ВЕСТНИК ЧГПУ
им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
МЕХАНИКА
ПРЕДЕЛЬНОГО
СОСТОЯНИЯ
№ 1 • 2008

Сенашов С. И.

ОБ ОДНОЙ СИММЕТРИИ ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

(Сибирский государственный аэрокосмический университет имени М. Ф. Решетнева)

В статье рассмотрена одна из симметрий уравнений двумерной идеальной пластичности. Впервые приведено соответствующее ей точечное преобразование, которое названо квазирастяжением, и изучены некоторые его свойства. Показано как оно действует на характеристики решения Прандтля**.**

1. Рассмотрим двумерные уравнения идеальной пластичности записанные в виде:

$$\begin{aligned} &\sigma_x - 2K\left(\theta_x \cos 2\theta + \theta_y \sin 2\theta\right) = 0, \\ &\sigma_y - 2K\left(\theta_x \sin 2\theta - \theta_y \cos 2\theta\right) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где σ – гидростатическое давление, θ – угол между первым главным направлением тензора напряжений и осью Ox, K – постоянная пластичности, индекс внизу означает дифференцирование.

Известно[1], что система уравнений допускает, в смысле Ли, бесконечномерную алгебру Ли операторов, которая порождается базисом

$$\begin{gathered} X_1 = \partial_\sigma, \; X_2 = x\partial_x + y\partial_y, \\ X_3 = -y\partial_x + x\partial_y + \partial_\theta, \\ X_4 = \left(x\cos 2\theta + y\sin 2\theta + \frac{y_\sigma}{K}\right)\partial_x + \\ + \left(x\sin 2\theta - y\cos 2\theta - \frac{x_\sigma}{K}\right) - 4K\theta\partial_\sigma - \frac{\sigma}{K}\partial_\theta, \\ X_5 = \xi^+(\sigma,\theta)\partial_x + \eta^+(\sigma,\theta)\partial_y. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь оператор X_5 порождает бесконечный идеал алгебры Ли (2), при этом коэффициенты ξ^+, τ^+ оператора X_5 являются произвольными решениями следующей линейной системы уравнений

$$\begin{aligned} &\xi^+_\theta - 2K\left(\xi^+_\sigma \cos 2\theta + \eta^+_\sigma \sin 2\theta\right) = 0, \\ &\eta^+_\theta - 2K\left(\xi^+_\sigma \sin 2\theta - \eta^+_\sigma \cos 2\theta\right) = 0. \end{aligned}$$

2. Каждый оператор из (2) порождает однопараметрическую группу непрерывных преобразований, допускаемых системой (1). Для каждого оператора, кроме X_4, эти группы известны. Приведем их. Оператор X_1 порождает однопараметрическую группу трансляций

$$\sigma' = \sigma + a_1,$$

где a_1 – групповой параметр.

Оператор X_2 порождает однопараметрическую группу гомотетий (растяжений) в плоскости xy

$$x' = x\exp a_2, \ \ y' = y\exp a_2.$$

Оператор X_3 порождает группу вращений

$$x' = x\cos a_3 + y\sin a_3,$$

$$y' = -x\sin a_3 + y\cos a_3 \ \ ,$$

$$\theta' = \theta + a_{3.}$$

Оператор X_5 порождает обобщенную группу трансляций (переносов) на плоскости переменных xy.

$$x' = x + a_5\xi^+(\sigma,\theta), \ \ y' = y + a_5\eta^+(\sigma,\theta).$$

Можно показать, выкладки для краткости опущены, что оператор X_4 порождает однопараметрическую группу следующих преобразований

$$x' = \cos\theta'(x\cos\theta + y\sin\theta)\exp a - \sin\theta'(-x\sin\theta + y\cos\theta)\exp(-a),$$

$$y' = \sin\theta'(x\cos\theta + y\sin\theta)\exp a + \cos\theta'(-x\sin\theta + y\cos\theta)\exp(-a),$$

$$\sigma' = K\left[\left(\frac{\sigma}{2K} - \theta\right)\exp 2a + \left(\frac{\sigma}{2K} + \theta\right)\exp(-2a)\right], \tag{3}$$

$$\theta' = \frac{1}{2}\left[-\left(\frac{\sigma}{2K} - \theta\right)\exp 2a + \left(\frac{\sigma}{2K} + \theta\right)\exp(-2a)\right],$$

где для удобства параметр a_4 заменен символом a. Преобразования (3) мы назовем квазирастязжением. Откуда следует это название будет видно из свойств преобразований (3).

3. Некоторые свойства преобразования (3).

А) Нетрудно убедиться, что преобразование (3) соответствует оператору X_4. Для этого следует проверить равенства:

$$\left.\frac{dx'}{da_4}\right|_{\grave{a}_4 = 0} = x\cos 2\theta + y\sin 2\theta + y\frac{\sigma}{K},$$

$$\left.\frac{dy'}{da_4}\right|_{a_4 = 0} = x\sin 2\theta - y\cos 2\theta - \frac{x\sigma}{K},$$

$$\left.\frac{d\sigma'}{da_4}\right|_{a_4 = 0} = -4K\theta, \ \left.\frac{d\theta'}{da_4}\right|_{a_4 = 0} = -\frac{\sigma}{K}.$$

В) Для лучшего понимания смысла преобразования (3) умножим x' на $\cos\theta'$, а y' на $\sin\theta'$ и сложим. Получаем

$$x'\cos\theta' + y'\sin\theta' = (x\cos\theta + y\sin\theta)\exp a_4$$

Теперь умножим x' на $\sin\theta'$, а y' на $\cos\theta'$ и сложим. Получаем

$$-x'\sin\theta' + y'\cos\theta' = \left(-x\sin\theta + y\cos\theta\right)\exp\left(-a_4\right).$$

Умножим σ' на $\dfrac{1}{2K}$ и сложим с θ'. Получаем

$$\frac{\sigma'}{2K} - \theta' = \left(\frac{\sigma}{2K} - \theta\right)\exp\left(2a_4\right).$$

Аналогично получаем

$$\frac{\sigma'}{2K} + \theta' = \left(\frac{\sigma}{2K} + \theta\right)\exp\left(-2a_4\right).$$

Полученные преобразования можно компактно записать в виде:

$$\begin{aligned} &\overline{x'} = \overline{x}\exp a_4, \ \overline{y'} = \overline{y}\exp\left(-a_4\right), \\ &\xi' = \xi\exp\left(2a_4\right), \ \eta' = \eta\exp\left(-2a_4\right). \end{aligned} \qquad (4)$$

Здесь ξ, η инвариантны. Римана уравнения (1), которые постоянны вдоль характеристик этой системы, а $\overline{x} = x\cos\theta + y\sin\theta$, $\overline{y} = -x\sin\theta + y\cos\theta$ переменные предложенные Михлиным.

Из формул (4) следует и название преобразования (3) − квазирастяжение.

C) Используя формулы (4) найдем инвариантные преобразования (3). Независимых вариантов будет 3. Вот они:

$$I_1 = \overline{x}\overline{y} = \left(x\cos\theta + y\sin\theta\right)\left(-x\sin\theta + y\cos\theta\right),$$

$$I_2 = \xi\tau = \left(\frac{\sigma}{2K} - \theta\right)\left(\frac{\sigma}{2K}\right),$$

$$I_3 = \xi \cdot \overline{y^2} = \left(\frac{\sigma}{2K}\right)\left(-x\sin\theta + y\cos\theta\right).$$

Инвариантны I_1, I_2, I_3 можно использовать для построения инвариантных решений системы уравнений (1). Это будет сделано в последующих работах.

4. Покажем, как действует построенное преобразование (3) на решения уравнений идеальной пластичности.

В качестве примера такого решения возьмем решение Прандтля, которое запишем в виде

$$\sigma = -K\left(x - 2\sqrt{1-y^2}\right),$$

$$\cos\theta = y.$$

Это решение можно использовать для описания сжатия пластического слоя между жесткими плитами.

Известно, что это решение имеет две характеристики

$$\begin{aligned} &x = -2\theta + \sin 2\theta + c_1, \ y = \cos 2\theta, \\ &x = 2\theta - \sin 2\theta + c_2, \ y = \cos 2\theta \end{aligned} \qquad (5)$$

и соотношения на них

$$\frac{\sigma}{2K}-\theta=c_1,\ \frac{\sigma}{2K}+\theta=c_2,$$

где c_i – произвольные постоянные. Подействуем преобразованием (3) на первую характеристику (5). Для простоты будем считать, что $c_1=0$, а это значит, что мы рассматриваем характеристику, проходящую через точку (0,1).

В результате, после несложных преобразований, получаем

$$\begin{gathered}
x\left(\cos\theta'\cos\theta\exp\frac{a}{2}+\sin\theta'\sin\theta\exp\left(-\frac{a}{2}\right)\right)+y\left(\cos\theta'\sin\theta\exp\frac{a}{2}-\sin\theta'\cos\theta\exp\left(-\frac{a}{2}\right)\right)=\\
=-2\theta'+\sin 2\theta',\\
x\left(\sin\theta'\sin\theta\exp\frac{a}{2}-\cos\theta'\sin\theta\exp\left(-\frac{a}{2}\right)\right)+y\left(\sin\theta'\sin\theta\exp\frac{a}{2}+\cos\theta'\cos\theta\exp\left(-\frac{a}{2}\right)\right)=\\
=\cos 2\theta',
\end{gathered}\tag{6}$$

где $\theta'=\theta\exp(-a)$.

Найдем x и y из системы уравнений (6). Решение этой системы облегчается тем, что ее определитель равен 1.

В результате имеем:

$$\begin{gathered}
x=(-2\theta'+\sin\theta')\cdot\left(\sin\theta'\sin\theta\exp\frac{a}{2}+\cos\theta'\cos\theta\exp\left(-\frac{a}{2}\right)\right)-\cos 2\theta'\times\\
\times\left(\cos\theta'\sin\theta\exp\frac{a}{2}-\sin\theta'\cos\theta\exp\left(-\frac{a}{2}\right)\right),\\
y=\cos 2\theta'\left(\cos\theta'\cos\theta\exp\frac{a}{2}+\sin\theta'\sin\theta\exp\left(-\frac{a}{2}\right)\right)+(2\theta'-\sin 2\theta')\times\\
\times\left(\sin\theta'\cos\theta\exp\frac{a}{2}-\cos\theta'\sin\theta\exp\left(-\frac{a}{2}\right)\right),\\
\text{где } \theta'=\theta\exp(-a).
\end{gathered}\tag{7}$$

Формула (7) дает эволюцию характеристики решения Прандтля под действием преобразования (3), соответствующего оператору X_4.

Приведем графики этой характеристики при разных значениях группового параметра a.

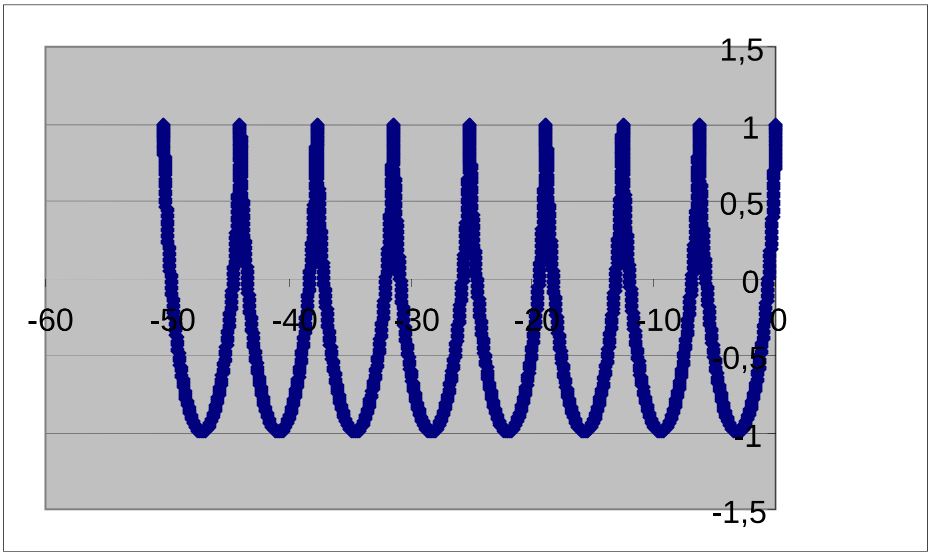

Рис. 1. График характеристики решения Прандтля. $a = 0$

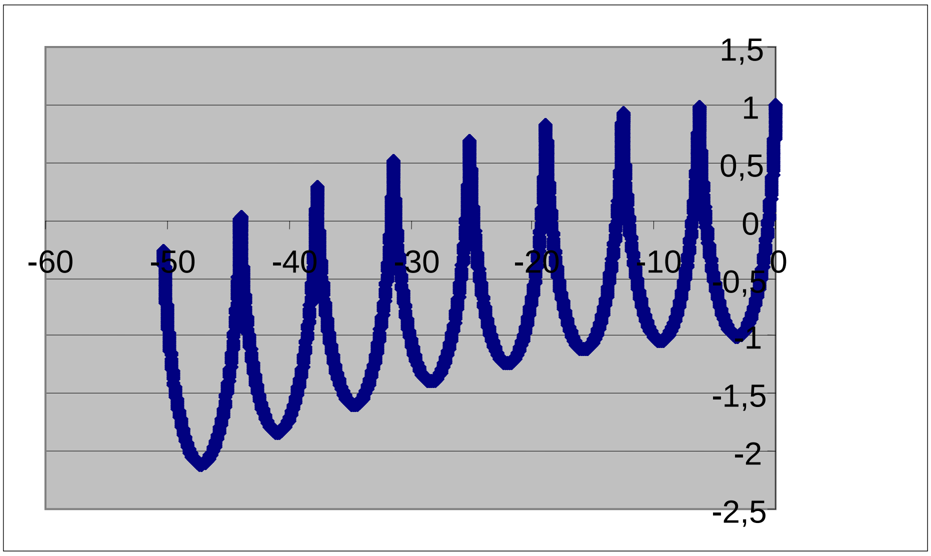

Рис. 2. График преобразованной характеристики решения Прандтля. $a = 0,001$

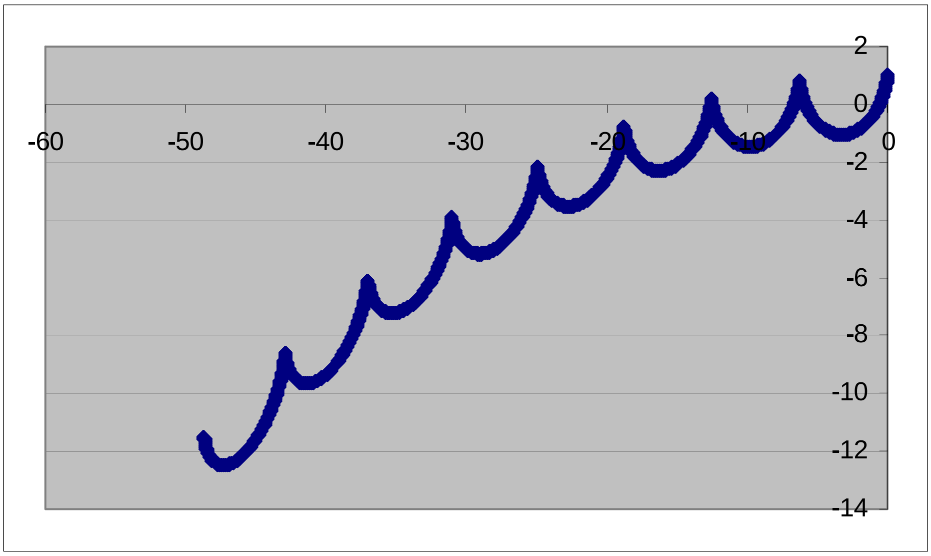

Рис. 3. График преобразованной характеристики решения. $a = 0{,}01$

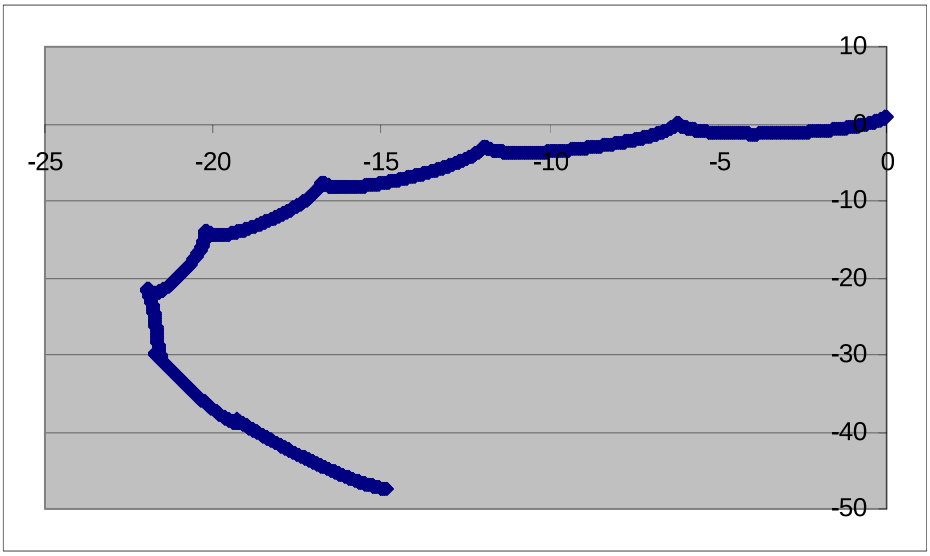

Рис. 4. График преобразованной характеристики решения. $a = 0{,}05$

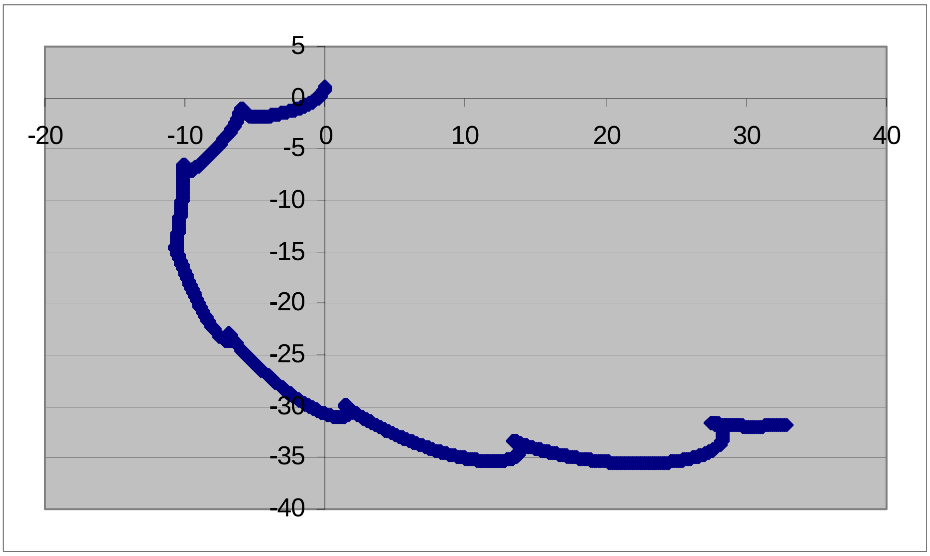

Рис. 5. График преобразованной характеристики решения. $a = 0{,}1$

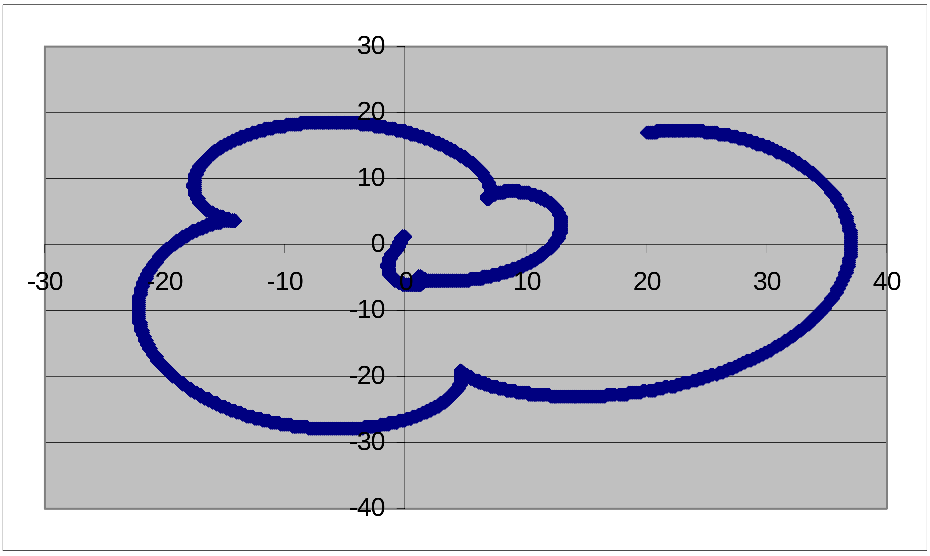

Рис. 6. График преобразованной характеристики решения. $a = 0.5$

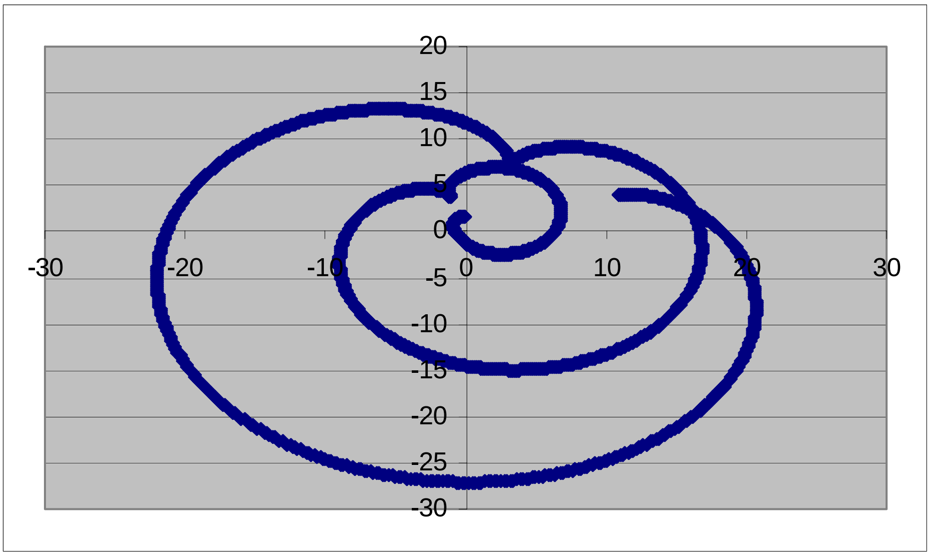

Рис 7. График преобразованной характеристики решения. $a = 1$

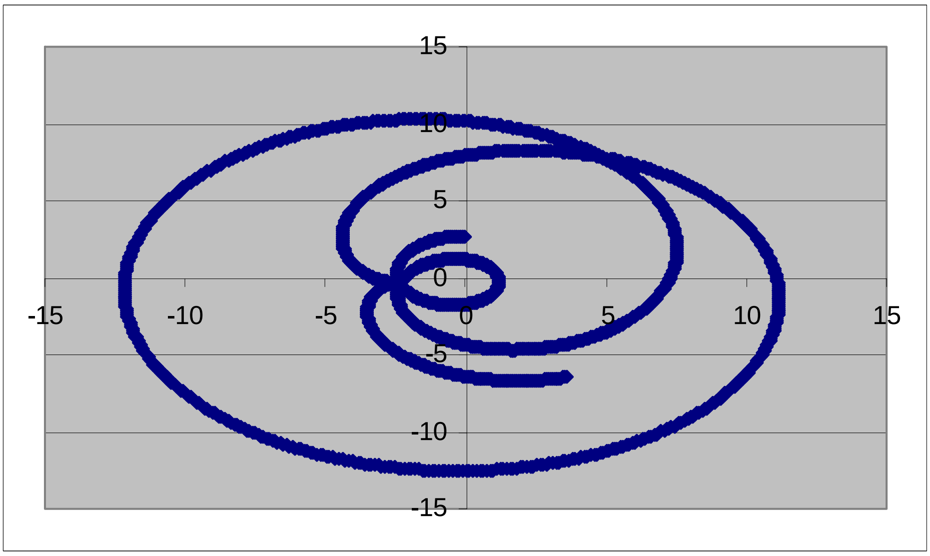

Рис 8. График преобразованной характеристики решения. $a = 2$

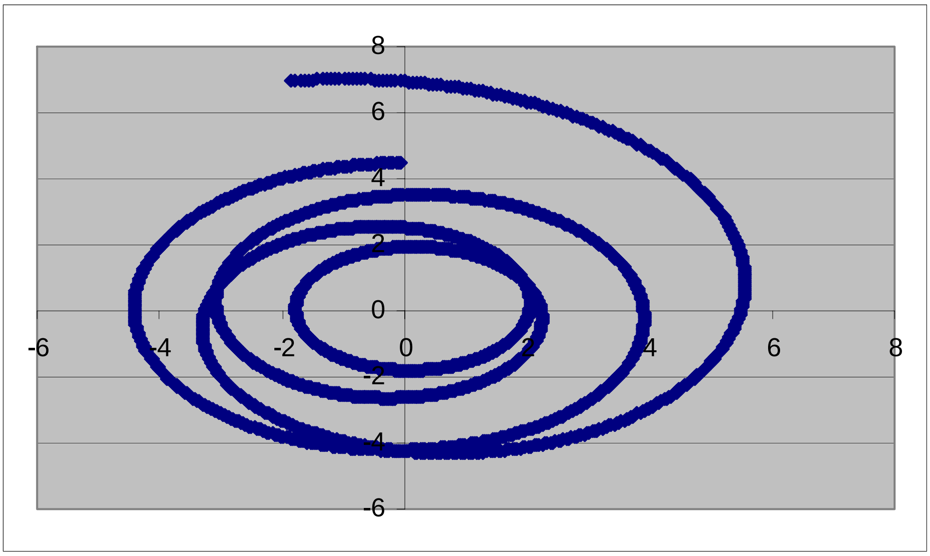

Рис. 9. График преобразованной характеристики решения. $a = 3$

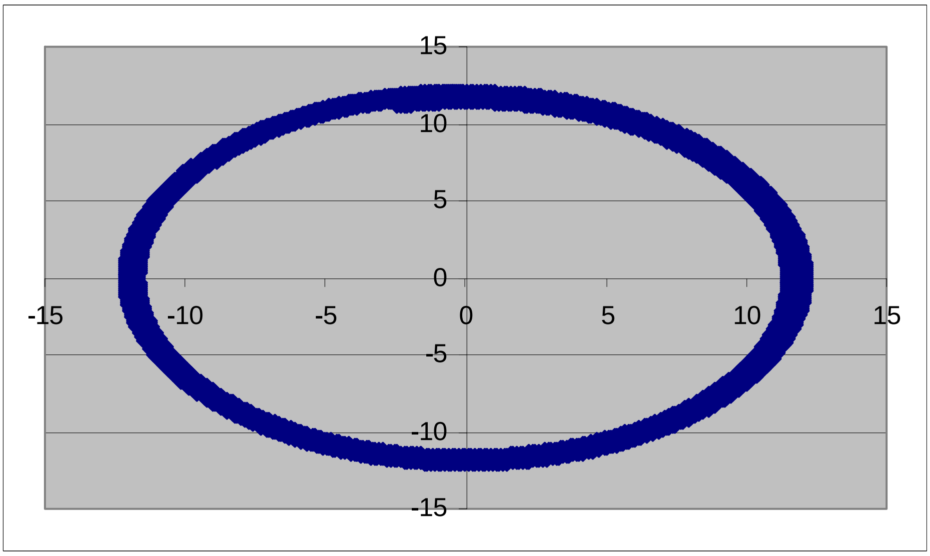

Рис.10. График преобразованной характеристики решения. $a = 5$

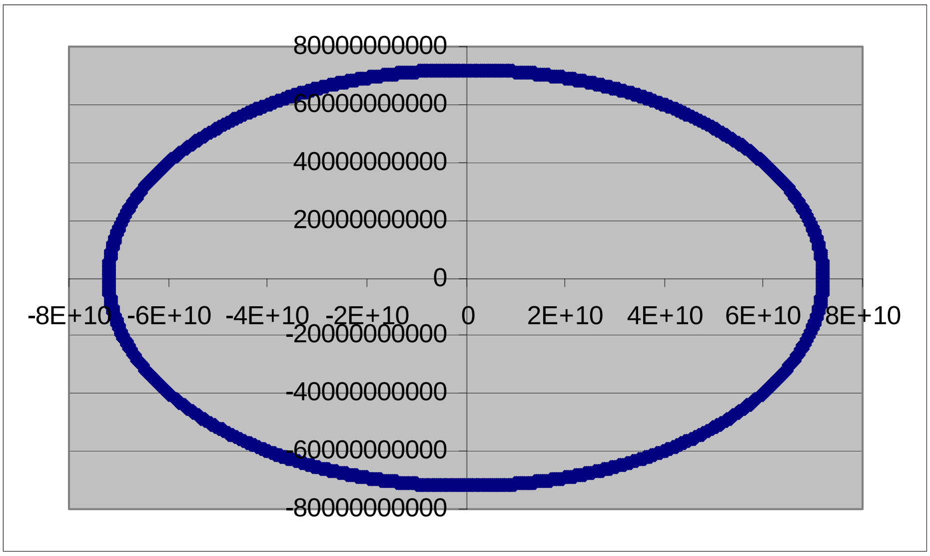

Рис.11. График преобразованной характеристики решения. $a = 50$

Все решения, изображенные на рисунках 1 – 11 построены в EXCEL с шагом 0,001.

Пусть a – большой параметр , тогда из формул (7) без труда получаем

$$x = -\sin\theta \exp\frac{a}{2}\ , y = \cos\theta \exp\frac{a}{2}. \qquad (8)$$

Это значит, что при больших значениях параметра a характеристики совершают осцилляции около окружности, заданной параметрическими формулами (8).

Такие осцилляции видны на рис. 10 и 11. Это значит, что решение, которому соответствуют эти характеристики может служить для описания пластического течения материала между коаксильными цилиндрами.

Более подробное описание этих и других решений будет дано в последующих работах.

г. Красноярск
Поступила: 17 декабря 2007 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Киряков, П. П. Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений / П. П. Киряков, С. И. Сенашов, А. Н. Яхно. – Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2001. – 190 с.*