ВЕСТНИК ЧГПУ
им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
МЕХАНИКА
ПРЕДЕЛЬНОГО
СОСТОЯНИЯ
№ 1 • 2008

Зенин А. Н., Спорыхин А. Н.

К УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С НЕОДНОРОДНЫМ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ ПРИ НАГРУЖЕНИИ

(Воронежский государственный университет)

Исследованию устойчивости оболочек с заполнителем при нагружении посвящены работы [1; 3]. При этом в работе [3] заполнитель описывался соотношениями теории малых упругопластических деформаций [5] и предположении степенной зависимости между интенсивностями напряжений и деформаций, а в работе [1] соотношениями теории упрочняющегося упруговязкопластического тела [8].

Отметим, что устойчивость сферического тела под действием внутреннего давления рассматривалась в работах [4; 7]. При этом в [4] в рамках приближенного подхода Лейбензона-Ишлинского и теории малых упругопластических деформаций, а в [7] в рамках точных трехмерных уравнений устойчивости для модели упругопластического тела.

В данной работе в рамках трехмерной линеаризованной теории устойчивости исследована задача устойчивости упругой изотропной сферической оболочки с неоднородным упрувязкопластическим заполнителем при всестороннем равномерном нагружении. Физические параметры заполнителя изменяются по экспоненциальному закону. Пластические деформации в упругой оболочке не возникают.

При решении задачи докритическое состояние определялось в рамках геометрически линейной теории. При этом в упругой области имеет место закон Гука, а в пластической области соотношения теории упруговязкопластического тела.

Для описания упруговязкопластических свойств воспользуемся моделью сложной среды [8] с функцией нагружения

$$F=\left(S^i_j-c\,\overset{p}{\varepsilon}{}^i_j-\eta\,\dot{\overset{p}{\varepsilon}}{}^i_j\right)\left(S^i_j-c\,\overset{p}{\varepsilon}{}^i_j-\eta\,\dot{\overset{p}{\varepsilon}}{}^i_j\right)-K^2=0 \qquad (1)$$

и ассоциированным законом течения в форме

$$\dot{\overset{p}{\varepsilon}}{}^i_j=\lambda_0\left(S^i_j-c\,\overset{p}{\varepsilon}{}^i_j-\eta\,\dot{\overset{p}{\varepsilon}}{}^i_j\right). \qquad (2)$$

Здесь c и η – коэффициенты упрочнения и вязкости соответственно, K – предел текучести; $S^i_j=\sigma^i_j-\frac{1}{3}\sigma^k_k g^i_j$ – компоненты девиатора тензора напряжений, $\overset{p}{\varepsilon}{}^i_j$ – компоненты тензора пластических деформации, $\dot{\overset{p}{\varepsilon}}{}^i_j$ – компоненты тензора скоростей пластических деформаций, λ_0 – неопределенный множитель, g^i_j – смешанные компоненты метрического тензора.

Полные деформации в пластической области ε^i_j состоят из упругой и пластической составляющих

$$\varepsilon^i_j = \overset{e}{\varepsilon}{}^i_j + \overset{p}{\varepsilon}{}^i_j . \tag{3}$$

Причем упругие составляющие связаны с напряжениями законом Гука

$$\sigma^i_j = \lambda \overset{e}{\varepsilon}{}^k_k g^i_j + 2\mu \overset{e}{\varepsilon}{}^i_j . \tag{4}$$

Формулы Коши связывают полные деформации связаны с перемещениями

$$\varepsilon^i_j = \frac{1}{2}\left(\nabla^i u_j + \nabla^j u_i\right). \tag{5}$$

Уравнения равновесия и граничные условия приняты в обычной форме. Заметим, если в деформируемом теле одновременно существуют области упругих и пластических деформаций, то на границе их раздела γ должны выполнятся условия непрерывности перемещений и вектора поверхностных сил [2; 6].

Линеаризованная связь между амплитудами напряжений и деформаций для несжимаемой упруговязкопластической среды согласно [8] представима в виде

$$\begin{gathered}\sigma^i_j = \left(a_{i\alpha} g^{\alpha\alpha} \nabla_\alpha u_\alpha + \hat{p}\right) g^i_j + \left(1 - g^i_j\right) g^{ii} G^i_j \left(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i\right), \\ a_{ij} = 2\mu\delta_{ij} - 3\hat{a} \overset{0}{f}_{ii} \overset{0}{f}_{jj}, \overset{0}{f}_{ij} = S^0_{ij} - c \overset{p}{\varepsilon}{}^0_{ij}, G^i_j = \mu, \Sigma i, j, \\ \hat{a} = \frac{4}{3}\chi \frac{\mu^2}{K^2\left(2\mu + c + i\Omega\eta\right)},\end{gathered} \tag{6}$$

$\hat{p}$ – гидростатическое давление, μ – параметр Ламе. Значение $\chi = 1$ соответствует упруговязкопластической среде заполнителя, $\chi = 0$ – упругой среде оболочки. Индекс «0» вверху относится к величинам в докритическом состоянии. Знак Σ обозначает отсутствие суммирования по указанным индексам.

Исследование устойчивости основного состояния составной оболочки сводится [8] к решению уравнений равновесия в вариациях для областей оболочки и заполнителя при соответствующих граничных условиях.

Уравнения равновесия имеют вид

$$\nabla_i\left(\sigma^i_j + \sigma^{0i\alpha} \nabla_\alpha u_j\right) + \rho\Omega^2 u_j = 0, \tag{7}$$

граничные условия

$$\left(\sigma^i_j + \sigma^{0i\alpha} \nabla_\alpha u_j\right) n_i = P_j , \tag{8}$$

$P_j = 0$ в случае «мертвой» нагрузки. Условия непрерывности напряжений и перемещений на границе контакта оболочки и заполнителя

$$\left(\sigma^{(1)i}_{\ \ j} + \sigma^{0(1)i\alpha}\nabla_\alpha u_j^{(1)}\right)n_j^{(1)} + \left(\sigma^i_j + \sigma^{0i\alpha}\nabla_\alpha u_j\right)n_j = 0,\ u_j^{(1)} - u_j = 0. \tag{9}$$

Здесь индексом «1» вверху обозначены величины, относящиеся к заполнителю, остальные величины относятся к оболочке.

К соотношениям (6) – (9) для заполнителя и оболочки следует присоединить условия несжимаемости

$$\nabla_\alpha u^{(1)\alpha} = 0, \nabla_\alpha u^\alpha = 0. \tag{10}$$

Уравнения (6) – (10) представляют собой связную краевую задачу устойчивости относительно амплитуд компонент векторов перемещений $u, v, w, u^{(1)}, v^{(1)}, w^{(1)}$ и гидростатических давлений $\hat{p}$, $\hat{p}^{(1)}$ для оболочки и заполнителя соответственно. Нетривиальное решение этой задачи соответствует потере устойчивости основного состояния. При этом критические значения комбинаций параметров нагружения определяются из условия

$$\min(\operatorname{Im}\Omega_k) = 0, (k = 1, 2, ...), \tag{11}$$

где Ω_k – собственные значения краевой задачи.

Исследуем устойчивость упругой изотропной сферической оболочки (рис. 1) с неоднородным упруговязкопластическим заполнителем. Положим, что все физические параметры заполнителя являются функциями радиуса следующего вида

$$\mu_2 = \mu_{20}e^{-\alpha r}, \eta_2 = \eta_{20}e^{-\alpha r}, c_2 = c_{20}e^{-\alpha r}, \rho_2 = \rho_{20}e^{-\alpha r}, K_2 = K_{20}e^{-\alpha r}, \alpha > 0.$$

Обозначим через b внешний радиус оболочки, γ – внешний радиус заполнителя, а a – радиус кругового отверстия, т.е. радиус полости. По контуру оболочки равномерно распределена нагрузка интенсивности p, а к внутреннему контуру заполнителя приложена равномерно распределенная нагрузка q (рис.1). Таким образом, рассматривается двусвязная область – упругая оболочка и упрочняющийся упруговязкопластический заполнитель – при всестороннем равномерном сжатии, т.е. ограничимся случаем, когда в оболочке не возникают пластические деформации.

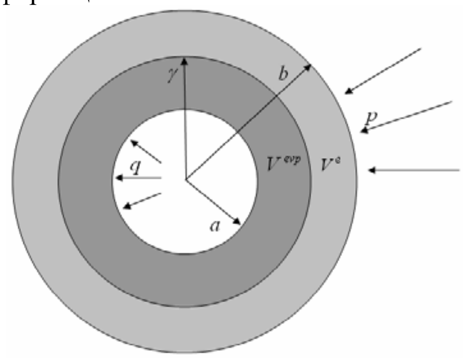

Рис. 1

Исходя из уравнений равновесия и граничных условий на поверхности оболочки и заполнителя, привлекая при этом соотношения (1) – (5), учитывая условия несжимаемости, а также условия на поверхности контакта оболочка-заполнитель, находим докритическое напряженно-деформированное состояние, которое в осесимметричном случае $(\varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi)$ в сферической системе координат (ρ, θ, φ) имеет вид

для оболочки –

$$u_r^{0e} = \frac{C_1}{r^2},\ \sigma_r^{0e} = -\frac{4\mu_1 C_1}{r^3} + C_2,\ \sigma_\theta^{0e} = \frac{2\mu_1 C_1}{r^3} + C_2, \tag{12}$$

для заполнителя –

$$u_r^{0(1)} = B_1 r^{-2},\ \varepsilon_r^{0(1)p} = -2\varepsilon_\theta^{0(1)p} = -\frac{2\mu_2 B_1 + k_2 r^3}{(2\mu_2 + c_2) r^3},$$

$$\sigma_r^{0(1)} = -\frac{2\mu_{20}}{2\mu_{20} + c_{20}} \left(c_{20} B_1 \left(\frac{2}{r^3} - \frac{\alpha}{r^2} + \frac{\alpha^2}{r} \right) e^{-\alpha r} + c_{20} B_1 \alpha^3 E_*(r) + 3k_{20} E_*(r) \right) + B_2, \tag{13}$$

$$\sigma_\theta^{0(1)} = -\frac{2\mu_{20}}{2\mu_{20} + c_{20}} \left(c_{20} B_1 \left(-\frac{1}{r^3} - \frac{\alpha}{r^2} + \frac{\alpha^2}{r} \right) e^{-\alpha r} + c_{20} B_1 \alpha^3 E_*(r) + 3k_{20} E_*(r) + \frac{3}{2} k_{20} e^{-\alpha r} \right) + B_2,$$

где

$$C_1 = B_1 = \frac{\dfrac{6\mu_{20} k_{20}}{2\mu_{20} + c_{20}} \left(E_*(a) - E_*(\gamma) \right) + p - q}{4\mu_1 \left(\dfrac{1}{b^3} - \dfrac{1}{\gamma^3} \right) + \dfrac{2\mu_{20} c_{20}}{2\mu_{20} + c_{20}} \left(\left(\dfrac{2}{\gamma^3} - \dfrac{\alpha}{\gamma^2} + \dfrac{\alpha^2}{\gamma} \right) e^{-\alpha\gamma} - \left(\dfrac{2}{a^3} - \dfrac{\alpha}{a^2} + \dfrac{\alpha^2}{a} \right) e^{-\alpha a} + \alpha^3 \left(E_*(\gamma) - E_*(a) \right) \right)},$$

$$C_2 = \frac{4\mu_1 C_1}{b^3} - p,\ B_2 = \frac{2\mu_{20}}{2\mu_{20} + c_{20}} \left(c_{20} C_1 \left(\frac{2}{a^3} - \frac{\alpha}{a^2} + \frac{\alpha^2}{a} \right) e^{-\alpha a} + c_{20} C_1 \alpha^3 E_*(a) + 3k_{20} E_*(a) \right) - q, \tag{14}$$

$$k_{20}^2 = \frac{2}{3} K_{20}^2,\ E_*(r) = \int \frac{e^{-\alpha r}}{r} dr.$$

Отметим, что решения (12) – (14) получены при предположении, что оболочка и заполнитель деформируются совместно без проскальзывания и отставания.

Для осесимметричной формы потери устойчивости уравнения равновесия в вариациях (7) в сферической системе координат принимают вид

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + 2\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \sigma_r^0 \frac{d^2 u_r}{dr^2} + \sigma_\theta^0 \frac{1}{r} \left(\frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r} \right) + \rho\Omega^2 u_r = 0. \tag{15}$$

Здесь компоненты с индексом нуль вверху определяются соотношениями (12) – для оболочки и (13) – для заполнителя. Из формул (6) выводим

$$\begin{gathered}
\sigma_r = \hat{p} + 2(\mu - \widetilde{a})\frac{du_r}{dr} + 2\widetilde{a}\,\frac{u_r}{r}, \\
\sigma_\theta = \hat{p} + \widetilde{a}\,\frac{du_r}{dr} + (2\mu - \widetilde{a})\frac{u_r}{r}, \\
\widetilde{a} = \frac{4}{3}\chi\frac{\mu^2}{(2\mu + c + i\Omega\eta)}.
\end{gathered} \tag{16}$$

Подставляя в уравнение (15) соотношения (16) и учитывая при этом условия несжимаемости (10) для оболочки и заполнителя находим

для оболочки –

$$\begin{gathered}
u_r^e = \frac{A_1}{r^2},\ \sigma_r^e = \left(-\frac{4\mu_1}{r^3} - \frac{5\mu_1}{r^6}C_1 + \frac{4\mu_1}{r^3b^3}C_1 - \frac{p}{r^3} + \frac{\rho_1^0\Omega^2}{r}\right)A_1 + M_1, \\
\sigma_\theta^e = \sigma_r^e + 6\mu_1\frac{A_1}{r^3} = \left(\frac{2\mu_1}{r^3} - \frac{5\mu_1}{r^6}C_1 + \frac{4\mu_1}{r^3b^3}C_1 - \frac{p}{r^3} + \frac{\rho_1^0\Omega^2}{r}\right)A_1 + M_1,
\end{gathered} \tag{17}$$

для заполнителя –

$$\begin{gathered}
u_r^{(1)} = \frac{A_2}{r^2},\ \sigma_r^{(1)} = A_2\left(\frac{e^{-\alpha r}}{r} + \alpha E_*(r)\right)\left(\rho_{20}^0\Omega^2 - 3\mu_{20}\left(4 - \frac{8\mu_{20}}{2\mu_{20} + c_{20} + i\Omega\eta_{20}}\right)\right) + \\
+ \frac{6A_2\mu_{20}c_{20}B_1}{2\mu_{20} + c_{20}}\left(\left(-\frac{5}{4}\frac{1}{r^4} + \frac{3}{4}\frac{\alpha}{r^3} - \frac{7}{8}\frac{\alpha^2}{r^2} + \frac{7}{8}\frac{\alpha^3}{r}\right)e^{-\alpha r} + \frac{7}{8}\alpha^4E_*(r) - \alpha^3\right) - \\
- \frac{9A_2\mu_{20}k_{20}}{2\mu_{20} + c_{20}}\left(\frac{e^{-\alpha r}}{r} + \alpha E_*(r) + 2\frac{E_*(r)}{r}\right) + 3B_2\frac{A_2}{r} + M_2, \\
\sigma_\theta^{(1)} = \sigma_r^e + 6A_2\mu_{20}\frac{e^{-\alpha r}}{r^3}\left(1 + \frac{2\mu_{20}}{2\mu_{20} + c_{20} + i\Omega\eta_{20}}\right),
\end{gathered} \tag{18}$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 – постоянные интегрирования, которые определяются из условий непрерывности перемещений и напряжений (9) на границе контакта оболочки и заполнителя при $r = \gamma$, граничных условий (8) на внешней поверхности оболочки при $r = b$ и внутренней поверхности при $r = a$. В рассматриваемом случае они принимают соответственно вид

$$\begin{gathered}
u_r^e = u_r^{(1)}, \sigma_r^e = \sigma_r^{(1)}\ \text{ï ðè}\ r = \gamma, \\
\sigma_r^e + \sigma_r^{0e}\frac{du_r^e}{dr} = p_r\ \text{ï ðè}\ r = b, \\
\sigma_r^{(1)} + \sigma_r^{0(1)}\frac{du_r^{(1)}}{dr} = q_r\ \text{ï ðè}\ r = a.
\end{gathered} \tag{19}$$

Заметим, что если нагрузка "мертвая", то [8]

$$p_r = q_r = 0\,. \tag{20}$$

Из первого условия находим $A_1 = A_2$. Для определения оставшихся трех констант имеем систему трех однородных линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} &a_{11}A_1 + 1\cdot M_1 - 1\cdot M_2 = 0,\\ &a_{21}A_1 + 1\cdot M_1 + 0\cdot M_2 = 0,\\ &a_{31}A_1 + 0\cdot M_1 + 1\cdot M_2 = 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Коэффициенты a_{ij} имеют вид

$$\begin{gathered} a_{11} = \Omega^2\left(\frac{1}{\gamma}\rho_1^0 - \rho_{20}^0\left(\frac{e^{-\alpha\gamma}}{\gamma} + \alpha E_*(\gamma)\right)\right) - \frac{3B_2}{\gamma} - \frac{1}{\gamma^3}\left(4\mu_1 + p + \mu_1 C_1\left(\frac{5}{\gamma^3} - \frac{4}{b^3}\right)\right) - \\ - \frac{6\mu_{20}c_{20}B_1}{2\mu_{20}+c_{20}}\left(\frac{7}{8}\alpha^4 E_*(\gamma) - \alpha^3 + e^{-\alpha\gamma}\left(-\frac{5}{4}\frac{1}{\gamma^4} + \frac{3}{4}\frac{\alpha}{\gamma^3} - \frac{7}{8}\frac{\alpha^2}{\gamma^2} + \frac{7}{8}\frac{\alpha^3}{\gamma}\right)\right) + \\ + \frac{9\mu_{20}k_{20}}{2\mu_{20}+c_{20}}\left(\frac{e^{-\alpha\gamma}}{\gamma} + \alpha E_*(\gamma) + 2\frac{E_*(\gamma)}{\gamma}\right) + 3\mu_{20}\left(4 - \frac{8\mu_{20}}{2\mu_{20}+c_{20}+i\Omega\eta_{20}}\right)\left(\frac{e^{-\alpha\gamma}}{\gamma} + \alpha E_*(\gamma)\right), \\ a_{21} = \frac{7\mu_1 C_1}{b^6} - \frac{2C_2}{b^3} - \frac{4\mu_1}{b^3} - \frac{p}{b^3} + \frac{\rho_1^0\Omega^2}{b}, \\ a_{31} = \rho_{20}^0\Omega^2\left(\frac{e^{-\alpha a}}{a} + \alpha E_*(a)\right) + \frac{3B_2}{a} - 3\mu_{20}\left(4 - \frac{8\mu_{20}}{2\mu_{20}+c_{20}+i\Omega\eta_{20}}\right)\left(\frac{e^{-\alpha a}}{a} + \alpha E_*(a)\right) + \\ + \frac{6\mu_{20}c_{20}B_1}{2\mu_{20}+c_{20}}\left(\left(\frac{4}{3}\frac{1}{a^6} - \frac{2}{3}\frac{\alpha}{a^5} + \frac{2}{3}\frac{\alpha^2}{a^4} - \frac{5}{4}\frac{1}{a^4} + \frac{3}{4}\frac{\alpha}{a^3} - \frac{7}{8}\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{7}{8}\frac{\alpha^3}{a}\right)e^{-\alpha a} + \frac{7}{8}\alpha^4 E_*(a) + \frac{2}{3}E_*(a) - \alpha^3\right) - \\ - \frac{9\mu_{20}k_{20}}{2\mu_{20}+c_{20}}\left(\frac{e^{-\alpha a}}{a} + \alpha E_*(a) + 2\frac{E_*(a)}{a} - \frac{4}{3}\frac{E_*(a)}{a^3}\right) - \frac{2B_2}{a^3}. \end{gathered} \tag{22}$$

Условие существования нетривиального решения этой системы есть равенство нулю определителя, раскрывая который получаем

$$\begin{gathered} \Phi(p,q,\Omega,\lambda_i) = \rho_{20}^0\Omega^2\left(\frac{e^{-\alpha a}}{a} - \frac{e^{-\alpha\gamma}}{\gamma} + \alpha E_*(a) - \alpha E_*(\gamma)\right) + \rho_1^0\Omega^2\left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{b}\right) + \\ + \mu_1 C_1\left(\frac{1}{b^6} + \frac{4}{b^3\gamma^3} - \frac{5}{\gamma^6}\right) + 4\mu_1\left(\frac{1}{b^3} - \frac{1}{\gamma^3}\right) - p\left(\frac{1}{b^3} + \frac{1}{\gamma^3}\right) + 3B_2\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\gamma}\right) - \frac{2B_2}{a^3} + \\ + \frac{6\mu_{20}c_{20}B_1}{2\mu_{20}+c_{20}}\left(\left(\frac{5}{4}\frac{1}{\gamma^4} - \frac{3}{4}\frac{\alpha}{\gamma^3} + \frac{7}{8}\frac{\alpha^2}{\gamma^2} - \frac{7}{8}\frac{\alpha^3}{\gamma}\right)e^{-\alpha\gamma} - \frac{7}{8}\alpha^4 E_*(\gamma) + \frac{7}{8}\alpha^4 E_*(a) + \frac{2}{3}E_*(a)\right) + \\ + \frac{6\mu_{20}c_{20}B_1}{2\mu_{20}+c_{20}}\left(\frac{4}{3}\frac{1}{a^6} - \frac{2}{3}\frac{\alpha}{a^5} + \frac{2}{3}\frac{\alpha^2}{a^4} - \frac{5}{4}\frac{1}{a^4} + \frac{3}{4}\frac{\alpha}{a^3} - \frac{7}{8}\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{7}{8}\frac{\alpha^3}{a}\right)e^{-\alpha a} + \\ + \frac{9\mu_{20}k_{20}}{2\mu_{20}+c_{20}}\left(\frac{e^{-\alpha\gamma}}{\gamma} + \alpha E_*(\gamma) + 2\frac{E_*(\gamma)}{\gamma} - \frac{e^{-\alpha a}}{a} - \alpha E_*(a) - 2\frac{E_*(a)}{a} + \frac{4}{3}\frac{E_*(a)}{a^3}\right) + \\ + 3\mu_{20}\left(4 - \frac{8\mu_{20}}{2\mu_{20}+c_{20}+i\Omega\eta_{20}}\right)\left(\frac{e^{-\alpha\gamma}}{\gamma} + \alpha E_*(\gamma) - \frac{e^{-\alpha a}}{a} - \alpha E_*(a)\right). \end{gathered} \tag{23}$$

Перейдя к безразмерным величинам, получим

$$\Phi\left(p,q,\Omega,\lambda_i\right)=\Omega^2\frac{\rho_2\mu_1}{b^2}\left(\frac{e^{-\alpha ab}}{ab}-\frac{e^{-\alpha\gamma b}}{\gamma b}+\alpha E_*(ab)-\alpha E_*(\gamma b)\right)+\Omega^2\frac{\rho_1\mu_1}{b^3}\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)+$$
$$+\frac{\mu_1C_1}{b^6}\left(1+\frac{4}{\gamma^3}-\frac{5}{\gamma^6}\right)+\frac{4\mu_1}{b^3}\left(1-\frac{1}{\gamma^3}\right)-\frac{p\mu_1}{b^3}\left(1+\frac{1}{\gamma^3}\right)+\frac{3B_2}{b}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\gamma}\right)-\frac{2B_2}{a^3b^3}+$$
$$+\frac{6\mu_1\mu_2c_2C_1}{2\mu_2+c_2}\left(\left(\frac{5}{4}\frac{1}{(\gamma b)^4}-\frac{3}{4}\frac{\alpha}{(\gamma b)^3}+\frac{7}{8}\frac{\alpha^2}{(\gamma b)^2}-\frac{7}{8}\frac{\alpha^3}{\gamma b}\right)e^{-\alpha\gamma b}-\frac{7}{8}\alpha^4E_*(\gamma b)+\frac{7}{8}\alpha^4E_*(ab)+\frac{2}{3}E_*(ab)\right)+$$
$$+\frac{6\mu_1\mu_2c_2C_1}{2\mu_2+c_2}\left(\frac{4}{3}\frac{1}{(ab)^6}-\frac{2}{3}\frac{\alpha}{(ab)^5}+\frac{2}{3}\frac{\alpha^2}{(ab)^4}-\frac{5}{4}\frac{1}{(ab)^4}+\frac{3}{4}\frac{\alpha}{(ab)^3}-\frac{7}{8}\frac{\alpha^2}{(ab)^2}+\frac{7}{8}\frac{\alpha^3}{ab}\right)e^{-\alpha ab}+ \qquad (24)$$
$$+\frac{9\mu_1\mu_2k_2}{2\mu_2+c_2}\left(\frac{e^{-\alpha\gamma b}}{\gamma b}-\frac{e^{-\alpha ab}}{ab}+\alpha E_*(\gamma b)-\alpha E_*(ab)+2\frac{E_*(\gamma b)}{\gamma b}-2\frac{E_*(ab)}{ab}+\frac{4}{3}\frac{E_*(ab)}{(ab)^3}\right)+$$
$$+3\mu_1\mu_2\left(4-\frac{8\mu_2}{2\mu_2+c_2+i\Omega\eta_2}\right)\left(\frac{e^{-\alpha\gamma b}}{\gamma b}-\frac{e^{-\alpha ab}}{ab}+\alpha E_*(\gamma b)-\alpha E_*(ab)\right),$$

где

$$C_1=\frac{\dfrac{6\mu_2k_2}{2\mu_2+c_2}\left(E_*(ab)-E_*(\gamma b)\right)+p-q}{4\left(\dfrac{1}{b^3}-\dfrac{1}{(\gamma b)^3}\right)+\dfrac{2\mu_2c_2}{2\mu_2+c_2}\left(\left(\dfrac{2}{(\gamma b)^3}-\dfrac{\alpha}{(\gamma b)^2}+\dfrac{\alpha^2}{\gamma b}\right)e^{-\alpha\gamma b}-\left(\dfrac{2}{(ab)^3}-\dfrac{\alpha}{(ab)^2}+\dfrac{\alpha^2}{ab}\right)e^{-\alpha ab}+\alpha^3\left(E_*(\gamma b)-E_*(ab)\right)\right)}$$

$$B_2=\frac{2\mu_1\mu_2}{2\mu_2+c_2}\left(c_2C_1\left(\left(\frac{2}{(ab)^3}-\frac{\alpha}{(ab)^2}+\frac{\alpha^2}{ab}\right)e^{-\alpha ab}+\alpha^3E_*(ab)\right)+3k_2E_*(ab)\right)-q\mu_1.$$

Здесь величины, имеющие размерность напряжения, отнесены к модулю сдвига оболочки μ_1, а имеющие размерность длины – к внешнему радиусу оболочки b; λ_i – геометрические и физико-механические характеристики оболочки и заполнителя.

Таким образом, вопрос определения критической комбинации нагрузок сводится к разрешимости уравнения (24). Однако, анализ такого уравнения затруднен ввиду того, что наряду с приложенными нагрузками, геометрическими и физико-механическими характеристиками оболочки и заполнителя, в него входит в общем случае произвольное комплексное число Ω. Поэтому, для упрощения вычисления при численном анализе можно считать, что $i\Omega = s$ – действительное число. В этом случае критерием устойчивости будет условие $s<0$. Бесспорно, что это сужает область допустимых возмущений, однако это позволяет получить достоверные результаты относительно такого класса возмущений.

г. Воронеж

Поступила: 5 декабря 2007 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андреева, И. Ю.* Моделирование отказов цилиндрической оболочки с упруговязкопластическим заполнителем при осевом сжатии / И. Ю. Андреева, Н. А. Медведь, А. Н. Спорыхин // Прикладные задачи механики и тепломассообмена в авиастроении : Тр. II Всерос. науч.-техн. конф. – Воронеж, 2001. – Ч.1. – С. 12 – 18.
2. *Быковцев, Г. И.* Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. – Владивосток : Дальнаука, 1998. – 528 с.
3. *Гузь, А. Н.* Трехмерная теория устойчивости деформируемых тел / А. Н. Гузь, И. Ю. Бабич. – Киев : Наукова думка, 1985. – Т. 4. – 279 с.
4. *Ершов, Л. В.* Об осесимметричной потере устойчивости толстостенной сферической оболочки, находящейся под действием равномерного давления / Л. В. Ершов // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1960. – №4. – С. 81–83.
5. *Ильюшин, А. А.* Пластичность. Основы общей математической теории / А. А. Ильюшин. – М. : Наука, 1963. – 271 с.
6. *Ишлинский, А. Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 2002. – 821 с.
7. *Кирсанов, М. И.* О неустойчивости сферического тела при равномерном нагружении / М. И. Кирсанов, А. Н. Спорыхин // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1979. – №1. – С. 161–165.
8. *Спорыхин, А. Н.* Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред / А. Н. Спорыхин. – Воронеж : Изд-во Воронеж. ун-та, 1997. – 361 с.