

## О НАГРУЖЕНИИ ОКРЕСТНОСТИ ВЫРЕЗА В ЛИНЕЙНО УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ ПАРОЙ СИЛ

(Тульский государственный университет)

Рассматривается постановка задачи о нагружении выреза в линейно упругой плоскости парой сил. На основании полученной системы граничных интегральных уравнений предложен метод дискретного решения, приведены полученные результаты.

Механика квазихрупкого разрушения, базирующаяся на представлениях линейно упругого тела, рассматривает асимптотическое распределение напряженно-деформированного состояния вблизи свободного от нагрузки края трещины. Трещина в данном случае моделируется математическим разрезом и общее решение зависит от трех действительных параметров, которые присутствуют в качестве множителей при членах асимптотики. Другим модельным представлением трещиноподобного дефекта является разрез физический. Масштабный уровень данного разреза определяет подход к описанию процесса разрушения. Если это уровень кристаллической решетки [5;6], то процесс в данном случае описывается потенциалами межатомного взаимодействия. Альтернативным подходом является выбор масштабного уровня, где остаются справедливыми гипотезы механики сплошной среды [7]. Оценка данного уровня дана в работах [1;2]. К настоящему времени наиболее изученным и экспериментально обоснованным является предельное состояние трещины типа нормального отрыва. В этом случае задача разрушения может быть рассмотрена как посредством приложения сосредоточенных сил к берегам математического разреза, так и физического. Однако поворот соответствующих сил на девяносто градусов в одном направлении для физического разреза приведет к появлению пары сил. Рассмотрению соответствующего воздействия для линейно упругой среды и посвящена данная работа.

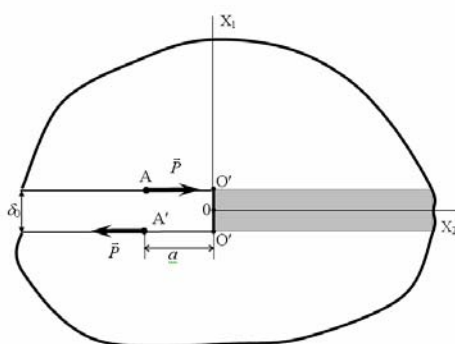


Рис.1

**Постановка задачи.** Рассмотрим нагружение окрестности выреза равным по толщине слою взаимодействия [1;2] в линейно упругой плоскости согласно схеме, показанной на рис. 1, соответствующей разрушению типа плоского сдвига.

Полагаем, что связь между напряжениями и деформациями описывается соотношениями линейной теории упругости для случая плоского деформирования. В силу антисимметрии внешней нагрузки относительно плоскости  $x_1 = 0$  рассмотрим верхнюю полуплоскость ( $x_1 \geq \delta_0/2$ ) (рис. 2), а действие слоя заменим нагрузкой на полуплоскость

$$\hat{q}(x) = -\left(\hat{\sigma}_{11}\bar{e}_1 + \hat{\sigma}_{21}\bar{e}_2\right) \quad (\text{здесь и далее } x \equiv x_2/\delta_0 - \text{ безразмерная координата;}$$

$\hat{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}\beta$   $i, j = 1, 2$  – безразмерные напряжения;  $\beta = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E}$  – параметр материала;  $E$  – модуль упругости;  $\nu$  – коэффициент Пуассона).

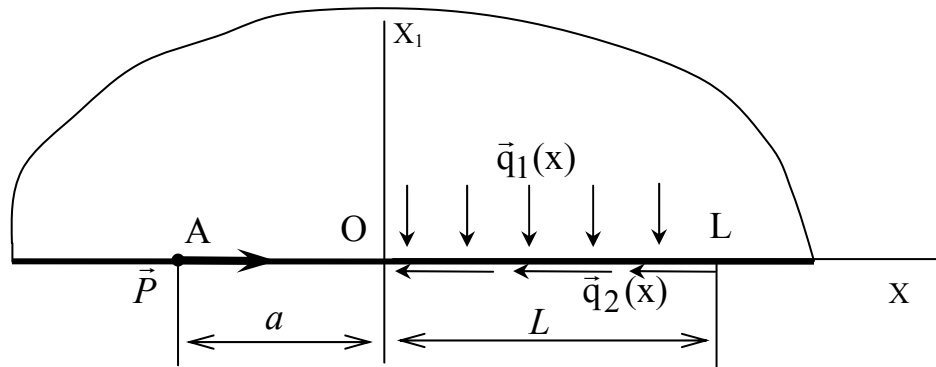


Рис. 2

Соотношения Фламана [4] связывают внешнюю нагрузку  $\hat{q}(x)$  с перемещениями границы безразмерным выражением

$$\hat{u}_2(x) = -\hat{P} \ln\left(\frac{x+a}{L+a}\right) + \int_0^L \hat{\sigma}_{21}(\xi) \ln\left|\frac{x-\xi}{L-\xi}\right| d\xi, \quad (1)$$

$$\hat{u}_1(x) = \int_0^L \hat{\sigma}_{11}(\xi) \ln\left|\frac{x-\xi}{L-\xi}\right| d\xi, \quad (2)$$

здесь  $\hat{u}_i(x) = \hat{u}_i(x_1, x) \Big|_{x_1=\delta_0/2} = u_i(x)/\delta_0$ ,  $i = 1, 2$  – безразмерные перемещения границы верх-

ней полуплоскости;  $\hat{P} = P\beta/\delta_0$  – безразмерная сила на единицу толщины;  $L$  – удаленная точка с нулевым перемещением;  $L$  – расстояние от начала координат до  $L$ .

Напряжения связаны с деформацией законом Гука в состоянии плоской деформации

$$\varepsilon_{11} = \hat{A}\hat{\sigma}_{11} - \hat{B}\hat{\sigma}_{22}, \quad (3)$$

$$\varepsilon_{21} = \hat{C}\hat{\sigma}_{21}, \quad (4)$$

где  $\hat{A} = \frac{(1-\nu^2)}{E\beta} = \frac{\pi}{2}$ ;  $\hat{B} = \frac{\nu(1+\nu)/E}{\beta} = \frac{\nu\pi}{2(1-\nu)}$ ;  $\hat{C} = \frac{2(1+\nu)}{E\beta} = \frac{\pi}{(1-\nu)}$  – безразмерные постоянные.

При дальнейшем изложении будем считать, что перемещение  $\hat{u}_2(x_1, x)$  в слое взаимодействия определяется следующим выражением

$$\hat{u}_2(x_1, x) = \left. \frac{\partial \hat{u}_2(x_1, x)}{\partial x_1} \right|_{x_1=0} x_1. \quad (5)$$

Рассмотрим деформацию материала слоя взаимодействия

$$\varepsilon_{21} = 0.5 \left( \frac{\partial \hat{u}_1(x_1, x)}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}_2(x_1, x)}{\partial x_1} \right).$$

Из равенства (5) следует, что

$$\left. \frac{\partial \hat{u}_2(x_1, x)}{\partial x_1} \right|_{x_1=0} = 2\hat{u}_2(x_1, x) \Big|_{x_1=\delta_0/2} = 2\hat{u}_2(x). \quad (6)$$

Из (4), (6) получим

$$\hat{u}_2 = \hat{C} \hat{\sigma}_{21} - 0.5 \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x}. \quad (7)$$

Преобразуем (1) при помощи (7)

$$\hat{C} \hat{\sigma}_{21}(x) - 0.5 \frac{\partial \hat{u}_1(x)}{\partial x} = -\hat{P} \ln \left( \frac{x+a}{L+a} \right) + \int_0^L \hat{\sigma}_{21}(\xi) \ln \frac{|x-\xi|}{L-\xi} d\xi. \quad (8)$$

Продифференцируем по  $x$  левую и правую части равенства (2)

$$\frac{d\hat{u}_1}{dx} = \int_0^L \hat{\sigma}_{11}(\xi) \frac{1}{(x-\xi)} d\xi. \quad (9)$$

Предполагаем, что в процессе приложения внешней нагрузки, согласно схеме рис. 1, выполняется условие антисимметрии по компоненте тензора напряжения  $\sigma_{11}$ . Следовательно, на срединной плоскости слоя взаимодействия  $x_1 = 0$  имеем

$$\sigma_{11}(x_1, x) \Big|_{x_1=0} = 0. \quad (10)$$

Из условий равновесия слоя  $\frac{\partial \hat{\sigma}_{11}}{\partial x_1} = -\frac{\partial \hat{\sigma}_{21}}{\partial x}$ , полагая закон изменения  $\sigma_{11}$  по координате  $x_1$  линейным, получим

$$\frac{\partial \hat{\sigma}_{11}(x_1, x)}{\partial x_1} = 2 \left( \hat{\sigma}_{11}(\delta_0/2, x) - \hat{\sigma}_{11}(0, x) \right) = 2 \hat{\sigma}_{11}(\delta_0/2, x).$$

С учетом условия (10) связь компонент тензора напряжений границе слоя принимает вид

$$\hat{\sigma}_{11} \Big|_{x_1=\delta_0/2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \hat{\sigma}_{21}}{\partial x} \Big|_{x_1=\delta_0/2}. \quad (11)$$

Уравнение равновесия слоя вида  $\frac{\partial \hat{\sigma}_{22}}{\partial x} = -\frac{\partial \hat{\sigma}_{21}}{\partial x_1}$  со связью (4) примет форму

$$\frac{\partial \hat{\sigma}_{22}}{\partial x} = -\frac{1}{\hat{C}} \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial x_1} = -0.5 \frac{1}{\hat{C}} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \hat{u}_1(x_1, x)}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}_2(x_1, x)}{\partial x_1} \right). \quad (12)$$

Из выражений (6) и (12) следует

$$\frac{\partial \hat{\sigma}_{22}}{\partial x} = -\frac{1}{2\hat{C}} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \hat{u}_1(x_1, x)}{\partial x} \right) = -\frac{1}{2\hat{C}} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \hat{u}_1(x_1, x)}{\partial x_1} \right) = -\frac{1}{2\hat{C}} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x}. \quad (13)$$

С учетом затухания поля перемещений на бесконечности и закона (3) выражение (13) дает следующую связь между диагональными компонентами тензора напряжений

$$\hat{\sigma}_{22} = -\frac{1}{2\hat{C}} \left( \hat{A} \hat{\sigma}_{11} - \hat{B} \hat{\sigma}_{22} \right)$$

или

$$\hat{\sigma}_{22} = -\frac{(1-\nu) \hat{\sigma}_{11}}{4(1-0.25\nu)}. \quad (14)$$

Таким образом, имеем систему интегральных уравнений (8), (9), дополняемую связями (11) и (14). Перепишем полученную систему интегро-дифференциальных уравнений

$$\hat{C} \hat{\sigma}_{21}(x) - 0.5 \frac{\partial \hat{u}_1(x)}{\partial x} = -\hat{P} \ln \left( \frac{x+a}{L+a} \right) + \int_0^L \hat{\sigma}_{21}(\xi) \ln \frac{|x-\xi|}{L-\xi} d\xi, \quad (15)$$

$$\frac{d\hat{u}_1}{dx} = \int_0^L \hat{\sigma}_{11}(\xi) \frac{1}{(x-\xi)} d\xi, \quad (16)$$

$$\hat{\sigma}_{11} \Big|_{x_1=\delta_0/2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \hat{\sigma}_{21}}{\partial x} \Big|_{x_1=\delta_0/2}, \quad (17)$$

$$\hat{\sigma}_{22} = -\frac{(1-\nu) \hat{\sigma}_{11}}{4(1-0.25\nu)}. \quad (18)$$

Подставив (16) в (15) система (15) – (18) преобразуется к виду

$$\hat{C} \hat{\sigma}_{21}(x) - 0.5 \int_0^L \hat{\sigma}_{11}(\xi) \frac{1}{(x-\xi)} d\xi = -\hat{P} \ln \left( \frac{x+a}{L+a} \right) + \int_0^L \hat{\sigma}_{21}(\xi) \ln \frac{|x-\xi|}{L-\xi} d\xi, \quad (19)$$

$$\hat{\sigma}_{11} \Big|_{x_1=\delta_0/2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \hat{\sigma}_{21}}{\partial x} \Big|_{x_1=\delta_0/2}, \quad (20)$$

$$\hat{\sigma}_{22} = -\frac{(1-\nu)\hat{\sigma}_{11}}{4(1-0.25\nu)} \quad (21)$$

с граничным условием  $\sigma_{21}|_{x=0} = 0$ . Здесь основными неизвестными являются граничные напряжения  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{21}$ .

**Дискретное представление решения.** Разобьем часть границы полуплоскости ( $x>0$ ) на  $n$  единичных элементов. Предполагаем постоянство напряжений в пределах длины каждого  $\delta_0$ -элемента. В этом случае обобщенные напряжения в  $i$ -ом элементе на отрезке  $i-1 \leq x \leq i$  определяются выражениями

$$\sigma_{11}^{(i)} = \int_{i-1}^i \hat{\sigma}_{11}(x) dx; \quad \sigma_{21}^{(i)} = \int_{i-1}^i \hat{\sigma}_{21}(x) dx.$$

Построим дискретные выражения интегральных операторов в уравнениях (19), (20). Рассмотрим операторы

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^L \hat{\sigma}_{21}(\zeta) \ln \frac{|x-\zeta|}{L-\zeta} d\zeta = \int_0^n \hat{\sigma}_{21} \ln \frac{|x-\zeta|}{L-\zeta} d\zeta = \sum_{i=1}^{i=n} \int_{i-1}^i \hat{\sigma}_{21} \ln \frac{|x-\zeta|}{L-\zeta} d\zeta = \\ &= \sum_{i=1}^{i=n} \sigma_{21}^{(i)} \left[ \int_{i-1}^i \ln |x-\zeta| d\zeta - \int_{i-1}^i \ln(L-\zeta) d\zeta \right] = \sum_{i=1}^{i=n} \psi^{(i)}(x) \sigma_{21}^{(i)} - \sum_{i=1}^{i=n} C^{(i)} \sigma_{21}^{(i)}, \end{aligned}$$

$$\text{где } \psi^{(i)}(x) = \int_{i-1}^i \ln |x-\zeta| d\zeta, \quad C^{(i)} = \int_{i-1}^i \ln |L-\zeta| d\zeta,$$

$$A_2 = \int_0^L \hat{\sigma}_{11}(\zeta) \frac{1}{x-\zeta} d\zeta = \int_0^n \hat{\sigma}_{11} \frac{1}{x-\zeta} d\zeta = \sum_{i=1}^{i=n} \psi_1^{(i)}(x) \sigma_{11}^{(i)},$$

$$\text{где } \psi_1^{(i)}(x) = \int_{i-1}^i \frac{1}{x-\zeta} d\zeta.$$

После перехода к дискретным операторам проинтегрируем левую и правую части рассматриваемой системы по  $j$  отрезку, где  $j-1 \leq x \leq j$ .

В результате оператор  $A_1$  принимает вид

$$A_1^j [\sigma_{21}^{(i)}] = \sum_{i=1}^{i=n} \sigma_{21}^{(i)} \int_{j-1}^j \int_{i-1}^i \ln |x-\zeta| d\zeta dx - \sigma_{21}^{(i)} \int_{j-1}^j \int_{i-1}^i \ln |L-\zeta| d\zeta dx,$$

а оператор  $A_2$  соответственно

$$A_2^j [\sigma_{11}^{(i)}] = \sum_{i=1}^{i=n} \sigma_{11}^{(i)} \int_{j-1}^j \int_{i-1}^i \frac{1}{x-\zeta} d\zeta dx.$$

Введем обозначения

$$\varphi^{(ji)} = \int_{j-1}^j \int_{i-1}^i \ln|x-\zeta| d\zeta dx, \quad \psi_1^{(ji)} = \int_{j-1}^j \int_{i-1}^i \frac{1}{(x-\zeta)} d\zeta dx; \quad C^{(ij)} = \int_{j-1}^j \int_{i-1}^i \ln(L-\zeta) d\zeta dx,$$

и приведем для них окончательные выражения.

В случае  $j > i$

$$\begin{aligned} \varphi_{(+)}^{(ji)} &= -(j-i)^2 \ln(j-i) + \frac{1}{2}(j-i-1)^2 \ln(j-i-1) + \frac{1}{2}(j-i+1) \ln(j-i+1) - \frac{3}{2}, \\ \psi_{(+)}^{(ji)} &= -2(j-i) \ln(j-i) + (j-i-1) \ln(j-i-1) + (j-i+1) \ln(j-i+1). \end{aligned}$$

При  $j = i$  для вычисления интеграла  $\int_{j-1}^j \int_{j-1}^j \ln|x-\zeta| d\zeta dx \quad x \in [j-1; j]$

представим его в следующем виде

$$\int_{j-1}^j \left[ \int_{j-1}^x \ln(x-\zeta) d\zeta + \int_x^j \ln(\zeta-x) d\zeta \right] dx.$$

Выполнив интегрирование, получим

$$\varphi_{(0)}^{(ji)} = -\frac{3}{2}.$$

Для  $\psi_1^{(ji)}$  в случае  $j = i$  имеем:  $\psi_1^{(ji)} = 0$ .

Случай  $j < i$

$$\begin{aligned} \varphi_{(-)}^{(ji)} &= (i-j)^2 \ln(i-j) - \frac{1}{2}(i-j+1)^2 \ln(i-j+1) - \frac{1}{2}(i-j-1)^2 \ln(i-j-1) - \frac{1}{2}, \\ \psi_{(-)}^{(ji)} &= 2(i-j) \ln(i-j) - (i-j-1) \ln(i-j-1) - (i-j+1) \ln(i-j+1). \end{aligned}$$

При  $\forall i, j$

$$\begin{aligned} C^{(ji)} &= -(n-i) \ln(n-i) + (n-i+1) \ln(n-i+1) - 1, \\ D^{(j)} &= \int_{j-1}^j \ln\left(\frac{x+a}{L+a}\right) dx = (j+a) \ln \frac{j+a}{n+a} - (j+a-1) \ln\left(\frac{j+a-1}{n+a}\right) - 1. \end{aligned}$$

С учетом постоянства напряжений на отрезке  $[j-1, j]$  из (20) получим

$$\sigma_{21}^{(j)} - \sigma_{21}^{(j-1)} = -2\sigma_{11}^{(j)}.$$

В результате полная дискретная модель в силу введенных обозначений примет вид:

$$\hat{C} \hat{\sigma}_{21}^{(j)} - 0.5 A_2^j [\hat{\sigma}_{11}^{(i)}] = -\hat{P} D^{(j)} + A_1^j [\hat{\sigma}_{21}^{(i)}], \quad (22)$$

$$\hat{\sigma}_{12}^{(j)} - \hat{\sigma}_{12}^{(j-1)} = -2\hat{\sigma}_{11}^{(j)}, \quad (23)$$

$$\hat{\sigma}_{22}^{(j)} = -\frac{(1-\nu) \hat{\sigma}_{11}^{(j)}}{4(1-0.25\nu)}. \quad (24)$$

Предложенная дискретизация системы интегро-дифференциальных уравнений (19) – (21) близка по идеологии к методу граничного элемента [3] с постоянной аппроксимацией поля напряжений на элементе. Однако, в данном случае напряжения постоянны на каждом элементе (на протяжении всей его длины), а не рассчитываются в конкретной

(серединной) точке элемента с последующим постоянным распространением на весь элемент.

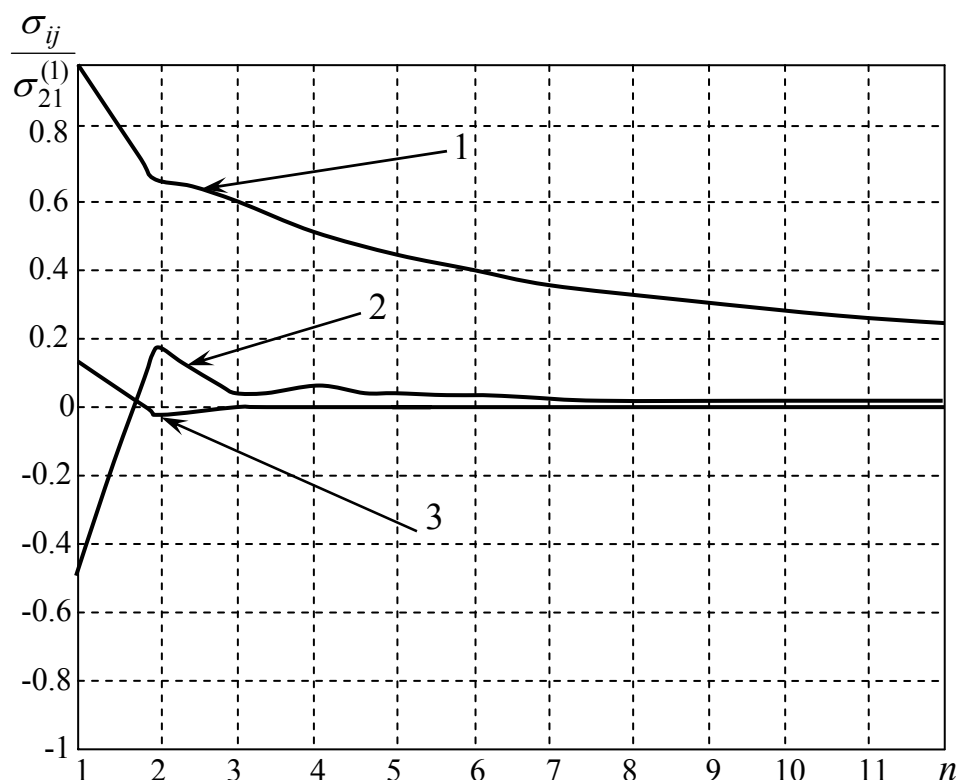


Рис. 3

Дискретная модель (22) – (24) содержит бесконечное количество линейных уравнений ( $n \rightarrow \infty$ ), дополненное граничным условием на торце  $x = 0 : \sigma_{21}^{(0)} = 0$ . Но, для анализа области в вершине физического разреза можно, с достаточной степенью точности, ограничиться конечным числом элементов. Отметим, что при количестве элементов больше 1000 значение компонент тензора напряжений на первых двадцати элементах практически не меняется.

На рис. 3 представлена зависимость распределения напряжений на первых 12 элементах при следующих расчетных характеристиках:  $n=1000$ ;  $a=10$  коэффициента Пуассона:  $\nu = 0.25$ . Кривые 1, 2 и 3 определяют соответственно напряжения  $\sigma_{21}, \sigma_{11}, \sigma_{22}$ , отнесенные к напряжению  $\sigma_{21}^{(1)}$  достигаемому на первом элементе. Отметим, что варьирование коэффициента Пуассона в диапазоне от 0 до 0.4 не оказывало существенного изменения картины. Из рисунка видно, что на первых двух элементах напряжения  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{22}$  по порядку величины соизмеримы с напряжением  $\sigma_{21}$  и их учет необходим в определении критического состояния рассмотренной схемы нагружения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 06-01-00047 и № 07-01-96402).

г. Тула

Поступила: 09 ноября 2007 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Глаголев, В. В.* Об одном способе определения связей между критическими значениями характеристик процесса установившегося разделения материала / В. В. Глаголев, А. А. Маркин // Проблемы прочности. – 2006. – №2. – С. 47–58.
2. *Глаголев, В. В.* Оценка толщины слоя взаимодействия как универсального параметра материала / В. В. Глаголев, А. А. Маркин // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2006. – №5. – С. 194–203.
3. *Крауч С.* Методы граничных элементов в механике твердого тела / С. Крауч, А. Старфилд; Пер. с англ. – М. : Мир, 1987. – 328 с.
4. *Лурье, А. И.* Теория упругости / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1970. – 939 с.
5. *Новожилов, В. В.* О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности / В. В. Новожилов // ПММ. – 1969. – № 2. – С. 212–222.
6. *Петров, Ю. В.* О “квантовой” природе разрушения хрупких сред / Ю. В. Петров // Докл. АН. 1991. Т. 321. – №1. – С. 66–68.
7. *Черепанов, Г. П.* Саморазрушение / Г. П. Черепанов // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород. Сборник статей к 75-летию Е. И. Шемякина. – М. : ФИЗМАТЛИТ. – 2006. – С. 142–152.