ВЕСТНИК ЧГПУ
им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
МЕХАНИКА
ПРЕДЕЛЬНОГО
СОСТОЯНИЯ
№ 2 • 2008

Быкова М. И., Вервейко Н. Д., Шашкина С. А.

ВЛИЯНИЕ МИКРОСТРУКТУРЫ МАТЕРИАЛА СТЕРЖНЯ НА ЕГО УСТОЙЧИВОСТЬ

(Воронежский государственный университет)

Построено модифицированное уравнение Эйлера для изогнутой линии сжатого упругого стержня с учётом микроструктуры материала. Показано, что учёт микроструктуры материала стержня ведёт к уменьшению критической силы и к более ранней потере его устойчивости по сравнению с идеальным случаем однородного сплошного материала.

Список ключевых слов: *микроструктура, стержень, тензор деформации.*

Классическая модель устойчивости жатого упругого стержня [1] построена в предположении сплошности, однородности материала и сохранения его свойств до сколь угодно малых материальных размеров. [4].

Рассмотрим классический подход [2-3] к построению математической модели изгиба стержня под действием продольной нагрузки P (рис. 1)

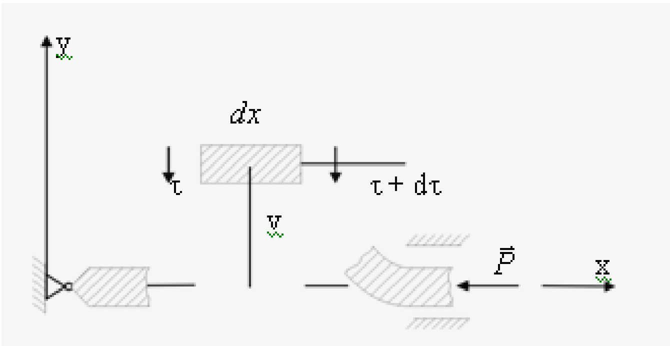

Рис. 1. Принципиальная схема плоского изгиба стержня под действием продольного усилия P.

Уравнение баланса момента сил, приложенных к элементу стержня, включая в себя приращение момента сил от касательных напряжений t, момент продольной сжимающей силы P и имеет вид

$$-I \cdot \frac{d}{dx}(t) = M_{om} = P \cdot v\,. \qquad (1)$$

Для линейного упругого материала касательные напряжения t определяются законом Гука

$$t = E \cdot g\,, \qquad (2)$$

здесь I – момент инерции площади поперечного сечения стержня; v – прогиб стержня; E – модуль упругости материала; P – усилие продольного сжатия; $\frac{dv}{dx} = g$ – деформация сдвига.

Классическая линейная модель устойчивости стержней, которая следует из (1), (2) при использовании тензора деформаций Коши для сплошной среды

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad i, j = 1,2,3\,,$$

принимает вид [1-3]

$$v'' + k^2 v = 0\,; \; k^2 = \frac{P}{EI}\,. \qquad (3)$$

Для случая шарнирного опирания стержня при $x = 0$, $v(0) = 0$ и отсутствия поперечных перемещений на конце $x = l$, $v(l) = 0$ известно собственное значение k ($kl = p$), откуда находится критическая нагрузка Эйлера

$$P_{кр} = \frac{p^2 EI}{l^2}\,. \qquad (4)$$

Для случая исследования на устойчивость стержня такой длины l, которая больше характерного размера h представительного элемента микроструктурного материала, необходимо использовать уточнение [4] тензора деформаций, который имеет вид [4]

$$e^*_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^3 u_i}{\partial x_j \partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^3 u_j}{\partial x_i \partial x_i \partial x_i}\right), \; g = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{h^2}{6}\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\,. \qquad (5)$$

С таким изменением (5) деформации изгиба стержня дифференциальное уравнение, аналогичное (3), для прогибов v примет вид

$$\frac{h^2}{6} v''' + v'' + k^2 v = 0\,. \qquad (6)$$

Вводя безразмерный параметр $e = \frac{h}{l} < 1$, безразмерное перемещение $u = \frac{v}{l}$ и безразмерную координату $x = \frac{x}{l}$ преобразуем уравнение (6)

$$e^2 \overset{....}{u} + \ddot{u} + k^2 u = 0\,. \qquad (7)$$

Здесь $\dot{u} = \frac{du}{dx}$, $\quad k^2 = \frac{P}{EI}$.

Исследуем собственные значения характеристического уравнения для дифференциального уравнения (7)

$$e^2 l^4 + l^2 + k^2 = 0. \tag{8}$$

Биквадратное уравнение (8) имеет точное решение

$$l_i = \pm\sqrt{\frac{-1 \pm \sqrt{1-4k^2e^2}}{2e^2}}, \quad i = 1,2,3. \tag{9}$$

Как видно из (9) все собственные значения l_i являются мнимыми, так что решение уравнения (7) для прогибов можно представить следующим образом

$$u(x) = \sum_{i=1}^{4} A_i \cdot \sin l_i lx. \tag{10}$$

Для случая однородных нулевых граничных условий на концах закрепления стержня $u(0) = u(1) = \dot{u}(0) = \dot{u}(1) = 0$, полагая что не все $A_i \equiv 0$, можно найти наименьшую критическую силу, дающую поперечное перемещение стержня в виде половины гармоники $u = \sin(px)$ при $|l_i| = \dfrac{p}{l}$.

$$\left(\frac{p}{l}\right)^2 = \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1-4k^2e^2}}{2e^2}}. \tag{11}$$

Уравнение для первого критического значения $k_{кр}^2 = \dfrac{P_{кр}}{EI}$ (11) позволяет найти первую критическую силу сжатия $P_{кр}^*$

$$P_{кр}^* = \left(\frac{p}{l}\right)^2 EI\left(1-(ep)^2\right) < P_{кр} = \left(\frac{p}{l}\right)^2 EI. \tag{12}$$

Выражение (12) для критической силы, приводящей сжатый стержень в смежное состояние равновесия, позволяет сделать вполне определённый вывод: микроструктура материала, определяемая безразмерным параметром $e = \dfrac{h}{l}$, ведёт к уменьшению значения критической силы и к более ранней, по сравнению с идеальным материалом при $e \to 0$, потере устойчивости.

г. Воронеж

Поступила: 29 марта 2008 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Биргер, И. А.* Прочность, устойчивость, колебания / И. А. Биргер, Я. Г. Пановко. – Т. 3.– М. : Машиностроение, 1968. – 567 с.

2. *Тимошенко, С. П.* Механика материалов / С. П. Тимошенко, Дж. Гере. – М. : Мир, 1976.

3. *Синяговский, И. С.* Сопротивление материалов / И. С. Синяговский. – М. : Колос, 1968. – 456 с.

4. *Вервейко Н. Д.* Влияние однородной микроструктуры материала на его деформирование и течение / Н. Д. Вервейко, А. А. Воронков, М. И. Быкова // Вестник Воронежского гос. университета. Сер. Физика, математика, 2005. – № 2. – С. 111-118.

Bykova M. I., Verveyko N. D., Shashkina S. A.

MICROSTRUCTURE DEPENDENCE OF PIVOT STABILITY

(Voronezh state university)

The Euler modificated equation of curved line of compressed elastic pivot has been constructed with taking into account of microstructure material. The influence of microstructure of pivot material promotes to decrease of critical force and reduces to earlier loss of stability as compared with ideal case of homogeneous continuous material.