета, 1970. – 415 с.

11. *Резунов, А. В.* Задача о чистом сдвиге вязко-пластического материала между двумя цилиндрическими поверхностями / А. В. Резунов, А. Д. Чернышов // Механика деформируемого твердого тела. Межвузовский сборник. – Куйбышев : Изд-во Волжская коммуна. 1975. – С. 32–36.