

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННО–ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ
ТОНКОЙ ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ С УЧЕТОМ ПЛАСТИЧЕСКОЙ
ДИЛАТАНСИИ**

(Тулский государственный университет)

Исследуется напряжено–деформированное состояние тонких пологих оболочек положительной гауссовой кривизны выполненных из дилатирующих материалов за пределом упругости. Получены дифференциальные уравнения, определяющие работу оболочки за пределом упругости. Представлены результаты решения полученных дифференциальных уравнений. Приведены результаты развития зон пластичности при разных нагрузках.

Ключевые слова: *пластичность, дилатация, разнсопротивляемость, формоизменение, текучесть, деформации, условие пластичности, нелинейность, напряженно-деформированное состояние оболочки, дилатансия.*

В настоящее время среди множества конструкционных материалов выделяется достаточно обширный класс материалов, чьи механические характеристики зависят от вида напряженного состояния [2; 4]. К таким материалам относится большинство композиционных и полимерных материалов.

Первой, по всей видимости, теорией, сформулировавшей условия предельного состояния разнсопротивляющихся материалов, была теория Кулона-Мора. Затем, уже в 20 веке, были предложены иные критерии предельного состояния, которые по своей сути являются модификациями гипотезы Мизеса-Генки, с применением различных форм учета влияния шарового тензора. Условия предельных состояний, построенные на основе ранее указанных теорий, содержат три константы материала, преимущественно, определяемые из простейших опытов на растяжение, сжатие и сдвиг. И естественно, что подобный подход не может претендовать на универсальное описание работы широкого класса материалов. Экспериментальные исследования указывают на то, что каждая гипотеза применима лишь для определенного узкого класса материалов при некоторых напряженных состояниях. Гораздо более эффективными оказываются теории, которые предполагают введение в условие прочности материалов функции вида напряженного состояния, определяемой обработкой экспериментальных диаграмм предельных состояний при различных видах напряженного состояния.

Для обобщения подхода к описанию напряженно-деформированного состояния разнсопротивляющихся дилатирующих материалов условие пластичности, можно сформулировать в достаточно общем виде [3]

$$F(\mathbf{s}_{ij}) = t \cdot f(x) = k_t, \quad (1)$$

где $f(x)$ – функция вида напряженного состояния; $x = s/S_0$ – октаэдрическое нормальное нормированное напряжение; $s = s_{ij} \cdot d_{ij}/3$ – среднее напряжение; $S_{ij} = s_{ij} - d_{ij} \cdot s$ – девиатор напряжений; $t = \sqrt{S_{ij} \cdot S_{ij}/3}$ – касательное напряжение на октаэдрической площадке; $S_0 = \sqrt{s^2 + t^2}$ – модуль вектора полного напряжения на октаэдрической площадке; d_{ij} – символ Кронекера; $k_t = \sqrt{2/3} \cdot t_s$, где t_s – предел текучести при чистом сдвиге.

Выражение для функции, характеризующий вид напряженного состояния $f(x)$, входящей в условие (1), определяется индивидуально для каждого материала при обработке экспериментальных диаграмм его предельных состояний при различных видах напряженного состояния. Используя указанный подход в работе [9] для чугуна МСЧ38-60, полиметилметакрилата, фенопласта АГ-4В, графитов ВПП и МПГ-6 предложены линейная, экспоненциальная, кусочно-линейная и кусочно-экспоненциальная аппроксимации функции $f(x)$ соответственно. В частности для полиметилметакрилата эту функцию можно представить следующим математическим выражением

$$f(x) = e^{0,424x}. \quad (2)$$

Величина константы k_t для полиметилметакрилата, входящая в условие (1) равна 58,9МПа.

Следует заметить, что используемый в выражении (1) качественный параметр x изменяется в интервале $[-1;1]$, что позволяет описать широкий спектр напряженных состояний.

Решение задачи изгиба оболочки проводится на основе теории малых упруго-пластических деформаций. При решении поставленной задачи принимаются следующие предпосылки: 1) используются обычные положения технической теории изгиба оболочек – гипотеза плоских нормальных сечений и гипотеза плоского напряженного состояния; 2) диаграмма деформирования материала обладает ярко выраженной площадкой текучести, что позволяет применить модель идеального упруго-пластического тела; 3) нагружение считается простым.

Задача по исследованию напряженно-деформированного состояния оболочек в конечном счете сводится к решению системы двух нелинейных дифференциальных уравнений [8]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 j}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 j}{\partial x_2^4} + \frac{\partial^4 j}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} = & \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - K_2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - K_1 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right], \\ \frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = & - \left(q + \frac{\partial^2 j}{\partial x_2^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 j}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 j}{\partial x_1 \partial x_2} + K_2 \cdot \frac{\partial^2 j}{\partial x_1^2} + K_1 \cdot \frac{\partial^2 j}{\partial x_2^2} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где q – интенсивность нагрузки, E – модель упругости материала, K_1 и K_2 – главные кривизны оболочки.

Первое выражение в системе (3) является уравнением совместности или неразрывности деформаций, записанное через функции напряжений $j(x_1, x_2)$ и прогибов $w(x_1, x_2)$, второе – является уравнением равновесия, записанное через изгибающие

моменты M_{ij} , а также функции напряжений и прогибов оболочки. Причем функция напряжений непосредственно связана с продольными усилиями N_{ij} следующими зависимостями

$$N_{11} = h \frac{\partial^2 j}{\partial x_2^2}; N_{22} = h \frac{\partial^2 j}{\partial x_1^2}; N_{12} = -h \frac{\partial^2 j}{\partial x_1 \partial x_2},$$

где h – толщина оболочки.

Введение в условие пластичности функции вида напряженного состояния обуславливает разницу между напряжениями, вызывающими пластичность в растянутой и сжатой зонах сечения (рис. 1). A_{ij} – напряжения вызывающие текучесть в нижней зоне, B_{ij} – напряжения вызывающие текучесть в верхней зоне. A_{ij} и B_{ij} определяются через условие пластичности (1). Работу материала за пределом упругости следует разделить на две стадии: состояние односторонней текучести и состояние двусторонней текучести (рис. 1). На начальном этапе развития пластических деформаций, зоны пластичности появляются на одной поверхности оболочки, а затем, при дальнейшем нагружении, появляется двусторонняя пластичность.

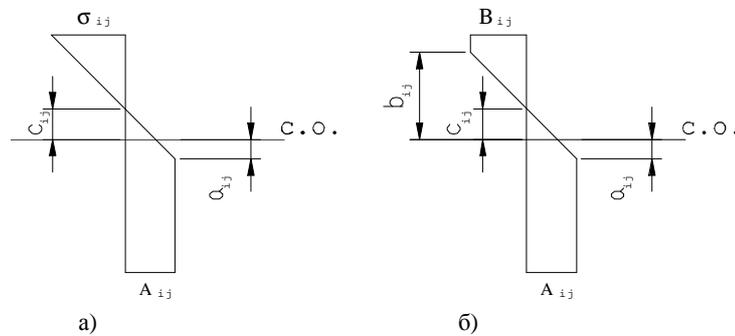


Рис. 1

а) – односторонняя пластичность, б) – двусторонняя пластичность.

В срединной плоскости, в отличие от классической схемы работы материала, возникают деформации e_{ij} , обусловленные не только наличием продольных сил в сечении, но и вызываемые смещением нейтральной поверхности оболочки при изгибе от её срединной плоскости, вследствие разницы значений напряжений, вызывающих пластичность в верхней и нижней зонах сечения. Поэтому выражение для деформаций произвольной точки сечения, не принадлежащей срединной плоскости представляется в виде

$$e_{11} = e_{11} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}; e_{22} = e_{22} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}; e_{12} = e_{12} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad (4)$$

где w – прогиб срединной плоскости; e_{ij} – деформации в срединной плоскости.

$$e_{11} = \frac{du}{dx_1} - k_1 w + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx_1} \right)^2, e_{22} = \frac{dv}{dx_2} - k_2 w + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx_2} \right)^2, e_{12} = \frac{dv}{dx_1} + \frac{du}{dx_2} + \frac{dw}{dx_1} \cdot \frac{dw}{dx_2}.$$

Выражения для напряжений можно записать в следующем виде

$$S_{ij} = k_{ij}(r_{ij} - z \cdot \Delta_{ij}), \quad i, j = 1, 2 \quad (5)$$

где

$$k_{11} = k_{22} = E/(1 - m^2); \quad k_{12} = E/(1 + m); \quad r_{11} = e_{11} + m \cdot e_{22}; \quad r_{22} = e_{22} + m \cdot e_{11}; \quad r_{12} = e_{12};$$

$$\Delta_{11} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + m \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}; \quad \Delta_{22} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + m \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}; \quad \Delta_{12} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2};$$

$$c_{11} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}; \quad c_{22} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}; \quad c_{12} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Положение нейтральной плоскости определяем из условия, что при $z = c_{ij}$, $S_{ij} = 0$.

Отсюда

$$c_{ij} = r_{ij} / \Delta_{ij}. \quad (6)$$

Координату начала зон a_{ij}, b_{ij} , в которых возникают напряжения, вызывающие пластичность, определяют из условий, что при $z = a_{ij}$, $S_{ij} = A_{ij}$, а при $z = b_{ij}$, $S_{ij} = B_{ij}$.

Отсюда

$$a_{ij} = \frac{k_{ij} \cdot r_{ij} - A_{ij}}{k_{ij} \cdot \Delta_{ij}}, \quad b_{ij} = \frac{k_{ij} \cdot r_{ij} - B_{ij}}{k_{ij} \cdot \Delta_{ij}}. \quad (7)$$

Значения r_{ij} определяем из условия равенства суммарной площади эпюры напряжений в сечении соответствующему значению продольного усилия, действующего в этом же сечении:

для односторонней пластичности –

$$N_{ij} = \int_{-h/2}^{a_{ij}} S_{ij} dz + \int_{a_{ij}}^{h/2} A_{ij} dz, \quad (8)$$

для двусторонней пластичности –

$$N_{ij} = \int_{-h/2}^{b_{ij}} B_{ij} dz + \int_{b_{ij}}^{a_{ij}} S_{ij} dz + \int_{a_{ij}}^{h/2} A_{ij} dz. \quad (9)$$

Значения моментов вычисляются путем интегрирования напряжений по толщине оболочки:

для односторонней пластичности –

$$M_{ij} = \int_{-h/2}^{a_{ij}} S_{ij} z dz + \int_{a_{ij}}^{h/2} A_{ij} z dz, \quad (10)$$

для двусторонней пластичности –

$$M_{ij} = \int_{-h/2}^{b_{ij}} B_{ij} z dz + \int_{b_{ij}}^{a_{ij}} S_{ij} z dz + \int_{a_{ij}}^{h/2} A_{ij} z dz. \quad (11)$$

Рассматривая зависимости (5), (10), (11) совместно и проведя несложные преобразования, получим выражения для моментов в виде

$$M_{ij} = R_{ij} + S_{ij} \cdot \Delta_{ij}, \quad (12)$$

где $R_{ij} = B_{ij}(b_{ij}^2 - h^2/4)/2 - A_{ij}(h^2/4 - a_{ij}^2)/2 + k_{ij} \cdot r_{ij}(a_{ij}^2 - b_{ij}^2)/2$, $S_{ij} = -k_{ij}(a_{ij}^3 - b_{ij}^3)/3$.

Для описания напряженно-деформированного состояния оболочки необходимо выражение (12) подставить во второе уравнение системы (3). Следует отметить, что составляющие R_{ij} при дифференцировании обращаются в нуль, а зоны распространения пластичности по толщине оболочки a_{ij} , b_{ij} одинаковы для каждого определенного сечения, поскольку они формируются комплексным соотношением напряжений S_{ij} , а не каждым отдельно взятым напряжением. Вследствие этого будет удобно опустить в дальнейших математических выкладках индексы для указанных величин, приняв для них общие обозначения a , b . Следует заметить, что коэффициенты k_{11} и k_{22} равны между собой, а с коэффициентом k_{12} их связывает следующая зависимость в соответствии с обозначениями, принятыми в формуле (5)

$$k_{11} = k_{22} = k_{12}(1 - m) = E/(1 - m^2). \quad (13)$$

С учетом последних замечаний и формулы (13) запишем в развернутом виде коэффициенты S_{ij} , входящие в уравнение (12)

$$S_{11} = \frac{E(a^3 - b^3)}{3(1 - m^2)}, \quad S_{22} = \frac{E(a^3 - b^3)}{3(1 - m^2)}, \quad S_{12} = \frac{E(a^3 - b^3)}{3(1 - m^2)}(1 - m). \quad (14)$$

Для удобства записи выделим общий множитель $-S$ в выражениях (14) для величин S_{11} , S_{22} , S_{12} и перепишем указанные выражения с учетом последнего обозначения

$$S_{11} = S; \quad S_{22} = S; \quad S_{12} = S(1 - m), \quad (15)$$

где $S = \frac{E(a^3 - b^3)}{3(1 - m^2)}$.

По своей физической сути величина S в выражениях (15) является цилиндрической жесткостью сечения оболочки, ослабленного в результате вступления материала в пластическую стадию деформирования.

Система двух нелинейных дифференциальных уравнений (3), с учетом сделанных замечаний и обозначений, принятых в формулах (15), и выражения (12), после несложных преобразований запишется в следующей форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 j}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 j}{\partial x_2^4} + \frac{\partial^4 j}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} &= \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - K_2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - K_1 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right], \\ S \cdot \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} \right) &= - \left(q + \frac{\partial^2 j}{\partial x_2^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 j}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 j}{\partial x_1 \partial x_2} + K_2 \cdot \frac{\partial^2 j}{\partial x_1^2} + K_1 \cdot \frac{\partial^2 j}{\partial x_2^2} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Система уравнений (16) определяет работу оболочки из дилатирующего материала как в упругой, так и в пластической стадиях.

Линеаризация системы двух нелинейных дифференциальных уравнений (16), при решении изгиба оболочек проводилось методом последовательных нагружений, как рекомендовано в работе [5]. Линеаризованная система уравнений (16) будет иметь следующую форму записи:

$$\nabla^4 dj + \nabla_{K+c}^2 dw = 0, \quad \nabla_{K+c}^2 dj + S \cdot \nabla^4 dw - \nabla_q^2 dw = -dq, \quad (17)$$

где

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}, \quad \nabla_{K-c}^2 = (K_2 - c_{22}) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + (K_1 - c_{11}) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + 2c_{12} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2},$$
$$\nabla_q^2 = N_{11} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + N_{22} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + 2N_{12} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2},$$

dj , dw – приращения функции напряжений и прогибов, соответствующих малому увеличению внешней нагрузки dq ; S , N_{11} , N_{22} , N_{12} , c_{11} , c_{22} , c_{12} – начальные характеристики системы, соответствующие определенному уровню внешней нагрузки.

Решение системы линеаризованных уравнений (17) проводилось численным методом конечных разностей.

Расчет проводился по двум вариантам: в первом варианте в качестве условия предельного состояния использовалось уравнение (1), а аппроксимация функции вида напряженного состояния принималась по выражению (2); во втором варианте расчета в качестве условия предельного состояния применялась классическое уравнение Мизеса [6], не учитывающее зависимость характеристик пластичности от вида напряженного состояния.

Тип поверхности оболочки соответствовал поверхности переноса в виде эллиптического параболоида. Стрела подъема в центре составляла $f = 2$ см. Значения кривизн определены для указанного типа поверхности следующим выражением: $K_1 = K_2 = 4f/l^2$, где l – длина стороны оболочки. Ввиду пологости оболочки геометрия ее поверхности отождествлялась с геометрией на плоскости ее проекции.

Во всех случаях расчета толщина оболочек принималась равной 1 см. Геометрические размеры в плане составляли 20x20 см, модуль упругости – 3,23 МПа, коэффициент поперечной деформации – 0,35. Поверхность оболочки была покрыта сеткой 20x20. В силу симметрии рассчитывалась четвертая часть оболочки. В расчетной схеме было принято подвижное защемление контура оболочки.

На рис.2 представлена полученная картина развития текучести по поверхности оболочки при принятом опирании для первого варианта расчета (на рис. 2.а. – развитие текучести по нижней поверхности оболочки, на рис. 2.б. – развитие текучести по верхней поверхности оболочки). На рис. 2 поверхности, вступившие в состояние текучести, заштрихованы.

Пластичность, при расчете оболочки для первого варианта расчета возникает впервые в верхней зоне оболочки в точке X (рис. 2). Нагрузка, соответствующая появлению пластичности составила 0,95 МПа. Предельная нагрузка, соответствующая образованию пластического шарнира, составила 10,9 МПа.

Пластичность, при расчете оболочки для второго варианта расчета возникает в верхней зоне оболочки в точке X (рис.2). Нагрузка, соответствующая появлению текучести составила 2,25 МПа. Предельная нагрузка, соответствующая образованию пластического шарнира, составила 28,9 МПа.

Таким образом, завышение предельной нагрузки, которое дает классическое условие пластичности Губера-Мизеса [6] для полиметилметакрилата составляет 165%.

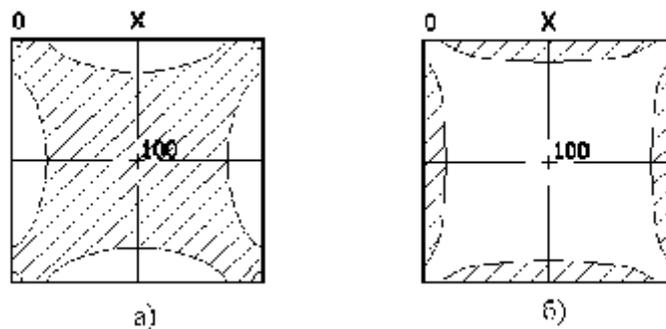


Рис. 2

Полученные результаты очевидно подтверждают тот факт, что описание пластического изгиба оболочек из дилатирующих разнотупоупругих материалов не укладывается в рамки классической теории механики оболочек.

г. Тула

Поступила: 31 марта 2008 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Айнбиндер, С. Б.* Влияние гидростатического давления на механические свойства полимерных материалов / С. Б. Айнбиндер, М. Г. Лака, И. Ю. Майорс // *Механика полимеров*. – 1965. – № 1. – С. 65-75.
2. *Березин, А. В.* Сопротивление деформированию и разрушению изотропных графитовых материалов в условиях сложного напряженного состояния / А. В. Березин, Е. В. Ломакин, В. И. Строков, В. Н. Барабанов // *Проблемы прочности*. – 1979. – № 2. – С. 60-65.
3. *Божанов, П. В.* Исследование пластического изгиба пластин из дилатирующего материала / П. В. Божанов, А. А. Трещёв // *Изв. Вузов. – Строительство*. – 2003. – №3. – С. 18-23.
4. *Елсуфьев, С. А.* Изучение деформирования фторопласта в условиях плоского напряженного состояния / С. А. Елсуфьев, В. М. Чебанов // *Исследования по упругости и пластичности*. – Л.: ЛГУ, 1971. – Вып. 8. – С. 209-213.
5. *Петров, В. В.* Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластин и оболочек / В. В. Петров – Саратов: СГУ, 1975. – 119 с.
6. *Писаренко, Г. С.* Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии / Г. С. Писаренко, А. А. Лебедев. – Киев, 1976. – 416 с.
7. *Потапова, Л. Б.* Как прогнозируют предельные напряжения? / Л. Б. Потапова, В. П. Ярцев // *Механика материалов при сложном напряженном состоянии*. – М.: Издательство машиностроения – 1, 2005. – 244 с.
8. *Тимошенко, С. П.* Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский – Кригер – М.: Физматгиз, 1963. – 647 с.
9. *Трещёв, А. А.* Зависимость предельных состояний конструкционных материалов от вида напряженного состояния / А. А. Трещёв // *Изв. Вузов. – Строительство*. – №10. – 1999. – С. 13-18.

Bazhanov P. V., Zabelin A. N., Treschev A. A.

DEFINITION OF TENSELY DEFORMED CONDITION OF THE THIN FLAT COVER TAKING INTO ACCOUNT PLASTIC DILATANCY

(Tula state university)

The is strained-deformed condition of thin flat environments positive Gaussian curvature executed of dilatentive materials behind a limit of elasticity is investigated. The differential equations defining work of an environment behind a limit of elasticity are received. Results of the decision of the received differential equations are presented. Results of development of zones of plasticity are resulted at different loadings.

Key words: *plasticity, dilation, different resistibility, form change, fluidity, deformations, a plasticity condition, the nonlinearity, the is intense-deformed condition of a cover, dilatancy.*