Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 4 (22). С. 157–166

В. Н. Орлов, Т. Ю. Леонтьева

ПОСТРОЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ОКРЕСТНОСТИ ПОДВИЖНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. В быстро развивающемся современном мире особое место занимают дифференциальные уравнения, которые являются математическими моделями многих процессов и явлений, происходящих в различных сферах деятельности человека. Исследования в физической, экономической и социальной областях часто сталкиваются с необходимостью решения дифференциальных уравнений, что требует развитого аппарата теории дифференциальных уравнений. Но если теория линейных дифференциальных уравнений соответствует предъявляемым к ней требованиям, то нелинейные дифференциальные уравнения изучены недостаточно. Существенным препятствием здесь является наличие подвижных особых точек, которые позволяют относить нелинейные дифференциальные уравнения к категории в общем случае не разрешимых в квадратурах [1]. В статье используется метод решения вышеуказанных уравнений, предложенный в работах [2], [3].

В данной работе дается обобщение результатов, полученных в статье [4], на комплексную область.

Ключевые слова: подвижная особая точка, нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка, приближенное решение, окрестность подвижной особой точки, комплексная область, апостериорная оценка погрешности.

УДК: 517.928.4

Материалы и методы решения задачи и принятые допущения. Нелинейные дифференциальные уравнения допускают разрешимость в квадратурах лишь в частных случаях. Наибольших результатов в этой области достигнуты Белорусской школой, в частности [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11]. Метод, предложенный в работах [2] и [3], существенно расширяет круг нелинейных дифференциальных уравнений, для которых возможно получение приближенного решения нелинейного дифференциального уравнения в окрестности подвижной особой точки с заданной точностью. Для решения задачи использовались методы аналитической теории дифференциальных уравнений, вычислительной математики, математического анализа и программного обеспечения для персональных компьютеров при получении аналитических выражений коэффициентов.

Результаты. Рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y''(z) = b_0(z)\,y^5(z) + b_1(z)\,y^4(z) + b_2(z)\,y^3(z) + b_3(z)\,y^2(z) + b_4(z)\,y(z) + b_5(z), \qquad (1)$$

где $b_i, i = 0, 1, ..., 5,$ – аналитические функции в рассматриваемой области. Введя обозначение

Поступила 10.11.2014

$$y(x) = \frac{u(z)}{\sqrt[4]{b_0(z)}} - \frac{b_1(z)}{5b_0(z)},$$

учитывая выполнение условий

$$\frac{b_1(z)}{5b_0(z)} = \frac{b_2(z)}{2b_1(z)} = \frac{b_3(z)}{b_2(z)} = \frac{2\left(b_4(z) + \frac{b_0^?(z)}{4b_0(z)} - \frac{5}{16}\left(\frac{b_0^?(z)}{b_0(z)}\right)^2\right)}{b_3(z)},$$

уравнение (1) приводится к нормальной форме [4]:

$$u''(z) = u^5(z) + r(z),$$

где

$$r(z) = -\frac{b_1^5(z)\sqrt[4]{b_0(z)}}{5^5 b_0^4(z)} - \frac{3b_0^?(z)\sqrt[4]{b_0(z)}}{20b_0^2(z)} + b_5(z)\sqrt[4]{b_0(z)} + \frac{b_1^?(z)\sqrt[4]{b_0(z)}}{5b_0(z)} - \frac{2b_0'(z)\,b_1'(z)\sqrt[4]{b_0(z)}}{5b_0^2(z)} +$$

$$+\frac{2\left(b_0'(z)\right)^2 b_1(z)\sqrt[4]{b_0(z)}}{5b_0^3(z)} - \frac{\left(b_0^?(z)\right)^2 b_1(z)\sqrt[4]{b_0(z)}}{16b_0^3(z)} + \frac{b_0'(z)}{2b_0(z)}u'(z),$$

в каждой области, в которой $b_0(z) \neq 0$.

Рассмотрим задачу Коши:

$$y''(z) = y^5(z) + r(z), \tag{2}$$

$$y(z_0) = y_0, y'(z_0) = y_1. \tag{3}$$

Теорема 1. Пусть z^* *подвижная особая точка* $y(z)$ *задачи (2)-(3) и функция* $r(z)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

$$r(z) \in C^1 \text{в области} \quad |z^* - z| < \rho_0, \quad \rho_0 = const > 0;$$

$$\exists M_0 : \frac{\left|r^{(n)}(z^*)\right|}{n!} \leq M_0, \quad M_0 = const, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Тогда существует единственное решение задачи Коши (2)–(3) в виде

$$y(z) = (z^* - z)^{-1/2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z^* - z)^{n/2}, \quad C_0 \neq 0, \tag{4}$$

правильная часть которого сходится в области

$$|z^* - z| < \rho_2, \tag{5}$$

где $\rho_2 = \min\{\rho_0, \rho_1\}, \rho_1 = \frac{1}{4\cdot\sqrt[5]{(M+1)^2}}$, $M = \max\{M_0, \alpha\}$, *где* α *– параметр, зависящий от условий (3).*

Доказательство. В общем случае имеем

$$y(z) = (z^* - z)^{\rho} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z^* - z)^{n/2}, \quad C_0 \neq 0, \tag{6}$$

а по условию теоремы

$$r(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z^* - z)^n, \tag{7}$$

тогда из уравнения (2) получим

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(z^* - z\right)^{n/2+\rho}\right)^{?} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(z^* - z\right)^{n/2+\rho}\right)^5 + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(z^* - z\right)^n.$$

Продифференцировав левую часть и возведя в пятую степень первое слагаемое правой части, данное уравнение приводится к виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(n/2 + \rho\right)\left(n/2 + \rho - 1\right)\left(z^* - z\right)^{n/2+\rho-2} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} D_n^{**} \left(z^* - z\right)^{n/2+5\rho} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(z^* - z\right)^n, \tag{8}$$

где $D_n^{**} = \sum\limits_{i=0}^{n} D_{n-i}^{*} C_i$, $D_n^{*} = \sum\limits_{i=0}^{n} D_{n-i} D_i$, $D_n = \sum\limits_{i=0}^{n} C_{n-i} C_i$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Из равенства (8) получим необходимые условия тождества:

$$n/2 + \rho - 2 = n/2 + 5\rho, \tag{9}$$

$$C_n \left(n/2 + \rho\right)\left(n/2 + \rho - 1\right) = D_n^{**}, \tag{10}$$

где

$$D_n^{**} = \left\{ \begin{array}{l} D_n^{**}, n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, ..., 2k\}, \\ D_n^{**} + B_{n-5}, n \in \{5, 7, 9, ..., 2k+1\} \end{array} \right. . \tag{11}$$

Из условия (9) следует $\rho = -1/2$, а из второго равенства можно однозначно определить все коэффициенты C_n. Исходя из предположения о характере особой точки z^*, приходим к выводу, что $C_0 \neq 0$.

Из соотношения (10) следует, что $C_0 = \sqrt[4]{\frac{3}{4}}$, $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$, $C_5 = -\frac{4}{7}A_0$, $C_6 = \alpha$, $C_7 = \frac{4}{9}A_1$, $C_8 = 0$, $C_9 = \frac{4}{33}A_2$, $C_{10} = \frac{20}{147}\sqrt[4]{\frac{27}{4}}A_0^2$, где α – параметр, зависящий от начальных условий (3). Вышеуказанное позволяет получить однозначно формальное представление решения задачи (2)–(3) в окрестности точки z^* в виде (4).

Докажем сходимость правильной части ряда (4) в области (5). Из условия теоремы имеем

$$M = \sup_n \frac{\left|r^{(n)}\left(z^*\right)\right|}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, ...,$$

тогда для коэффициентов ряда (6) справедлива оценка

$$|A_n| \le M. \tag{12}$$

Из выражения (10) с учетом (11)–(12) для коэффициентов C_n предполагаем оценку:

$$|\mathrm{C}_n| \le \frac{1}{(n+2)(n-6)} 2^n M \left(M+1\right)^{[n/5]} = v_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{13}$$

С учетом специфики образования коэффициентов C_n, методом математической индукции докажем эту оценку для C_{n+1}, в случае $n + 1 = 5\left(2k+1\right) = 10k + 5$.

$$\left|C_{10k+5}\left((10k+5)/2 + \rho\right)\left((10k+5)/2 + \rho - 1\right)\right| \le \left|D_{10k+5}^{**}\right| \le \left|D_{10k+5}^{**} + A_{10k}\right| \le \left|D_{10k+5}^{**}\right| + \left|A_{10k}\right| \le$$

$$\leq \left| \sum_{i=0}^{10k+5} D^*_{10k+5-i} C_i \right| + |A_{10k+5}| \leq \left| \sum_{i=0}^{10k+5} \left(\sum_{j=0}^{10k+5-i} D_{10k+5-i-j} D_j \right) C_i \right| + |A_{10k+5}| \leq$$

$$\leq \left| \sum_{i=0}^{10k+5} \left(\sum_{j=0}^{10k+5-i} \left(\sum_{m=0}^{10k+5-i-j} C_{10k+5-i-j-m} C_m \right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{j} C_{j-l} C_l \right) \right) C_i \right| + |A_{10k+5}|,$$

тогда при $\rho = -1/2$, после ряда преобразований, следует

$$|C_{10k+5}| \leq \frac{2^2}{(10k+7)(10k-1)} \times$$

$$\times \left| \sum_{i=1}^{10k} \left(\sum_{j=1}^{10k-i} \left(\sum_{m=1}^{10k-i-j} \frac{2^{10k-i-j-m} M (M+1)^{\frac{10k-i-j-m}{5}}}{(10k-i-j-m+2)(10k-i-j-m-6)^*} \times \right.\right.\right.$$

$$\left.\left. \times \frac{2^m M (M+1)^{\frac{m}{5}}}{(m+2)(m-6)^*} \right) \cdot \left(\sum_{l=1}^{j} \frac{2^{j-l} M (M+1)^{\frac{j-l}{5}}}{(j-l+2)(j-l-6)^*} \cdot \frac{2^l M (M+1)^{\frac{l}{5}}}{(l+2)(l-6)^*} \right) \right) \times$$

$$\left. \times \frac{2^i M (M+1)^{\frac{i}{5}}}{(i+2)(i-6)^*} + M \right| \leq \frac{2^2}{(10k+7)(10k-1)} \times$$

$$\times \left(\sum_{i=1}^{10k} \left(\sum_{j=1}^{10k-i} \left(2^{10k-i-j} M^2 (M+1)^{\frac{10k-i-j}{5}} \cdot 2^j M^2 (M+1)^{\frac{j}{5}} \times \right.\right.\right.$$

$$\times \left(\sum_{m=1}^{10k-i-j} \frac{1}{(m+2)(m-6)^* (10k-i-j-m+2)(10k-i-j-m-6)^*} \right) \times$$

$$\left.\left.\left. \times \left(\sum_{l=1}^{j} \frac{1}{(l+2)(l-6)^* (j-l+2)(j-l-6)^*} \right) \right) \right) \cdot \frac{2^i M (M+1)^{\frac{i}{5}}}{(i+2)(i-6)^*} + M \right) \leq$$

$$\leq \frac{2^2}{(10k+7)(10k-1)} \cdot 2^{10k} M^5 (M+1)^{2k} \cdot 2 \left(1 + \frac{1}{2^{10k} M^4 (M+1)^{2k}} \right) \leq$$

$$\leq \frac{2^{10k+2} M (M+1)^{2k}}{(10k+7)(10k-1)} \cdot 2^2 \leq \frac{2^{10k+5} M (M+1)^{2k+1}}{(10k+7)(10k-1)},$$

где $(10k-i-j-m-6)^* = \begin{cases} 1, (10k-i-j-m) = 1,2,3,4,5,6, \\ (10k-i-j-m-6), (10k-i-j-m) = 7,8,9,\ldots \end{cases}$, $(j-l-6)^* = \begin{cases} 1, (j-l) = 1,2,3,4,5,6, \\ (j-l-6), (j-l) = 7,8,9,\ldots \end{cases}$, $(m-6)^* = \begin{cases} 1, m = 1,2,3,4,5,6, \\ (m-6), m = 7,8,9,\ldots \end{cases}$, $(l-6)^* = \begin{cases} 1, l = 1,2,3,4,5,6, \\ (l-6), l = 7,8,9,\ldots \end{cases}$, $(i-6)^* = \begin{cases} 1, i = 1,2,3,4,5,6, \\ (i-6), i = 7,8,9,\ldots \end{cases}$. Аналогичную ситуацию имеем и в случае $n+1 = 10k+1$, $n+1 = 10k+2$, $n+1 = 10k+3$, $n+1 = 10k+4$.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n |z^* - z|^{(n-1)/2}, \tag{14}$$

который является мажорирующим для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \left|z^* - z\right|^{(n-1)/2}.$$

Учитывая закономерность структуры коэффициентов C_n, ряд (14) представим в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n \left|z^* - z\right|^{(n-1)/2} = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} v_{5k} \left|z^* - z\right|^{(5k-5)/2} + \sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} v_{5\mathrm{k}+1} \left|z^* - z\right|^{(5\mathrm{k}-4)/2} +$$

$$+ \sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} v_{5\mathrm{k}+2} \left|z^* - z\right|^{(5\mathrm{k}-3)/2} + \sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} v_{5\mathrm{k}+3} \left|z^* - z\right|^{(5\mathrm{k}-2)/2} + \sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} v_{5\mathrm{k}+4} \left|z^* - z\right|^{(5\mathrm{k}-1)/2}.$$

Откуда на основании признака Даламбера устанавливаем сходимость ряда (14) в области $\rho_1 = \frac{1}{4\cdot \sqrt[5]{(\mathrm{M}+1)^2}}$. Пологая $\rho_2 = \min\{\rho_0, \rho_1\}$, получаем сходимость ряда (4) в области (5), что доказывает нашу теорему.

Полученные в данной теореме оценки позволяют построить приближенное решение задачи (2)–(3):

$$y_N(z) = (z^* - z)^{-\frac{1}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{N} C_n (z^* - z)^{\frac{n}{2}}, \quad C_0 \neq 0. \tag{15}$$

Теорема 2. *Пусть выполняются п. п. 1 и 2 теоремы 1, тогда для приближенного решения (15) задачи (2)–(3) в области $|z^* - z| < \rho_2$ справедлива оценка погрешности*

$$\Delta y_N(z) = |y(z) - y_N(z)| \le \Delta, \tag{16}$$

где

$$\Delta \le \frac{2^{5n} \cdot M(M+1)^n \left|z^* - z\right|^{(5n-1)/2}}{1 - 2^5 \cdot (M+1) \cdot \left|z^* - z\right|^{5/2}} \cdot \left(\frac{1}{(5n+2)(5n-6)} + \frac{2 \cdot \left|z^* - z\right|^{1/2}}{(5n+3)(5n-5)} + \right.$$

$$\left. + \frac{2^2 \cdot \left|z^* - z\right|}{(5n+4)(5n-4)} + \frac{2^3 \cdot \left|z^* - z\right|^{3/2}}{(5n+5)(5n-3)} + \frac{2^4 \cdot \left|z^* - z\right|^2}{(5n+6)(5n-2)} \right),$$

в случае $N+1 = 5n$. Для вариантов $N+1 = 5n+1$, $N+1 = 5n+2$, $N+1 = 5n+3$, $N+1 = 5n+4$ соответственно:

$$\Delta \le \frac{2^{5n+1} \cdot M(M+1)^n \left|z^* - z\right|^{5n/2}}{1 - 2^5 \cdot (M+1) \cdot \left|z^* - z\right|^{5/2}} \cdot \left(\frac{1}{(5n+3)(5n-5)} + \frac{2 \cdot \left|z^* - z\right|^{1/2}}{(5n+4)(5n-4)} + \right.$$

$$\left. + \frac{2^2 \cdot \left|z^* - z\right|}{(5n+5)(5n-3)} + \frac{2^3 \cdot \left|z^* - z\right|^{3/2}}{(5n+6)(5n-2)} + \frac{2^4 \cdot (M+1) \cdot \left|z^* - z\right|^2}{(5n+7)(5n-1)} \right),$$

$$\Delta \le \frac{2^{5n+2} \cdot M(M+1)^n \left|z^* - z\right|^{(5n+1)/2}}{1 - 2^5 \cdot (M+1) \cdot \left|z^* - z\right|^{5/2}} \cdot \left(\frac{1}{(5n+4)(5n-4)} + \frac{2 \cdot \left|z^* - z\right|^{1/2}}{(5n+5)(5n-3)} + \right.$$

$$\left. + \frac{2^2 \cdot \left|z^* - z\right|}{(5n+6)(5n-2)} + \frac{2^3 \cdot (\mathrm{M}+1) \cdot \left|z^* - z\right|^{3/2}}{(5n+7)(5n-1)} + \frac{2^4 \cdot (\mathrm{M}+1) \cdot \left|z^* - z\right|^2}{(5n+8)\, 5n} \right),$$

$$\Delta \le \frac{2^{5n+3} \cdot M(M+1)^n \left|z^* - z\right|^{(5n+2)/2}}{1 - 2^5 \cdot (M+1) \cdot \left|z^* - z\right|^{5/2}} \cdot \left(\frac{1}{(5n+5)(5n-3)} + \frac{2 \cdot \left|z^* - z\right|^{1/2}}{(5n+6)(5n-2)} + \right.$$

$$+\frac{2^2\cdot(\mathrm{M}+1)\cdot|z^*-z|}{(5n+7)(5n-1)}+\frac{2^3\cdot(\mathrm{M}+1)\cdot|z^*-z|^{3/2}}{(5n+8)\,5n}+\frac{2^4\cdot(\mathrm{M}+1)\cdot|z^*-z|^2}{(5n+9)(5n+1)}\Bigg),$$

$$\Delta\le\frac{2^{5n+4}\cdot M\,(M+1)^n\,|z^*-z|^{(5n+3)/2}}{1-2^5\cdot(M+1)\cdot|z^*-z|^{5/2}}\cdot\Bigg(\frac{1}{(5n+6)(5n-2)}+\frac{2\cdot(\mathrm{M}+1)\cdot|z^*-z|^{1/2}}{(5n+7)(5n-1)}+$$

$$+\frac{2^2\cdot(\mathrm{M}+1)\cdot|z^*-z|}{(5n+8)\,5n}+\frac{2^3\cdot(\mathrm{M}+1)\cdot|z^*-z|^{3/2}}{(5n+9)(5n+1)}+\frac{2^4\cdot(\mathrm{M}+1)\cdot|z^*-z|^2}{(5n+10)(5n+2)}\Bigg),$$

при этом $\rho_2=\min\left\{\rho_0,\frac{1}{4\cdot\sqrt[5]{(M+1)^2}}\right\}$, $M=\max\{M_0,\alpha\}$, *где* α *– параметр, зависящий от условий (3).*

Доказательство. По определению

$$\Delta y_N(z)=|y(z)-y_N(z)|=\left|\sum_{n=0}^{\infty}C_n\,(z^*-z)^{\frac{n-1}{2}}-\sum_{n=0}^{N}C_n\,(z^*-z)^{\frac{n-1}{2}}\right|=$$

$$=\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}C_n\,(z^*-z)^{\frac{n-1}{2}}\right|\le\sum_{n=N+1}^{\infty}|C_n|\cdot|z^*-z|^{\frac{n-1}{2}}.$$

Учитывая закономерность образования коэффициентов C_n из теоремы 1, имеем

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}|C_n|\cdot|z^*-z|^{\frac{n-1}{2}}=\sum_{k=N+1}^{\infty}\left|C_{5\mathrm{k}}\right|\cdot|z^*-z|^{\frac{5\mathrm{k}-1}{2}}+\sum_{\mathrm{k}=N+1}^{\infty}|C_{5k+1}|\cdot|z^*-z|^{\frac{5\mathrm{k}}{2}}+$$

$$+\sum_{\mathrm{k}=N+1}^{\infty}\left|C_{5\mathrm{k}+2}\right|\cdot|z^*-z|^{\frac{5k+1}{2}}+\sum_{\mathrm{k}=N+1}^{\infty}\left|C_{5\mathrm{k}+3}\right|\cdot|z^*-z|^{\frac{5\mathrm{k}+2}{2}}+\sum_{\mathrm{k}=N+1}^{\infty}\left|C_{5\mathrm{k}+4}\right|\cdot|z^*-z|^{\frac{5\mathrm{k}+3}{2}},$$

в случае $N+1=5k$ получаем:

$$\Delta=\sum_{\mathrm{k}=N+1}^{\infty}|C_{5k}|\cdot|z^*-z|^{\frac{5k-1}{2}}\le\frac{2^{5k}\cdot M\,(M+1)^k\,|z^*-z|^{(5k-1)/2}}{1-2^5\cdot(M+1)\cdot|z^*-z|^{5/2}}\cdot\Bigg(\frac{1}{(5k+2)(5k-6)}+$$

$$+\frac{2\cdot|z^*-z|^{1/2}}{(5k+3)(5k-5)}+\frac{2^2\cdot|z^*-z|}{(5k+4)(5k-4)}+\frac{2^3\cdot|z^*-z|^{3/2}}{(5k+5)(5k-3)}+\frac{2^4\cdot|z^*-z|^2}{(5k+6)(5k-2)}\Bigg).$$

Аналогично получаем оценки для коэффициентов $N+1=5\mathrm{k}+1, N+1=5\mathrm{k}+2, N+1=5\mathrm{k}+3, N+1=5\mathrm{k}+4$.

Пример. Найдем приближенное решение задачи (2)–(3) в случае $r(z)=0$ при начальных данных $y\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)=1+i$, $y'\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}i$ и $\alpha=0{,}001$. Данная задача имеет точное решение $y=\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{1+\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot i-2z}}$. Найдем радиус аналитичности $\rho_2\approx0{,}175723455$. Точное значение подвижной особой точки $z^*=\frac{1}{2}+\frac{2+\sqrt{3}}{4}i$. Выберем значение аргумента $z=\frac{1}{2}+\frac{4}{5}i\in|z^*-z|<\rho_2$. Применяя (14), $N=12$, вычислим приближенное значение функции. Произведенные расчеты приведены в таблице 1:

Таблица 1

z	y_{12}	y	Δy_{12}	Δy	$\Delta_1 y$
0,5+0,8i	1,804233648- 1,8043249i	1,804279274- 1,804279274i	0,0239	0,0000645	0,008

где y_{12} – приближенное решение (14); y – значение точного решения; Δy_{12} – оценка погрешности приближенного решения (15) по теореме 2; Δy – абсолютная погрешность приближенного решения y_{12}; $\Delta_1 y$ – апостериорная оценка погрешности, которая определяется путем решения обратной задачи теории погрешности. При апостериорной оценке погрешности равной $\varepsilon = 0,008$ получаем структуру приближенного решения (14) с $N = 20$, но с учетом того, что для номеров $n = 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20$ коэффициенты $C_n = 0$, а при $N = 18$ добавка не превышает $\varepsilon = 0,008$. Следовательно, приходим к выводу, что приближенное решение y_{12} имеет погрешность $\varepsilon = 0,008$.

Выводы. В статье доказана теорема существования и единственности решения рассматриваемого нелинейного дифференциального уравнения второго порядка, технология доказательства которого позволяет построить приближенное решение в окрестности подвижной особой точки в комплексной области. Получено практическое применение представления решения нелинейного дифференциального уравнения в ряд по дробным степеням.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Орлов, В. Н.* Связь нелинейного дифференциального уравнения с наличием и характером подвижных особых точек / В. Н. Орлов // Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемого твердого тела, математического моделирования и информационных технологий : сб. статей по материалам междунар. научно-практ. конференции (Чебоксары, 12–15 августа, 2013 г.). – Чебоксары : Чуваш. гос. пед. ун-т, 2013. – С. 30–35.

[2] *Орлов, В. Н.* Метод приближенного решения первого, второго дифференциальных уравнений Пенлеве и Абеля / В. Н. Орлов. – М. : МПГУ, 2013. – 174 с.

[3] *Орлов, В. Н.* Метод приближенного решения скалярного и матричного дифференциальных уравнений Риккати / В. Н. Орлов. – Чебоксары : Перфектум, 2012. – 112 с.

[4] *Орлов, В. Н.* Построение приближенного решения одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в области голоморфности / В. Н. Орлов, Т. Ю. Леонтьева // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. – 2013. – № 4 (80). – С. 156–162.

[5] *Яблонский, А. И.* К вопросу о числе полюсов решения второго уравнения Пенлеве / А. И. Яблонский // Докл. АН БССР. – 1959. – Т. 3. – № 6. – С. 237–238.

[6] *Дежурко, Ю. И.* О решениях с заданными свойствами у класса дифференциальных систем с рациональными правыми частями / Ю. И. Дежурко, Н. А. Лукашевич, А. В. Чичурин // Научно-техническая конференция "Памяти академика Л. П. Кравчука". – 12–15 мая, 1992. – Киев : КПИ. – С. 5–6.

[7] *Самодуров, А. А.* Простой способ определения времени задержки сверх-излучательной бозонной лавины / А. А. Самодуров, В. М. Чудновский // Докл. АН БССР. – 1985. – Т. 29. – № 1. – С. 9–10.

[8] *Мызгаева, С. А.* О подвижных особенностях решений системы Эйлера в одном частном случае / С. А. Мызгаева, А. И. Яблонский // Дифференциальные уравнения. – 1988. – Т. 24. – № 11. – С. 1824–1826.

[9] *Мататов, В. И.* О подвижных особенностях автономных систем Гамильтона / В. И. Мататов, Л. В. Сабынич // Вестник Белорусск. ун-та. Серия 1. – Минск, 1991. – 8 с.

[10] *Еругин, Н. П.* Проблема Римана / Н. П. Еругин. – Минск: Наука и техника, 1982. – 336 с.

[11] *Лукашевич, Н. А.* Интегрируемость уравнений Абеля общего вида через функции решения линейных уравнений / Н. А. Лукашевич, А. А. Самодуров // Дифференциальные уравнения. – 1977. – Т. 13. – № 5. – С. 859–863.

Орлов Виктор Николаевич,

доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой алгебры и геометрии, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: orlowvn@rambler.ru

Леонтьева Татьяна Юрьевна,

аспирант кафедры алгебры, Чувашский государственный педагогическый университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: betty2784@mail.ru

V. N. Orlov, T. Y. Leonteva

CONSTRUCTION OF THE APPROXIMATE SOLUTION OF ONE NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATION OF SECOND ORDER IN THE NEIGHBORHOOD OF THE MOVABLE SINGULAR POINT IN THE COMPLEX REGION

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. In the rapidly developing modern world occupy a special place differential equations, which are mathematical models of many processes and phenomena occurring in various spheres of human activity. Research in the physical, economic and social areas are often faced with the necessity of solving differential equations, which requires the development of the theory of differential equations. But if the theory of linear differential equations corresponds to more demands placed upon it, the nonlinear differential equations are studied not enough. A significant obstacle is the presence of movable singular points, which nonlinear differential equations relate to the category in general is not solvable in quadratures [1]. In the paper we use the method of solving the above equations, which proposed by Orlov V. N. [2], [3].

This article provides a summary of the results obtained in [4] to the complex region.

Keywords: movable singular point, nonlinear differential equation of the second order, approximate solution, neighborhood of the movable singular point, the complex region, posteriori error estimate.

REFERENCES

[1] *Orlov, V. N.* Communication of the nonlinear differential equation with existence and character of mobile special points / V. N. Orlov // International scientific-practical conference "Fundamental and applied problems of solid mechanics, mathematical modeling and information technology." – 12–15 August, 2013. – Cheboksary. – P. 30–35.

[2] *Orlov, V. N.* Method of approximate solutions of first, second Painlevé and Abel differential equations / V. N. Orlov. – M. : MPGU, 2013. – 174 p.

[3] *Orlov, V. N.* Method of approximate solutions of scalar and matrix Riccati differential equation / V. N. Orlov. – Cheboksary : Perfectum, 2012. – 112 p.

[4] *Orlov, V. N.* Construction of approximate solutions of a nonlinear differential equation of second order in a domain of holomorphy / V. N. Orlov, T. Y. Leonteva // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. – 2013. – No. 4 (80). – P. 156–162.

[5] *Yablonsky, A. I.* On the number of poles of solutions of the second Painlevé equation / A. I. Yablonsky // Dokl. BSSR. – 1959. – Vol. 3. – № 6. – P. 237–238.

[6] *Dezhurko, Y. I.* On solutions with desired properties in a class of differential systems with rational right side / Y. I. Dezhurko, N. A. Lukashevich, A. V. Chichurin // Scientific and Technical Conference "A Memory of Academician. P. Kravchuk" . – May 12–15, 1992. – Kiev : KPI. – P. 5–6.

[7] *Samodurov, A. A.* Simple way to determine the time delay over-boson radiative avalanche / A. A. Samodurov, V. M. Chudnovsky // Dokl. BSSR. – 1985. – Vol. 29. – № 1. – P. 9–10.

[8] *Myzgaeva, S. A.* On the movable singularities of solutions of the Euler system in a particular case / S. A. Myzgaeva, A. I. Yablonsky // Differential equations. – 1988. – 24. – № 11. – P. 1824–1826.

[9] *Matatov, V. I.* On mobile features of autonomous Hamiltonian systems / V. I. Matatov, L. V. Sabynich // Bulletin of the Belarusian. Univ. Series 1. – Minsk, 1991. – 8 p.

[10] *Erugin, N. P.* The Riemann problem / N. P. Erugin. – Minsk : Science and Technology, 1982. – 336 p.

[11] *Lukashevich, N. A.* Integrability of Abel equations of the general form of the functions for solving linear equations / N. A. Lukashevich, A. A. Samodurov // Differential equations. – 1977. – Vol. 13. – № 5. – P. 859–863.

Orlov, Victor Nikolayevich

Dr. of Phys. & Math. Sci., Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Leonteva, Tatyana Yorevna

Postgraduate Student, Department of Algebra, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary