

Амензаде Р. Ю., Киясбейли Э. Т., Фатуллаева Л. Ф.

## ПРЕДЕЛЬНОЕ ВРЕМЯ СЖАТОГО МНОГОСЛОЙНОГО ВЯЗКО-УПРУГОГО КОЛЬЦА

(Институт прикладной математики бакинского государственного университета)

Целью настоящей статьи является исследование потери устойчивости многослойного линейно вязко-упругого кольца, составленного из различных материалов и находящегося под действием равномерно распределенного внешнего давления заданной интенсивности.

**Ключевые слова:** многослойное вязко-упругое кольцо, модуль упругости, коэффициент ползучести материала, пакет, критическое время, вариационный метод, метод Релея-Ритца, аппроксимирующая функция, сжимающая нагрузка, мгновенная деформация, напряжение.

В настоящей статье излагается способ построения приближенных решений краевых задач ударного деформирования лучевым разложением за фронтами разрывов деформаций. Показана методика включения полученных прифронтовых разложений решений в конечно-разностную схему расчетов с целью выделения на каждом временном шаге положения поверхности разрывов деформаций и определения интенсивности разрывов на ней.

Актуальность и важность таких задач связаны с изысканием резервов экономии материала с одновременным повышением несущей способности конструкции. При решении такого класса задач необходим учет геометрической нелинейности. Получение здесь эффективных аналитических решений весьма затруднительно, а порою невозможно. Это связано с необходимостью интегрирования нелинейных краевых задач с разрывными коэффициентами. Поэтому, чтобы обойти возникающие при этом математические трудности, решение задачи осуществляется посредством вариационного метода смешанного типа.

Для трехслойного кольца при его симметричной структуре относительно срединной поверхности численно выявлено влияние различных геометрически нелинейных теорий на критическое время устойчивости.

**1. Вывод вариационного уравнения.** Зададим полярную систему координат  $(z, j)$  и введем в рассмотрение кольцо радиуса  $R$  и толщины  $2h$ . Предположим, что оно составлено из  $s$  чередующихся соединенных между собой по всем окружностям, разных по толщине концентрических слоев с разными значениями модуля упругости  $E_{k+1}$  и функциями ползучести  $D_{k+1}\{(t-t)S(t)\}$  [ $k = 0, 1, \mathbf{K}(s-1)$ ]. Далее будем их считать линейными относительно напряжения  $S$

$$D_{k+1} \{(t-t)s(t)\} = F'_{k+1}(t-t)s(t),$$

где  $F'_{k+1}(t-t)$  – разностное ядро ползучести, а штрих означает дифференцирование по параметру  $(t-t)$  [5]. Толщину каждого слоя обозначим через  $d_k$ . Таким образом,  $d_1 + d_2 + \mathbf{K} + d_s = 2h$  есть полная толщина кольца.

В работе [1] аналогичная задача решена при использовании теории, в которой учитывается нелинейность только прогиба  $w$  и при этом считается выполненным неравенство  $w/R \ll 1$ .

В основе используемой здесь геометрически нелинейной теории ставятся следующие предположения:

- а) в процессе деформирования учитывается одновременно нелинейность и по прогибу и по касательному перемещению  $v$  (полная нелинейность);
- б) пренебрегая касательным перемещением, ограничимся нелинейностью только прогиба;
- в) условия контакта между слоями пакета заключаются в их жестком сцеплении, из чего следует равенство на них перемещений и отсутствие взаимного давления слоев;
- г) процесс устойчивости происходит в плоскости кольца;
- д) в силу тонкостенности окружное напряжение  $S$  меняется по толщине по линейному закону.

Применимость и точность последнего допущения обоснована в [3]. В дальнейшем будем руководствоваться гипотезой плоских сечений Кирхгофа-Лява, при которых допущения в) выполняются автоматически.

При принятых предположениях, выпишем физическое соотношение для пакета в целом в виде одного равенства [5]

$$e^\Phi = \frac{S}{E_{k+1}} + \int_0^t F'_{k+1}(t-t)s(t)dt, \quad a_k \leq z \leq a_{k+1}, \quad (1.1)$$

где

$$a_k = -h + \sum_{i=0}^s d_j, \quad (d_0 = 0). \quad (1.2)$$

Для дальнейших целей конкретизируем функцию  $F'_{k+1}(t-t)$ , задав её в экспоненциальном виде

$$F'_{k+1}(t-t) = \frac{A_{k+1}}{E_{k+1}} e^{-a(t-t)}. \quad (1.3)$$

Здесь  $A_{k+1}$  – коэффициенты ползучести материалов слоев, а показатель  $a$  принимается одинаковым для всего пакета.

Рассмотрим теперь устойчивость выбранного кольца, сжатого равномерно распределенной по внешней поверхности сжимающей нагрузкой  $q = const$ .

Вследствие гипотезы плоских сечений запишем

$$e = e_0 + kz.$$

Учитывая допущение а) величину  $e_0$  и кривизну  $k$  определим по формулам нелинейной теории тонких оболочек [6]

$$e_0 = \frac{1}{R} \left( w + \frac{\partial v}{\partial j} \right) + \frac{1}{2R^2} \left\{ \left( \frac{\partial v}{\partial j} + w \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial j} - v \right)^2 \right\}, \quad k = -\frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial j^2} - \frac{\partial v}{\partial j} \right). \quad (1.4)$$

Для случая б) соответствующие формулы приводятся к виду

$$e_0 = \frac{w}{R} + \frac{1}{2R^2} \left\{ w^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial j} \right)^2 \right\}, \quad k = -\frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial j^2} - \frac{\partial v}{\partial j} \right). \quad (1.5)$$

Решение задачи проведем посредством вариационного принципа [4], при котором значения функционалов для случаев а) и б) принимают, соответственно, следующие выражения

$$\begin{aligned} K = R \int_{-h}^h \int_0^{2p} \left\{ \mathfrak{L} + \frac{S}{2R^2} \left[ \left( \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial j} - \mathfrak{L} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial j} + \mathfrak{L} \right)^2 \right] \right\} dj dz - \\ - R \int_0^{2p} \sum_{k=0}^{s-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \mathfrak{L}^\Phi dz dj + \frac{R}{2} \int_0^{2p} \sum_{k=0}^{s-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{\mathfrak{L}^2}{E_{k+1}} dz dj \end{aligned} \quad (1.6)$$

и

$$\begin{aligned} K = R \int_{-h}^h \int_0^{2p} \left\{ \mathfrak{L} + \frac{S}{2R^2} \left[ \left( \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial j} \right)^2 + \mathfrak{L}^2 \right] \right\} dj dz - \\ - R \int_0^{2p} \sum_{k=0}^{s-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \mathfrak{L}^\Phi dz dj + \frac{R}{2} \int_0^{2p} \sum_{k=0}^{s-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{\mathfrak{L}^2}{E_{k+1}} dz dj . \end{aligned} \quad (1.7)$$

Под точкой здесь и далее будем понимать дифференцирование по физическому времени  $t$ . Из (1.3) имеем

$$F''(t-t) = -a \frac{A_{k+1}}{E_{k+1}} e^{-a(t-t)}$$

и для  $\mathfrak{L}^\Phi$  запишем

$$\mathfrak{L}^\Phi = \frac{1}{E_{k+1}} \left\{ \mathfrak{L} + A_{k+1} \left[ s - a \int_0^t e^{-a(t-t)} s(t) dt \right] \right\}. \quad (1.8)$$

Учитывая в (1.6) и (1.7) зависимость (1.8), значения функционалов оказываются следующими:

для случая а)

$$\begin{aligned} K = R \int_{-h}^h \int_0^{2p} \left\{ \mathfrak{L} + \frac{S}{2R^2} \left[ \left( \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial j} - \mathfrak{L} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial j} + \mathfrak{L} \right)^2 \right] \right\} dj dz - \frac{R}{2} \int_0^{2p} \sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{E_{k+1}} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \mathfrak{L}^2 dz dj - \\ - R \int_0^{2p} \sum_{k=0}^{s-1} \frac{A_{k+1}}{E_{k+1}} \int_{a_k}^{a_{k+1}} s \mathfrak{L} dz dj + aR \int_0^{2p} \sum_{k=0}^{s-1} \frac{A_{k+1}}{E_{k+1}} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \left\{ \int_0^t e^{-a(t-t)} s(t) dt \right\} dz dj , \end{aligned} \quad (1.9)$$

для случая б)

$$K = R \int_{-h}^h \int_0^{2p} \left\{ \mathfrak{L} + \frac{S}{2R^2} \left[ \left( \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial j} \right)^2 + \mathfrak{L}^2 \right] \right\} dj dz - \frac{R}{2} \int_0^{2p} \sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{E_{k+1}} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \mathfrak{L}^2 dz dj -$$

$$-R \int_0^{2p} \sum_{k=0}^{s-1} \frac{A_{k+1}}{E_{k+1}} \int_{a_k}^{a_{k+1}} s \mathcal{S} dz dj + aR \int_0^{2p} \sum_{k=0}^{s-1} \frac{A_{k+1}}{E_{k+1}} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \mathcal{S} \left[ \int_0^t e^{-a(t-t)} s(t) dt \right] dz dj . \quad (1.10)$$

Для получения окончательного вида функционала, воспользуемся методом Релея-Ритца. С этой целью, в качестве аппроксимирующих функций положим

$$w = w_0(t) + w_1(t) \cos lj , \quad v = v_0(t) \sin lj , \quad M = m(t) \cos lj \quad (1.11)$$

или после дифференцирования по  $t$  в скоростях будем иметь:

$$\dot{w} = \dot{w}_0 + \dot{w}_1 \cos lj , \quad \dot{v} = \dot{v}_0 \sin lj , \quad \dot{M} = \dot{m} \cos lj , \quad (1.12)$$

где величина  $l$  принимает четные значения (2, 4, 6) и характеризует число волн в окружном направлении, а  $w_0$ ,  $w_1$ ,  $v_0$  и  $m$  – независимые варьируемые параметры. Следуя допущению д), в дальнейших рассуждениях примем

$$s = -\frac{qR}{2h} + \frac{3z}{2h^3} M \quad \text{или} \quad \mathcal{S} = \frac{3z}{2h^3} M \mathcal{M} . \quad (1.13)$$

**2. Случай полной нелинейности.** Последующий ход вычислений заключается в том, что соотношения (1.11) – (1.13) подставляются в выражение функционала (1.9) и после интегрирования по  $z$  и  $j$  находим его как функцию  $w_0$ ,  $w_1$ ,  $v_0$ ,  $m$  и их производных по  $t$ . Проведя соответствующие выкладки, получим

$$\begin{aligned} K = & \frac{pl^2}{R} w_1 \dot{w}_1 + \frac{pl}{R} \dot{w}_0 \dot{m} - \frac{pl^2}{2} q v_1^2 - \frac{pq}{2} v_0^2 - \frac{pl^2}{2} q v_0^2 - pq v_0^2 - \frac{p}{2} q v_1^2 - \\ & - 2plq v_1 v_0 - \frac{9pR}{8h^6} h_2 m^2 - \frac{9pR}{4h^6} g_2 m \dot{m} + a \frac{9pR}{4h^6} g_2 \mathcal{M} \int_0^t e^{-a(t-t)} m(t) dt . \end{aligned} \quad (2.1)$$

В (2.1), для краткости записи, введены следующие обозначения

$$h_2 = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{E_{k+1}} \int_{a_k}^{a_{k+1}} z^2 dz , \quad g_2 = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{A_{k+1}}{E_{k+1}} \int_{a_k}^{a_{k+1}} z^2 dz . \quad (2.2)$$

Условие стационарности построенного функционала (2.1)

$$dK = 0 ,$$

соответствующее равенству нулю выражений

$$\frac{\partial K}{\partial w_0} = 0 , \quad \frac{\partial K}{\partial w_1} = 0 , \quad \frac{\partial K}{\partial v_0} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial K}{\partial m} = 0$$

приводит к следующей системе трех обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{m} = \frac{l^2 - 1}{l^2} Rq v_1 \quad \text{или} \quad m = \frac{l^2 - 1}{l^2} Rq w_1 , \quad \text{т.к.} \quad m = 0 \quad \text{при} \quad q = 0 , \\ \dot{v}_0 = -\frac{1}{l} \dot{w}_1 , \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\frac{l^2}{R} \dot{w}_1 + \frac{p}{R} \dot{w}_0 l - \frac{9R}{4h^6} h_2 \dot{m} - \frac{9R}{4h^6} g_2 m + a \frac{9R}{4h^6} g_2 \int_0^t e^{-a(t-t)} m(t) dt = 0 .$$

Отсутствие четвертого уравнения связано с тем, что оно удовлетворяется тождественно. Комбинируя уравнения (2.3), можно записать

$$w_1 \left( -\frac{l^2 - 1}{R} + \frac{9(l^2 - 1)R^2}{4l^2 h^6} h_2 q \right) + \frac{9(l^2 - 1)R^2}{4l^2 h^6} g_2 q w_1 -$$

$$- a \frac{9(l^2 - 1)R^2}{4l^2 h^6} g_2 q \int_0^t e^{-a(t-t)} w_1(t) dt = 0. \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) необходимо дополнить начальным условием

$$w_1(0) = w_1^0.$$

Величина  $w_1^0$  представляет собой значение прогиба немедленно после приложения нагрузки  $q$ . Рассмотрение вопроса об устойчивости при вязко-упругости имеет смысл только тогда, когда действующая нагрузка меньше критической. Так как мгновенная деформация линейно упругая, то для определения  $w_1^0$  и  $q_{kp}$  естественно применить вариационный принцип [2], задавшись тем же предположительным распределением напряжения, перемещений и момента, что и при анализе вязко-упругости, то есть представив  $w$ ,  $v$ ,  $M$  и  $S$  формулами (1.11) и (1.13). Соответствующий функционал в этом случае принимает следующий вид

$$K = R \int_{-h}^h \int_0^{2p} \left\{ \frac{S}{2R^2} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial j} - v \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial j} + v \right)^2 \right] \right\} dj dz -$$

$$- \frac{R}{2} \int_0^{2p} \sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{E_{k+1}} \int_{a_k}^{a_{k+1}} S^2 dz dj + R \int_0^{2p} w dj.$$

Однако здесь под точкой следует понимать дифференцирование по  $q$ . Вычисляя этот функционал и варьируя его по  $w_0$ ,  $w_1$ ,  $v_0$  и  $v_1$ , окончательно приходим к следующему дифференциальному уравнению относительно  $w_1$

$$w_1 = w_1^0 \left\{ \frac{3R^2(l^2 - 1)}{2l^2 h^4} h_2 \right\} \left\{ \frac{2h^2(l^2 - 1)}{3R} - \frac{3R^2(l^2 - 1)}{2l^2 h^4} q h_2 \right\}^{-1}. \quad (2.5)$$

Для определения критической нагрузки надо приравнять нулю знаменатель уравнения (2.5). Отсюда

$$q_{kp} = \frac{4l^2 h^6}{9R^3} h_2^{-1}, \quad (2.6)$$

а величина мгновенного прогиба находится по формуле, которую легко установить из интегрирования уравнения (2.5) методом разделения переменных

$$w_1^0 = w_1^y \frac{1}{1 - \frac{9R^3 q}{4l^2 h^6} h_2}. \quad (2.7)$$

Здесь величина  $w_1^y$  – задаваемая амплитуда начального несовершенства кольца.

Введем следующие безразмерные соотношения, позволяющие значительно сократить последующие записи

$$y = \frac{w_1}{h}, \quad w = \frac{q}{q_{kp}} = \frac{w_1}{l^2},$$

где

$$w_1 = q \left\{ \frac{4h^6}{9R^3} h_2^{-1} \right\}^{-1},$$

а  $q_{кр}$  определяется по формуле (2.6).

Такое обезразмеривание  $w$  преследует цель записать далее задачу в виде, явным образом зависящим от  $l$ . Что касается  $w$ , то, как уже отмечалось выше, для неё имеем неравенство  $w < 1$ , откуда следует, что  $w_1 < l^2$ . Теперь, уравнение (2.4) и начальное условие (2.7) будут выглядеть следующим образом

$$\left\{ y - a \int_0^t e^{-a(t-t)} y(t) dt \right\} = 0, \quad (2.8)$$

$$y_0 = y^\vee \frac{1}{1 - \frac{w_1}{l^2}}, \quad (2.9)$$

где

$$y^\vee = \frac{w_1^\vee}{h}.$$

Учитывая формулу дифференцирования под знаком интеграла, имеем равенство

$$\left\{ \int_0^t e^{-a(t-t)} y(t) dt \right\}^\bullet = y - a \int_0^t e^{-a(t-t)} y(t) dt,$$

которое приводит уравнение (2.8) к виду

$$\left\{ y(t) - \frac{w_1}{l^2 - w_1} \frac{g_2}{h_2} \int_0^t e^{-a(t-t)} y(t) dt \right\}^\bullet = 0.$$

Проинтегрировав выражение в фигурных скобках, получим

$$y(t) - \frac{w_1}{l^2 - w_1} \frac{g_2}{h_2} \int_0^t e^{-a(t-t)} y(t) dt = C. \quad (2.10)$$

Постоянную  $C$  определим, используя условие (2.9). При  $t = 0$

$$C = y(0) = y_0,$$

а именно

$$C = y^\vee \frac{1}{1 - \frac{w_1}{l^2}}.$$

Тогда, если обозначить через  $b$  комбинацию

$$b = \frac{w_1}{l^2 - w_1} \frac{g_2}{h_2},$$

из (2.10) будем иметь

$$y(t) - b \int_0^t e^{-a(t-t)} y(t) dt = y_0. \quad (2.11)$$

Отсюда, используя замену

$$-l = b - a,$$

уравнение (2.11) приведем к виду

$$y(t) - b \int_0^t e^{-(l+b)(t-t)} y(t) dt = y_0. \quad (2.12)$$

Теперь можно сразу написать решение интегрального уравнения (2.12) [8, 25]

$$y = y_0 \left\{ 1 + b \int_0^t e^{-l(t-t)} dt \right\}. \quad (2.13)$$

Вычисляя интеграл, фигурирующий в (2.13), получим

$$y(t) = y_0 \left\{ \left( 1 - \frac{a}{l} \right) e^{-lt} + \frac{a}{l} \right\}. \quad (2.14)$$

Согласно формуле (2.14) следует, что в зависимости от знака  $l$  возможны различные варианты решения. Если  $l \leq 0$ , то осуществляется неограниченный рост прогиба во времени. При  $l < 0$  он имеет экспоненциальный характер, а для  $l = 0$  – линейный, причем

$$y = y_0(1 + at),$$

в чем можно легко убедиться, применив к формуле (2.14) правило Лопиталья. Если же  $l > 0$ , то наблюдается ограниченный рост прогиба. Его предельное значение определяется величиной  $y_* = y_0 \frac{a}{l}$ , где, по определению,  $a/l > 1$ .

**3. Случай нелинейности только прогиба.** Оставляя в основном прежние обозначения, будем пренебрегать касательным перемещением и ограничимся учетом нелинейности только прогиба. Соответствующие соотношения (1.11) – (1.13) подставляются в выражение функционала (1.10) и после известной процедуры имеем

$$\begin{aligned} K = & \frac{pl^2}{R} w_1^2 - \frac{pl^2}{2} q w_1^2 - p q w_0^2 - \frac{p}{2} q w_1^2 - \frac{9pR}{8h^6} h_2 w_1^2 - \frac{9pR}{4h^6} g_2 m w_1^2 + \\ & + a \frac{9pR}{4h^6} g_2 m \int_0^t e^{-a(t-t)} m(t) dt. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь  $h_2$  и  $g_2$  определяются по формуле (2.2).

В результате вычислений, выполненных аналогично предыдущим, получим:

$$\begin{aligned} & w_1 \left( -\frac{l^2}{R} + \frac{9(l^2+1)R^2}{4l^2h^6} h_2 q \right) + \frac{9(l^2+1)R^2}{4l^2h^6} g_2 q w_1 - \\ & - a \frac{9(l^2+1)R^2}{4l^2h^6} g_2 q \int_0^t e^{-a(t-t)} w_1(t) dt = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь в качестве  $q_{кр}$  принимается значение критической силы для случая нелинейности только прогиба, которое определяется по формуле

$$q_{кр} = \frac{16l^2h^6}{45R^3} h_2^{-1}, \quad (3.3)$$

а величина мгновенного прогиба находится из равенства

$$w_1^0 = w_1^\vee \frac{1}{1 - \frac{45R^3 q}{16l^2 h^6} h_2}. \quad (3.4)$$

Заметим, что соотношения (3.3) и (3.4) получены таким же образом, что и в пункте 2 для принятой здесь нелинейной теории.

Задавая прежние безразмерные соотношения

$$y = \frac{w_1}{h}, \quad w = \frac{q}{q_{кр}} = \frac{w_1}{l^2},$$

в которых

$$w_1 = q \left\{ \frac{16h^6}{45R^3} h_2^{-1} \right\}^{-1},$$

а  $q_{кр}$  определяется по формуле (3.3), уравнение (3.2) и начальное условие (3.4) можно переписать следующим образом:

$$\frac{w_1}{5l^4} \frac{g_2}{h_2} \left\{ y - a \int_0^t e^{-a(t-t)} y(t) dt \right\} = 0, \quad (3.5)$$

$$y_0 = y^\vee \frac{1}{1 - \frac{w_1}{l^2}}, \quad (3.6)$$

где

$$y^\vee = \frac{w_1^\vee}{h}.$$

Теперь не представляет труда записать решение (3.5), которое имеет вид

$$y(t) = y_0 \left\{ \left( 1 - \frac{a}{l} \right) e^{-lt} + \frac{a}{l} \right\}. \quad (3.7)$$

Здесь

$$-l = b - a,$$

а  $b$  определяется из равенства

$$b = \frac{w_1}{5l^4} \frac{g_2}{h_2} \frac{1}{4(l^2 + 1) - w_1}.$$

Чисто визуальная идентичность полученных решений (2.14) и (3.7) вполне объяснима проведенным обезразмериванием, так как в обоих случаях критическая сила выбирается из решения соответствующей линейно-упругой задачи. Поэтому здесь вопрос необходимо формулировать следующим образом: задавать такие величины  $w$ , которые соответствуют одному и тому же значению  $q$ . Очевидно, что тогда численное значение мгновенных прогибов будут различными.

Принимая  $w_1 = 3$ , что заимствовано из работы [1], где исследован случай простой геометрической нелинейности, из предыдущих рассуждений имеем следующую цепочку равенств



$$3q_{кр}^{(1)} = w_2 q_{кр}^{(2)} = w_3 q_{кр}^{(3)},$$

в которых

$$q_{кр}^{(1)} = \frac{l^2 h^6}{9R^3} h_2^{-1}, \quad q_{кр}^{(2)} = \frac{16l^2 h^6}{45R^3} h_2^{-1}, \quad q_{кр}^{(3)} = \frac{4l^2 h^6}{9R^3} h_2^{-1}.$$

Здесь верхние и нижние индексы соответствуют различным теориям нелинейности, а именно: (1) – простая нелинейность, (2) – нелинейность только прогиба, (3) – полная нелинейность. Отсюда имеем

$$w_2 \approx 0,94, \quad w_3 \approx 0,75.$$

**4. Численный расчет и выводы.** Полученные выше решения (2.14) и (3.7) в принципе применимы для любых значений  $t$ . Однако очень большие прогибы в кольцах, являющихся элементами конструкций, недопустимы сами по себе. Поэтому весьма разумно ограничить время эксплуатации кольца условием достижения прогибом некоторой величины, фиксированной из тех или иных физически обоснованных соображений и тем самым определить критическое время устойчивости  $t_{кр}$ . Примем  $\tilde{y} = 1$ , что соответствует безразмерному прогибу, равному половине толщины. Согласно отмеченному, запишем

$$1 = y_0 \left\{ \left( 1 - \frac{a}{l} \right) e^{-l t_{кр}} + \frac{a}{l} \right\},$$

откуда находим

$$t_{кр} = -\frac{1}{l} \ln \left| \frac{l - a y_0}{l y_0 \left( 1 - \frac{a}{l} \right)} \right|. \quad (4.1)$$

Далее ограничимся случаем  $l < 0$  и приведем некоторые результаты вычислений, соответствующих различным значениям физических и геометрических параметров, характеризующих кольцо. Примем

$$A_1 = 0,8 \text{ сек}^{-1}, \quad y_0^\vee = 10^{-1}.$$

В таблице 1 приведены численные значения мгновенного прогиба, соответствующие одной и той же сжимающей силе  $q$ .

**Таблица 1**

$w$	$w_1 = 3$	$w_2 = 0,94$	$w_3 = 0,75$
$y_0$	0,4	0,13	0,12

Такой выбор значений  $w$  всегда обеспечивает условие выполнения неравенства  $w/l^2 < 1$ , и пригоден при любом числе волнообразования  $l$ . Кольцо представим трехслойным ( $s = 3$ ) и обладающим следующей периодической структурой

$$E_1 = E_3, \quad A_1 = A_3, \quad d_1 = d_2.$$

Введем дополнительные безразмерные обозначения

$$E = \frac{E_1}{E_2}, \quad A = \frac{A_2}{A_1} \quad \text{и} \quad x = \frac{d_2}{d_1}.$$

Исходя из этого, по формуле (1.2), для  $a_k$  имеем

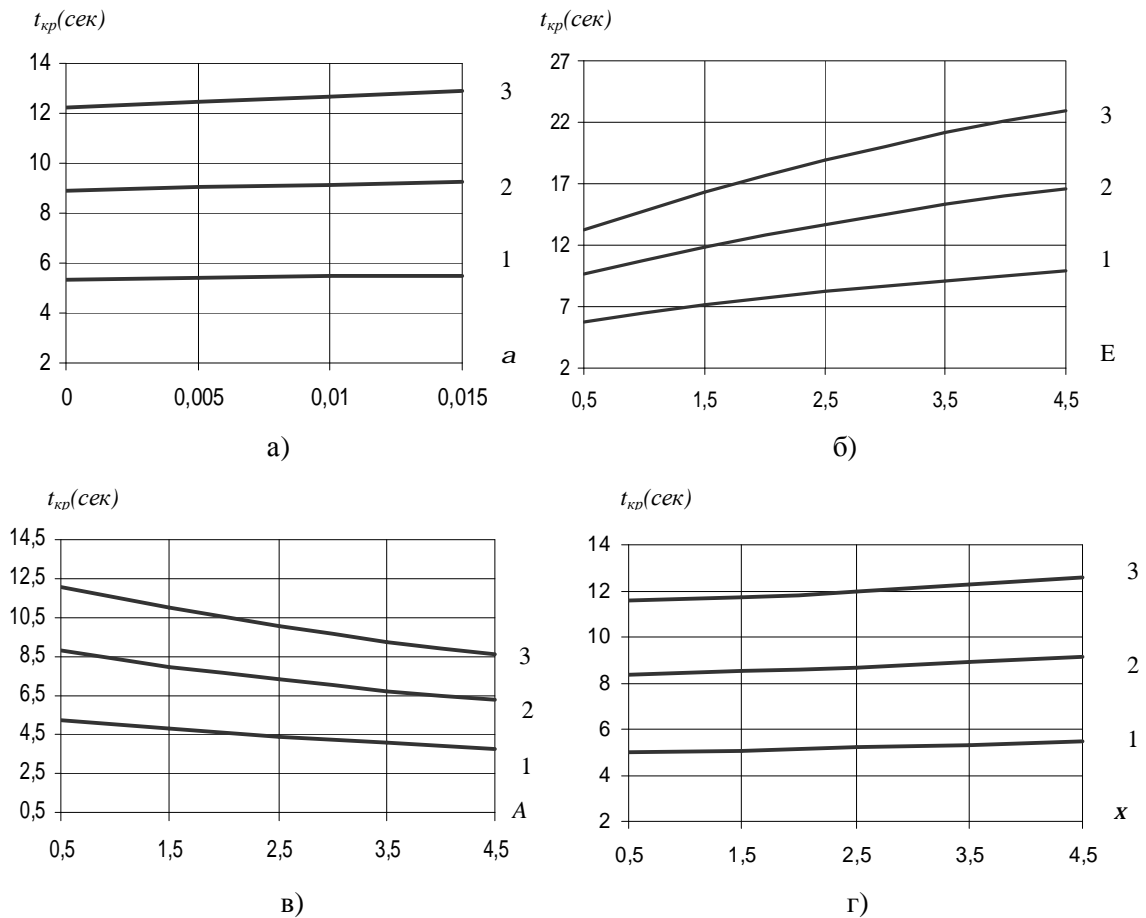
$$a_0 = -h, \quad a_1 = -\frac{d_2}{2}, \quad a_2 = \frac{d_2}{2}, \quad a_3 = h.$$

Отмеченное выше позволяет определить отношение  $g_2/h_2$ , которое записывается в виде

$$\frac{g_2}{h_2} = A_1 \frac{1 + 1,5x + 0,75x^2 + 0,125EAx^3}{1 + 1,5x + 0,75x^2 + 0,125Ex^3}.$$

Случай однородного кольца автоматически вытекает из формулы (4.1), при  $E = A = x = 1$ .

Теперь мы готовы представить результаты вычислений, выполненных исходя из полученной выше зависимости (4.1).



**Рис. 1.** Зависимости критического времени устойчивости  $t_{кр}$  от параметров  $a$  ( $a, E = 0,25; x = 4, A = 0,25$ );  $E$  ( $б, a = 0,005, A = 0,25, x = 4$ );  $A$  ( $в, a = 0,005, E = 0,25, x = 4$ );  $x$  ( $г, a = 0,005, E = 0,25, A = 0,25$ ). Цифры у кривых соответствуют разным теориям нелинейности: (1) – простая нелинейность, (2) – нелинейность только прогиба, (3) – полная нелинейность.

На рисунке 1 приведены зависимости критического времени  $t_{кр}$  от величин  $a, E, A$  и  $x$ , которые вычислялись для  $l = 2$ , что соответствует выпучиванию кольца в виде «восьмерки». Здесь важно указать, что при расчетах параметры кольца выбирались таким

образом, чтобы всегда сохранялось условие  $I < 0$ . Что касается значений  $a$ ,  $E$  и  $A$ , то они заимствованы из [7].

Таким образом, проведенный численный расчет позволяет заключить: учет полной нелинейности приводит к существенному увеличению критического времени, откуда следует, что при прочих равных условиях это приводит к возможности более рационально использовать несущую способность кольца.

Небезынтересно заметить, что для однородного случая  $t_{кр}^{(1)} = 5,01 \text{ сек}$ ,  $t_{кр}^{(2)} = 8,38 \text{ сек}$  и  $t_{кр}^{(3)} = 11,53 \text{ сек}$  при  $a = 0,005$ .

В заключении отметим, что конструированием неоднородности можно увеличить (уменьшить) критическое время устойчивости и тем самым в определенном смысле оптимизировать конструкцию.

г. Баку

Поступила: 14 декабря 2007 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Амензаде, Р. Ю. Критическое время многослойной вязко-упругой длинной оболочки / Р. Ю. Амензаде, Э. Т. Киясбейли // Журнал «Механика композитных материалов». – 2007. – № 5. – С. 617-628.
2. Амензаде, Р. Ю. Применение вариационного принципа к задаче выпучивания неоднородного по толщине нелинейно-упругого кольца / Р. Ю. Амензаде, Р. А. Гурбанов, Х. Т. Гусиев // Журнал «Механика композитных материалов». – 1995. – № 2. – С. 262-268.
3. Амензаде, Р. Ю. О точности линейного распределения напряжения в задачах выпучивания многослойных стержней / Р. Ю. Амензаде, Э. Т. Киясбейли // Докл. АН Азербайджана. – 2000. – № 4–6. – С. 72-77.
4. Амензаде, Р. Ю. Вариационный метод механики гетерогенных нелинейно вязко-упругих твердых тел / Р. Ю. Амензаде, М. Б. Ахундов // Докл. РАН. – 2006. – т. 410. – № 1. – С. 45-48.
5. Бугаков, Н. Н. Ползучесть полимерных материалов / Н.Н.Бугаков.– М. : 1973. – 287 с.
6. Вольмир, А. С. Устойчивость деформируемых систем / А. С.Вольмир.– М. : 1967. – 484 с.
7. Колтунов, М. А. Ползучесть и релаксация / М. А. Колтунов.– М. : «Высшая школа», 1976.– 277 с.
8. Работнов, Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел / Ю. Н. Работнов.– М. : 1977. – 383 с.

*Amenzadeh R. Y., Kiyasbeyli E. T., Fatullayeva L. F.*

### LIMITING TIME COMPRESSED MULTILAYERED VISCOELASTIC RING

*(Institute of Applied Mathematics of the Baku State University)*

*The purpose of present article is research of loss of stability of the multilayered linearly viscoelastic ring which are made of various materials and taking place under action of in regular intervals distributed external pressure of set intensity. The decision of a problem is carried out by means of a variational method of the mixed type. For a three-layer ring at its symmetric structure concerning a median surface influence of various vectorially nonlinear theories on critical time of stability is numerically revealed.*

**Keywords:** *a multilayered viscoelastic ring, the module of elasticity, factor of creep of a material, a package, critical time, a variational method, method Rayleigh-Ritz, the approximating function, compressing loading, instant deformation, a pressure.*