

ПРЕДЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ ТЕПЛОВЫДЕЛЯЮЩЕЙ СРЕДЫ
С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ОТВЕРСТИЙ
И ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ТРЕЩИН

(Азербайджанский технический университет,
институт математики и механики НАН Азербайджана)

Рассматривается задача разрушения для тепловыделяющей среды, ослабленной периодической системой круговых отверстий и прямолинейными трещинами вдоль оси абсцисс и ординат неравной длины. Считается, что среда находится в стационарном состоянии, и теплосъем осуществляется через поверхности отверстий. Найдены коэффициенты интенсивности напряжений.

Рассматривается изотропная упругая тепловыделяющая среда, ослабленная периодической системой круговых отверстий, имеющих радиус λ ($\lambda < 1$). Центры этих отверстий находятся в точках $P_m = m\omega$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), $\omega = 2$. Из контуров круговых отверстий исходят симметричные прямолинейные трещины, направленные по осям абсцисс и ординат, причем их длины по двум направлениям не одинаковые (рис. 1). Контур круговых отверстий и берега трещин свободны от внешних усилий. Считается, что по всему объему тела интенсивность тепловыделения q равномерна, тело может свободно расширяться и система находится в стационарном состоянии, а теплосъем осуществляется через поверхности отверстий. Кроме того, принято, что максимальный температурный перепад в среде невелик и свойства материала тепловыделяющей среды постоянны в пределах этого перепада.

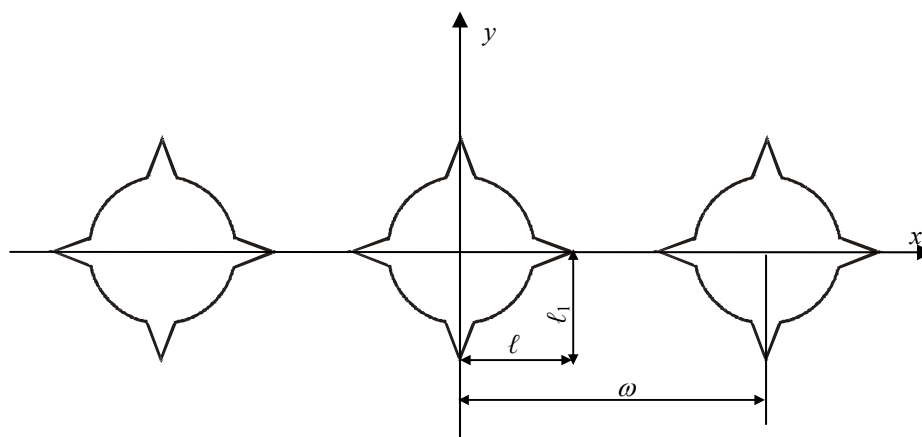


Рис. 1. Расчетная схема задачи

Температура $T(x, y)$ в области D , занятой средой, является решением уравнения теории теплопроводности

$$\Delta T + \frac{q}{\delta} = 0,$$

где Δ – оператор Лапласа, δ – коэффициент теплопроводности среды.

На контуре отверстий L_m ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) для температуры имеем граничное условие теплообмена

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\alpha_*}{\delta} (T_0 - T).$$

Здесь T_0 – температура охлаждающей среды, α_* – коэффициент теплоотдачи.

В силу симметрии граничных условий и геометрии области D , занятой средой, напряжения и температура являются периодическими функциями с основным периодом ω .

Температуру $T(x, y)$ в области D можно искать в виде

$$T(x, y) = 2 \operatorname{Re} F(z) - \frac{qz\bar{z}}{4\delta},$$

где $F(z)$ – аналитическая в области D функция, удовлетворяющая на контуре отверстий L_m ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) краевому условию

$$2 \operatorname{Re} \left[e^{i\theta} \left(F'(z) - \frac{q\bar{z}}{4\delta} \right) \right] = \frac{\alpha_*}{\delta} \left(T_0 - F(z) - \overline{F(z)} + \frac{qz\bar{z}}{4\delta} \right).$$

Основное уравнение задачи о температурных напряжениях будет иметь вид

$$\Delta \Delta U(x, y) + \alpha E \Delta T(x, y) = 0. \quad (1)$$

Здесь $U(x, y)$ – функция напряжений Эри, α – коэффициент линейного температурного расширения, E – модуль упругости материала среды.

Общий интервал бигармонического уравнения (1) можно представить в виде

$$U(x, y) = \frac{q_* z^2 \bar{z}^2}{64} + 2 \operatorname{Re} \left\{ z \overline{\varphi(z)} - \frac{\alpha E}{4} z \overline{f(z)} + \chi(z) \right\}, \quad (2)$$

где $q_* = \alpha E q / \delta$, $f(z) = \int F(z) dz$, $F(z)$, $\varphi(z)$, $\chi(z)$ – аналитические в области D функции.

С помощью функции Эри (2) для компонент тензора напряжений в области D находим

$$\sigma_x + \sigma_y = \frac{q_* z \bar{z}}{4} + 8 \operatorname{Re} \left[\Phi(z) - \frac{\alpha E}{4} F(z) \right], \quad (3)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = \frac{q_* \bar{z}^2}{8} + 4 \left\{ \bar{z} \Phi'(z) - \frac{\alpha E}{4} \bar{z} F'(z) + \Psi(z) \right\},$$

где $\Phi(z) = \varphi'(z)$, $\Psi(z) = \psi'(z) = \chi''(z)$.

С помощью формул (3) и граничных условий на контурах круговых отверстий и берегах прямолинейных трещин задача сводится [3] к определению двух аналитических в области D функций $\Phi_*(z)$ и $\Psi(z)$ из краевых условий

$$\Phi_*(\tau) + \overline{\Phi_*(\tau)} - [\overline{\tau} \Phi'_*(\tau) + \Psi(\tau)] e^{2i\theta} + \frac{q_* \lambda^2}{32} = 0, \quad (4)$$

$$\Phi_*(t) + \overline{\Phi_*(t)} + t \overline{\Phi'_*(t)} + \overline{\Psi(t)} + \frac{3q_* t^2}{32} = 0, \quad (5)$$

$$\Phi_*(t_1) + \overline{\Phi_*(t_1)} + t_1 \overline{\Phi'_*(t_1)} + \overline{\Psi(t_1)} + \frac{3q_* t_1^2}{32} = 0, \quad (6)$$

где $\tau = \lambda e^{i\theta} + m\omega$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), t и t_1 – аффиксы точек берегов трещин, направленных по осям абсцисс и ординат, соответственно, $\Phi_*(z) = \Phi(z) - \frac{\alpha E}{4} F(z)$.

Решение краевой задачи (4) – (6) ищем в виде [1]

$$\Phi_*(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z) + \Phi_3(z), \quad \Psi(z) = \Psi_1(z) + \Psi_2(z) + \Psi_3(z), \quad (7)$$

$$\Phi_1(z) = \beta_1 \rho_2(z) + \alpha_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \rho^{(2k)}(z)}{(2k+1)!}, \quad (8)$$

$$\Psi_1(z) = bz^2 - \beta_1 S_1(z) + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \rho^{(2k)}(z)}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} S^{(2k+1)}(z)}{(2k+1)!},$$

$$\Phi_2(z) = \frac{1}{2\omega} \int_{L_1} g(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} (t-z) dt, \quad (9)$$

$$\Psi_2(z) = -\frac{\pi z}{2\omega^2} \int_{L_1} g(t) \sin^{-2} \frac{\pi}{\omega} (t-z) dt,$$

$$\Phi_3(z) = \frac{i}{2\omega} \int_{L_2} g_1(t_1) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} (it_1 - z) dt_1, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \Psi_3(z) = & -\frac{i}{2\omega} \int_{L_2} \left\{ \overline{g_1(t_1)} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} (it_1 - z) + \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} (it_1 - z) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\pi}{\omega} (2t_1 + iz) \sin^{-2} \frac{\pi}{\omega} (it_1 - z) \right] g_1(t_1) \right\} dt_1. \end{aligned}$$

Интегралы в (9), (10) берутся по линиям $L_1 = \{[-\ell, -\lambda] + [\lambda, \ell]\}$ и $L_2 = \{[-\ell_1, -\lambda] + [\lambda, \ell_1]\}$, $g(x)$, $g_1(y)$ – искомые функции, характеризующие разрыв смещений при переходе через линию трещин.

$$\rho(z) = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2 \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{\omega} z\right)} - \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2, \quad \rho_2(z) = \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2 z^2 + \ln \sin\left(\frac{\pi}{\omega} z\right),$$

$$S(z) = \sum_m' \left[\frac{P_m}{(z - P_m)^2} - \frac{2z}{P_m^2} - \frac{1}{P_m} \right], \quad S_1(z) = -\int S(z) dz.$$

Штрих у суммы означает, что при суммировании исключается индекс $m = 0$.

Из условий симметрии относительно координатных осей находим

$$\operatorname{Im} b = 0, \quad \operatorname{Im} \alpha_{2k} = 0, \quad \operatorname{Im} \beta_{2k} = 0 \quad \text{при} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Из условия периодичности поля температур, напряжений, а также условия постоянства главного вектора всех сил, действующих на дугу, соединяющую две конгруэнтные точки в D , находим

$$b = \frac{q_*}{32}, \quad \alpha_0 = \frac{\pi^2}{24} \beta_2 \lambda^2 + C, \quad \beta_1 = -\frac{\alpha E}{4} \beta_1^*, \quad \beta_1^* = \frac{q}{4\delta} \frac{3\omega^2}{\pi^2},$$

$$C = -\frac{\beta_1}{4} \left[2\rho_3(1) - 2S_2(1) + 2\rho_1(1) - \frac{\pi^2}{18} \right],$$

где $S_2(z) = -\int S_1(z) dz$, $\rho_3(z) = \int \rho_2(z) dz$.

Нетрудно убедиться, что представления (7) – (10) определяют класс симметричных задач с периодическим распределением напряжений. Неизвестные функции $g(x)$, $g_1(y)$ и коэффициенты α_{2k} и β_{2k} должны быть определены из краевых условий (4) – (6). Так как выполняются условия периодичности, то система граничных условий (4) вырождается в одно функциональное уравнение, например, на контуре L_0 ($\tau = \lambda e^{i\theta}$), а система краевых условий (5) вырождается в граничное условие на L_1 , соответственно система граничных условий (6) вырождается в краевое условие на линии L_2 .

Для составления уравнений относительно коэффициентов α_{2k} и β_{2k} функций $\Phi_1(z)$ и $\Psi_1(z)$ представим граничное условие (4) в виде

$$\Phi_1(\tau) + \overline{\Phi_1(\tau)} - [\overline{\tau} \Phi_1'(\tau) + \Psi_1(\tau)] e^{2i\theta} + \frac{q_* \lambda^2}{32} = f_1(\theta) + if_2(\theta) + \varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta), \quad (11)$$

где

$$f_1(\theta) + if_2(\theta) = -\Phi_2(\tau) - \overline{\Phi_2(\tau)} + [\overline{\tau} \Phi_2'(\tau) + \Psi_2(\tau)] e^{2i\theta}, \quad (12)$$

$$\varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta) = -\Phi_3(\tau) - \overline{\Phi_3(\tau)} + [\overline{\tau} \Phi_3'(\tau) + \Psi_3(\tau)] e^{2i\theta}. \quad (13)$$

Относительно функций $f_1 + if_2$ и $\varphi_1 + i\varphi_2$ будем считать, что они разлагаются на контуре $|\tau| = \lambda$ в ряды Фурье.

В силу симметрии эти ряды имеют вид

$$f_1(\theta) + if_2(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k} e^{2ki\theta}, \quad \operatorname{Im} A_{2k} = 0,$$

$$A_{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f_1(\theta) + if_2(\theta)] e^{-2ki\theta} d\theta, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (14)$$

$$\varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_{2k} e^{2ki\theta}, \quad \operatorname{Im} B_{2k} = 0,$$

$$B_{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta)] e^{-2ki\theta} d\theta, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (15)$$

Подставив (12) в (14) и поменяв порядок интегрирования, после вычисления интегралов с помощью теории вычетов, найдем

$$A_{2k} = -\frac{1}{2\omega} \int_{L_1} g(t) f_{2k}(t) dt,$$

где $f_0(t) = 2\gamma(t)$, $f_2(t) = -\frac{\lambda^2}{2} \gamma^{(2)}(t)$,

$$f_{2k}(t) = \frac{\lambda^{2k}(2k-1)}{(2k)!} \gamma^{(2k)}(t) + \frac{\lambda^{2k-2}}{(2k-3)!} \gamma^{(2k-2)}(t) \quad (k = 2, 3, \dots),$$

$$f_{-2k}(t) = -\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \gamma^{(2k)}(t) \quad (k = 1, 2, \dots), \quad \gamma(t) = ctg \frac{\pi}{\omega} t.$$

Аналогично, подставив (13) в (15) и повторяя предыдущие действия, получим соотношения, определяющие коэффициенты B_{2k}

$$\varphi_0(it_1) = \delta(it_1) - \overline{\delta(it_1)},$$

$$\varphi_2(it_1) = -\frac{\lambda^2}{2} \delta^{(2)}(it_1) + 2[\delta(it_1) - it_1 \delta'(it_1)],$$

$$\varphi_{2k}(it_1) = \frac{(1-2k)\lambda^{2k}}{(2k)!} \delta^{(2k)}(it_1) + \frac{2\lambda^{2k-2}}{(2k-2)!} [k\delta^{(2k-2)}(it_1) - it_1 \delta^{(2k-1)}(it_1)] \quad (k = 2, 3, \dots),$$

$$\varphi_{-2k}(it_1) = -\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \overline{\delta^{(2k)}(it_1)} \quad (k = 1, 2, \dots), \quad \delta(it_1) = ctg \frac{\pi}{\omega} (it_1).$$

Подставив в левую часть граничного условия (12) вместо $\Phi_1(\tau)$, $\overline{\Phi_1(\tau)}$, $\Phi_1'(\tau)$ и $\Psi_1(\tau)$ их разложения в ряды Лорана в окрестности нулевой точки и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\exp(i\theta)$, после некоторых преобразований получим две бесконечные системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов α_{2k} и β_{2k}

$$\alpha_{2j+2} = \sum_{k=0}^{\infty} A_{j,k} \alpha_{2k+2} + b_j, \quad (j = 0, 1, 2, \dots) \quad (16)$$

$$A_{j,k} = (2j+1) \gamma_{j,k} \lambda^{2j+2k+2},$$

$$\gamma_{0,0} = \frac{3}{8} \lambda^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2i+1) g_{i+1}^2 \lambda^{4i+2}}{2^{4i+4}},$$

$$\gamma_{i,k} = -\frac{(2j+2k+3)! g_{j+k+1}}{(2j+1)!(2k+1)! 2^{2j+2k+2}} \frac{(2j+2k+4)! g_{j+k+2} \lambda^2}{(2j+2)!(2k+2)! 2^{2j+2k+4}} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2j+2i+1)!(2k+2i+1)! g_{i+j+1} g_{k+j+1}}{(2j+1)!(2k+1)!(2i+1)! 2^{2j+2k+4i+4}} + b_{j,k},$$

$$b_{0,k} = 0, \quad b_{j,0} = 0, \quad b_{i,k} = \frac{g_{j+1} g_{k+1} \lambda^2}{2^{2j+2k+4}} \left[\frac{12 + \pi^2 \lambda^2}{12 - \pi^2 \lambda^2} \right],$$

$$(j = 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots),$$

$$\begin{aligned}
b_0 &= M_2 - \frac{q_* \lambda^2}{32} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+1} \lambda^{4i+2}}{2^{4i+4}} A_{-2k-2}^*, \\
b_{2j+2} &= A_{2j+2} + \frac{(2j+1)g_{j+1} \lambda^{2j+2} (2C - A_0^*)}{K_1 2^{2j+2}} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2j+2k+3)! g_{j+k+2} \lambda^{2j+2k+4}}{(2j)!(2k+3)! 2^{2j+2k+4}} A_{-2k-2}^*, \\
K_1 &= 1 - \frac{\pi^2}{12} \lambda^2, \quad A_0^* = \beta_1 (1 - 2 \ln \lambda) - \frac{q_* \lambda^2}{32} + M_0, \quad A_{-2}^* = \frac{q_* \lambda^2}{32} + M_{-2}, \\
A_4^* &= M_4 - \frac{3}{64} \beta_1 g_2 \lambda^4, \quad A_{2k+2}^* = M_{2k+2} + \beta_1 \left(\frac{g_k \lambda^{2k}}{2^{2k}} - \frac{(2k+1)g_{k+1} \lambda^{2k+2}}{(2k+2)2^{2k+2}} \right), \\
A_{-2k-2}^* &= M_{-2k-2} + \beta_1 \frac{g_{k+1} \lambda^{2k+2}}{(2k+2)2^{2k+2}}, \quad g_{j+1} = 2 \sum_m' \frac{1}{m^{2j+2}}, \\
M_0 &= A_0 + B_0 - \frac{q_* \lambda^2}{32}, \quad M_{2k} = A_{2k} + B_{2k}, \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots).
\end{aligned}$$

Постоянные β_{2k} определяются из следующих равенств

$$\begin{aligned}
\beta_2 &= \frac{1}{K_1} \left[2C - A_0^* + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+1} \cdot \lambda^{2k+2}}{2^{2k+2}} \alpha_{2k+2} \right], \quad (17) \\
\beta_{2j+4} &= (2j+3) \alpha_{2j+2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2j+2k+3)! g_{j+k+2} \lambda^{2j+2k+4}}{(2j+2)!(2k+1)! 2^{2j+2k+4}} \alpha_{2k+2} - A_{-2j-2}^*.
\end{aligned}$$

Требую, чтобы функции (7) – (10) удовлетворяли краевому условию (5) на L_1 , после некоторых преобразований получим сингулярное интегральное уравнение относительно искомой функции $g(x)$

$$\frac{1}{\omega} \int_{L_1} g(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} (t-x) dt + N(x) = 0, \quad (18)$$

где

$$N(x) = \frac{3q_* x^2}{32} + 2\Phi_s(x) + x\Phi'_s(x) + \Psi_s(x),$$

$$\Phi_s(x) = \Phi_1(x) + \Phi_3(x), \quad \Psi_s(x) = \Psi_1(x) + \Psi_3(x).$$

Аналогично, подставив (7) – (10) в краевое условие (6) на L_2 , после некоторых преобразований получаем еще одно сингулярное интегральное уравнение относительно искомой функции $g_1(y)$:

$$\frac{1}{\omega} \int_{L_2} \left\{ g_1(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} (t-y) + \overline{g_1(t)} \left[\operatorname{cth} \frac{\pi}{\omega} (t-y) - \frac{\pi}{\omega} (t-y) \operatorname{sh}^{-2} \frac{\pi}{\omega} (t-y) \right] \right\} dt + H(y) = 0, \quad (19)$$

$$H(y) = \frac{3q_* y^2}{32} + \Phi_0(iy) + \overline{\Phi_0(iy)} + iy_0 \overline{\Phi'_0(iy)} + \overline{\Psi(iy)},$$

$$\Phi_0(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \quad \Psi_0(z) = \Psi_1(z) + \Psi_2(z).$$

В механике хрупкого разрушения [1; 4; 5] особый интерес представляет коэффициент интенсивности напряжений, характеризующий напряженно-деформированное состояние в окрестности концов трещины.

Для коэффициентов интенсивности напряжений в конце трещины будем иметь формулы

$$K_I^\ell = -\lim_{x \rightarrow \ell} \left[\sqrt{2\pi|x-\ell|} \cdot g(x) \right],$$

$$K_I^{\ell_1} = -\lim_{y \rightarrow \ell_1} \left[\sqrt{2\pi|y-\ell_1|} \cdot g_1(y) \right].$$

Сингулярные интегральные уравнения (18), (19) совместно с алгебраическими система уравнений (16) и (17) являются основными разрешающими уравнениями задачи, позволяющими определить функции $g(x)$ и $g_1(y)$, а также коэффициенты α_{2k} и β_{2k} . Зная функции $g(x)$, $g_1(y)$, $\Phi_1(z)$ и $\Psi_1(z)$ можно определить напряженно-деформированное состояние тепловыделяющей среды.

Используя разложения функций $\operatorname{cth} \frac{\pi}{\omega} z$, $\operatorname{sh}^{-2} \frac{\pi}{\omega} z$, замену переменных и процедуру алгебраизации интегральных уравнений [2; 4], получим две конечные алгебраические системы:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n a_{m,k} g_k^0 + \frac{1}{2} N_*(\eta_m) = 0, & (m=1, 2, \dots, n-1) \\ \sum_{k=1}^n (-1)^{k+n} g_k^0 \cdot \operatorname{tg} \frac{(2k-1)\pi}{4n} = 0; \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} \sum_{v=1}^n a_{m,v} g_{1,v}^0 + \frac{1}{2} H_*(\eta_m) = 0, & (m=1, 2, \dots, n-1) \\ \sum_{v=1}^n (-1)^{v+n} g_{1,v}^0 \cdot \operatorname{tg} \frac{(2v-1)\pi}{4n} = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Перейдем теперь к построению окончательной системы уравнений. С помощью уравнений (17) из остальных алгебраических систем (20) и (21) исключим неизвестные β_{2k} . После этого объединим эти системы. Результирующая система будет замкнутой относительно входящих в нее неизвестных α_{2k} , g_k^0 , $g_{1,v}^0$. В эти уравнения входят величины ℓ и ℓ_1 , характеризующие длину трещин, соответственно по осям абсцисс и ординат. В случае устойчивых трещин, находящихся подвижно-равновесном состоянии, их длины заранее неизвестны, а подлежат определению из дополнительного физического условия, задаваемого в кончике трещины. Для линейно-упругого тела таким условием является локальный критерий роста трещины Гриффитса-Ирвина $K_I = K_{Ic}$. В случае неустойчивых трещин это условие позволяет определить величину предельного значения интенсивности внутренних источников тела. В этом случае длина трещины считается известной. После нахождения приближенных значений g_k^0 и $g_{1,v}^0$ искомым функциям в узловых точках коэффициенты интенсивности напряжений K_I^ℓ и $K_I^{\ell_1}$ определялись следующими соотношениями

$$K_I^\ell = \sqrt{\pi\ell(1-\lambda_1^2)} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k g_k^0 \cdot \operatorname{ctg} \frac{2k-1}{4n} \pi, \quad (22)$$

$$K_I^{\ell_1} = \sqrt{\pi\ell_1(1-\lambda_2^2)} \cdot \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n (-1)^v g_{1,v}^0 \cdot \operatorname{ctg} \frac{2v-1}{4n} \pi,$$

где $\lambda_1 = \lambda/\ell$, $\lambda_2 = \lambda/\ell_1$

Таким образом, в случае устойчивых трещин из-за неизвестного размера трещины системы алгебраических уравнений оказываются нелинейными. В этом случае, к алгебраическим системам добавляются еще два уравнения

$$\begin{aligned} \sqrt{\pi\ell(1-\lambda_1^2)} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k g_k^0 \cdot \operatorname{ctg} \frac{2k-1}{4n} \pi &= K_{Ic}, \\ \sqrt{\pi\ell_1(1-\lambda_2^2)} \cdot \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n (-1)^v g_{1,v}^0 \cdot \operatorname{ctg} \frac{2v-1}{4n} \pi &= K_{Ic}. \end{aligned} \quad (23)$$

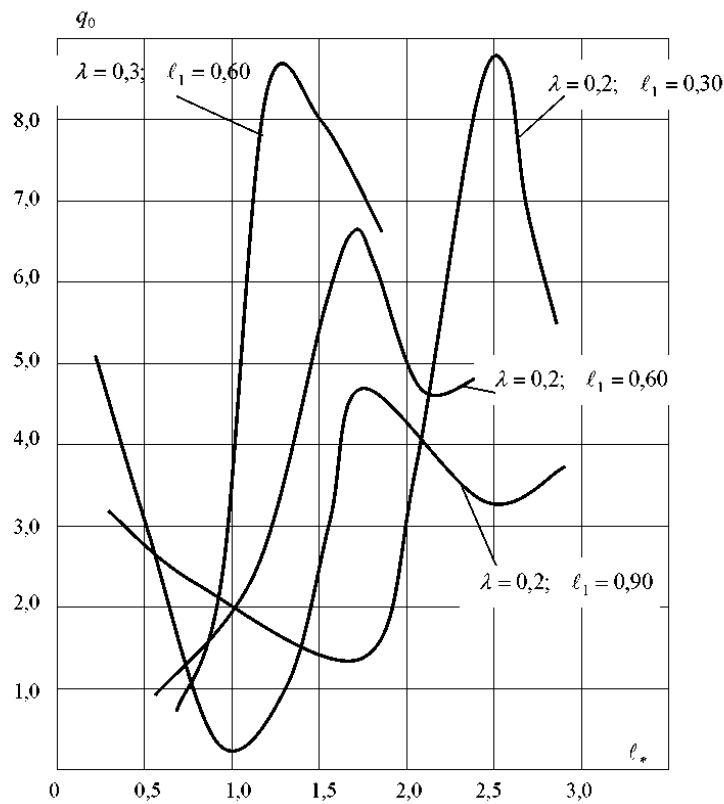


Рис. 2. Зависимость критической интенсивности тепловыделения $q_0 = q^* \sqrt{\omega}/K_c$ от длины трещин $l_* = (\ell - \lambda)/\lambda$

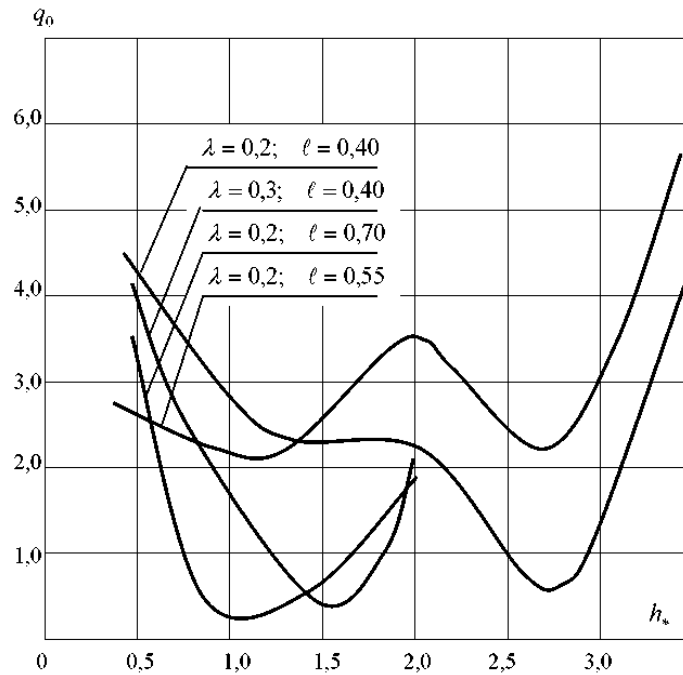


Рис. 3. Зависимость критической интенсивности теплового потока $q_0 = q^* \sqrt{\omega} / K_c$ от длины трещин $h_* = (\ell_1 - \lambda) / \lambda$

Однако решение нелинейной замкнутой системы при заданной интенсивности тепловыделения затруднительно. Поэтому проще считать заданным ℓ и ℓ_1 , а находить соответствующую интенсивность тепловыделения в среде. Объединенная система решалась методом Гаусса с выбором главного элемента для разных значений порядка n (n – число чебышевских узлов разбиения интервала интегрирования) в зависимости от расстояния между отверстиями. Как показали расчеты для диапазона $0,1 \leq \lambda \leq 0,6$ достаточно взять $n = 20$, а в диапазоне изменения радиуса кругового отверстия $0,6 \leq \lambda \leq 0,8$ оказалось достаточным взять $n = 40$, а бесконечные системы (16), (17) урезать до 12 уравнений (решения совпадают с точностью до четвертого знака). Для радиуса кругового отверстия $\lambda > 0,8$, начиная с $n = 60$, решения совпадают с точностью до третьего знака, при этом системы (16), (17) урезались до 30 уравнений. Отметим, что значения параметра $\lambda > 0,8$ выпадают из рабочего диапазона изменения радиуса кругового отверстия для среды. Быстрая сходимость полученных систем уравнений в диапазоне $0 < \lambda \leq 0,8$ объясняется тем, что коэффициенты систем (16), (17), (20), (21), а также формулы для функций $f_{2k}(t)$, $\varphi_{2k}(t)$ содержат высокие степени параметра. Были проведены расчеты по определению коэффициентов интенсивности напряжений. С помощью критерия хрупкого разрушения были определены зависимости критической интенсивности тепловыделения $q_0 = q^* \sqrt{\omega} / K_{IC}$. На основании полученных результатов на рис. 2 – 3 построены графики зависимости q_0 от длины трещин.

г. Баку

Поступила: 25 января 2008 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мирсалимов, В. М.* Разрушение упругих и упругопластических тел с трещинами / В. М. Мирсалимов. – Баку : ЭЛИМ, 1984. – 124 с.
2. *Мирсалимов, В. М.* Неодномерные упругопластические задачи / В. М. Мирсалимов. – М. : Наука, 1987. – 256 с.
3. *Мухелишвили, Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.
4. *Панасюк, В. В.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацьшин. – Киев : Наукова думка, 1976. – 443 с.
5. *Черепанов, Г. П.* Механика хрупкого разрушения / Г. П. Черепанов. – М. : Наука, 1974. – 640 с.