**ВЕСТНИК ЧГПУ**
**им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**
**МЕХАНИКА**
**ПРЕДЕЛЬНОГО**
**СОСТОЯНИЯ**
**№ 2 • 2008**

*Васильева А. М.*

# НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ АНИЗОТРОПНОГО ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА ВБЛИЗИ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ

*(Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева)*

В работе [1] исследовано напряженное состояние изотропного идеальнопластического пространства вблизи сферической полости. В данной работе результаты, полученные в [1], обобщаются на случай анизотропной идеальнопластической среды. Малый параметр δ характеризует возмущение поверхности полости, а также связан с анизотропией среды. Задача статически определимая. Используется условие полной пластичности [2], переменный предел текучести на одноосное растяжение определяется из условия пластичности Хилла [4]. Рассмотрены три случая возможного исходного невозмущенного напряженного состояния.

1. Рассмотрим напряженное состояние анизотропного пространства вблизи сферической полости. Пространство растягивается на бесконечности равномерными усилиями $q$. Поверхность полости свободна от усилий. Введем сферическую систему координат $r, q, f$. Уравнение поверхности полости представим в виде

$$r = r_0 + d r_1(q, f), \quad d << 1. \tag{1.1}$$

Условия предельного состояния для главных компонент напряжений запишем в виде

$$s_1 = s_2, \qquad s_3 - s_1 = 2k, \tag{1.2}$$

где $2k$ – предел текучести при растяжении.

Условие пластичности Хилла для анизотропной среды имеет вид [4]

$$A(s_r - s_q)^2 + B(s_q - s_f)^2 + C(s_f - s_r)^2 + 6(F t_{rq}^2 + G t_{qf}^2 + H t_{rf}^2) = 6k_0^2, \tag{1.3}$$

где $k_0$ – *const*, *A, B, C, F, G, H* – безразмерные константы анизотропии.

Имеют место уравнения равновесия

$$\frac{\partial s_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial t_{rq}}{\partial q} + \frac{1}{r \sin q}\frac{\partial t_{rf}}{\partial f} + \frac{1}{r}(2s_r - s_q - s_f + t_{rq} ctgq) = 0,$$

$$\frac{\partial t_{rq}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial s_q}{\partial q} + \frac{1}{r \sin q}\frac{\partial t_{qf}}{\partial f} + \frac{1}{r}((s_q - s_f) ctgq + 3t_{rq}) = 0, \tag{1.4}$$

PDF создан версией pdfFactory Pro для ознакомления www.pdffactory.com

$$\frac{\partial t_{rf}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial t_{qf}}{\partial q}+\frac{1}{r\sin q}\frac{\partial s_f}{\partial f}+\frac{1}{r}(3t_{rf}+2t_{qf}ctgq)=0\,.$$

Предположим, что взаимная ориентация осей $\rho,\ \theta,\ f$ и главных направлений *1, 2, 3* определяется табл. 1 направляющих косинусов, тогда, используя известные условия связи между компонентами напряжений в сферической системе координат и главными напряжениями $s_1, s_2, s_3$, из (1.2) получим [2] выражения для компонент напряжений, учитывающие условия полной пластичности

Таблица 1

| | *1* | *2* | *3* |
|---|---|---|---|
| $\rho$ | $l_1$ | $m_1$ | $n_1$ |
| $\theta$ | $l_2$ | $m_2$ | $n_2$ |
| $\varphi$ | $l_3$ | $m_3$ | $n_3$ |

$$s_r=s-\frac{2}{3}k+2kn_1^2,\qquad t_{rq}=2kn_1n_2,$$
$$s_q=s-\frac{2}{3}k+2kn_2^2,\qquad t_{qf}=2kn_2n_3, \tag{1.5}$$
$$s_f=s-\frac{2}{3}k+2kn_3^2,\quad t_{rf}=2kn_1n_3,\quad s=\frac{1}{3}(s_r+s_q+s_f),$$

$$n_1^2+n_2^2+n_3^2=1, \tag{1.6}$$

где $n_1$, $n_2$, $n_3$ – направляющие косинусы, определяющие ориентацию третьего главного напряжения $\sigma_3$ в системе $\rho,\ \theta,\ f$ .

Подставляя (1.5) в (1.3), определим предел текучести $k$ в соотношениях (1.2), (1.5)

$$k=\sqrt{\frac{3}{2}}\ k_0\left[A(n_1^2-n_2^2)^2+B(n_2^2-n_3^2)^2+C(n_3^2-n_1^2)^2+6(Fn_1^2n_2^2+Gn_2^2n_3^2+Hn_1^2n_3^2)\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{1.7}$$

Граничные условия в предположении, что поверхность полости свободна от усилий, записываются в виде

$$s_r\cos\vec{nr}+t_{rq}\cos\vec{nq}+t_{rf}\cos\vec{nf}=0,$$
$$t_{rq}\cos\vec{nr}+s_q\cos\vec{nq}+t_{qf}\cos\vec{nf}=0, \tag{1.8}$$
$$t_{rf}\cos\vec{nr}+t_{qf}\cos\vec{nq}+s_f\cos\vec{nf}=0,$$

где $\vec{n}$ – нормаль к поверхности полости.

Положим

$$a=1+d_1\bar{a},\qquad A=1+d_2\bar{A},\qquad F=1+d_2\bar{F},$$
$$b=1+d_1\bar{b},\qquad B=1+d_2\bar{B},\qquad G=1+d_2\bar{G}, \tag{1.9}$$
$$c=1+d_1\bar{c},\qquad C=1+d_2\bar{C},\qquad H=1+d_2\bar{H},$$

где $\bar{a},\bar{b},\bar{c},\ \bar{A},\ \bar{B},\ \bar{C},\ \bar{F},\ \bar{G},\ \bar{H}$ – *const*, параметры $\delta_1 \ll 1$, $\delta_2 \ll 1$.

Пусть $d_2=cd_1=cd$, $c\ge 0$, $d\ll 1$, тогда из (1.9) следует

$$d=\frac{a-1}{\bar{a}}=\frac{b-1}{\bar{b}}=\frac{c-1}{\bar{c}}=\frac{A-1}{c\bar{A}}=\frac{B-1}{c\bar{B}}=\frac{C-1}{c\bar{C}}=\frac{F-1}{c\bar{F}}=\frac{G-1}{c\bar{G}}=\frac{H-1}{c\bar{H}}\,. \tag{1.10}$$

При $\delta=0$ получаем изотропное пространство с сферической полостью, имеющей невозмущенную поверхность.

Решение будем искать в виде



PDF создан версией pdfFactory Pro для ознакомления www.pdffactory.com

$$s_{ij} = s_{ij}^{0} + ds_{ij}^{'}\,, \qquad n_i = n_i^0 + d\; n_i^{'}\,, \qquad k = k^0 + d\; k^{'}\,,$$

$$\begin{aligned} A &= 1 + cd\;\overline{A}, \qquad F = 1 + cd\;\overline{F}, \qquad a = 1 + d\;\overline{a}\,, \\ B &= 1 + cd\;\overline{B}, \qquad G = 1 + cd\;\overline{G}, \qquad b = 1 + d\;\overline{b}\,, \\ C &= 1 + cd\;\overline{C}, \qquad H = 1 + cd\;\overline{H}, \qquad c = 1 + d\;\overline{c}\,. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Линеаризируя соотношения (1.3), (1.5), (1.6), получим в нулевом приближении

$$s_r^{0} = s^{0} - \frac{2}{3}k^0 + 2k^0 n_1^{0\,2}, \qquad t_{rq}^{0} = 2k^0 n_1^0 n_2^0, \qquad (rqf, 123)$$

$$n_1^{0\,2} + n_2^{0\,2} + n_3^{0\,2} = 1, \tag{1.12}$$

$$(s_r^{0} - s_q^{0})^2 + (s_q^{0} - s_f^{0})^2 + (s_f^{0} - s_r^{0})^2 + 6(t_{rq}^{0\,2} + t_{qf}^{0\,2} + t_{rf}^{0\,2}) = 6k_0^2,$$

где $(rqf, 123)$ означают круговую перестановку индексов.

В первом приближении

$$s_r^{'} = s^{'} - \frac{2}{3}k^{'} + 4k^0 n_1^0 n_1^{'} + 2k^{'} n_1^{0\,2}, \qquad t_{rq}^{'} = 2k^{'} n_1^0 n_2^0 + 2k^0 (n_1^0 n_2^{'} + n_1^{'} n_2^0), \qquad (rqf, 123)$$

$$n_1^0 n_1^{'} + n_2^0 n_2^{'} + n_3^0 n_3^{'} = 0, \tag{1.13}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}c\left[\;\overline{A}(s_r^{0} - s_q^{0})^2 + \overline{B}(s_q^{0} - s_f^{0})^2 + \overline{C}(s_f^{0} - s_r^{0})^2\;\right] + \\ &+ (s_r^{0} - s_q^{0})(s_r^{'} - s_q^{'}) + (s_q^{0} - s_f^{0})(s_q^{'} - s_f^{'}) + \\ &+ (s_f^{0} - s_r^{0})(s_f^{'} - s_r^{'}) + 6\left[\frac{c}{2}(\overline{F}t_{rq}^{0\,2} + \overline{G}t_{qf}^{0\,2} + \overline{H}t_{rf}^{0\,2}) + t_{rq}^{0} t_{rq}^{'} + t_{qf}^{0} t_{qf}^{'} + t_{rf}^{0} t_{rf}^{'}\;\right] = 0. \end{aligned}$$

В исходном невозмущенном состоянии (δ = 0) положим

$$s_r^{0}, s_q^{0}, s_f^{0} \neq 0, \qquad t_{rq}^{0} = t_{qf}^{0} = t_{rf}^{0} = 0\,.$$

Рассмотрим следующие случаи исходного невозмущенного напряженного состояния (δ = 0), соответствующего изотропному пространству со сферической полостью

1) $s_f^{0} \neq 0, \qquad s_r^{0} = s_q^{0} \neq 0, \qquad t_{rq}^{0} = t_{qf}^{0} = t_{rf}^{0} = 0\,,$ (1.14)

2) $s_r^{0} \neq 0, \qquad s_q^{0} = s_f^{0} \neq 0, \qquad t_{rq}^{0} = t_{qf}^{0} = t_{rf}^{0} = 0\,,$ (1.15)

3) $s_q^{0} \neq 0, \qquad s_f^{0} = s_r^{0} \neq 0, \qquad t_{rq}^{0} = t_{qf}^{0} = t_{rf}^{0} = 0\,.$ (1.16)

2. Рассмотрим случай (1.14). Из (1.12), (1.14) получим в нулевом приближении

$$\begin{gathered} n_1^0 = n_2^0 = 0, \qquad n_3^0 = 1\,, \\ s_f^{0} = s_r^{0} + 2k^0, \qquad s_r^{0} = s_q^{0}, \\ t_{rq}^{0} = t_{qf}^{0} = t_{rf}^{0} = 0, \qquad где\;\; k^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}k_0\,. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Согласно (1.13), (1.14), (2.1) в первом приближении будем иметь

$$n_3^{'} = 0\,,$$



PDF создан версией pdfFactory Pro для ознакомления www.pdffactory.com

$$s'_f = s'_r + 2k' = s' + \frac{4}{3}k', \qquad s'_r = s'_q = s' - \frac{2}{3}k', \tag{2.2}$$
$$t'_{rq} = 0, \qquad t'_{qf} = 2k^0 n'_2, \qquad t'_{rf} = 2k^0 n'_1,$$

где

$$k' = -\frac{c}{4}\, k^0 ( \overline{B} + \overline{C} ), \qquad s' = \frac{1}{3}(s'_r + s'_q + s'_f). \tag{2.3}$$

Из уравнений равновесия (1.4) в нулевом приближении согласно (1.14), (2.1) получим

$$\frac{\partial s_r^0}{\partial r} - \frac{2k^0}{r} = 0, \qquad \frac{\partial s_q^0}{\partial q} - 2k^0 ctgq = 0, \qquad \frac{\partial s_f^0}{\partial f} = 0. \tag{2.4}$$

В первом приближении уравнения равновесия с учетом (2.2) примут вид

$$\frac{\partial s'}{\partial r} + \frac{2k^0}{r \sin q}\frac{\partial n'_1}{\partial f} - \frac{2k'}{r} = 0,$$
$$\frac{\partial s'}{\partial q} + \frac{2k^0}{\sin q}\frac{\partial n'_2}{\partial f} - 2k' ctgq = 0, \tag{2.5}$$
$$2k^0\frac{\partial n'_1}{\partial r} + \frac{2k^0}{r}\frac{\partial n'_2}{\partial q} + \frac{1}{r \sin q}\frac{\partial s'}{\partial f} + \frac{2k^0}{r}(3n'_1 + 2n'_2 ctgq) = 0.$$

Удовлетворим первому и второму уравнениям (2.5) с помощью замены

$$s' = 2k' \ln|\sin q| + 2k' \ln|r| \frac{\partial \Psi(r,q,f)}{\partial f},$$
$$n'_1 = -\frac{r \sin q}{2k^0}\frac{\partial \Psi(r,q,f)}{\partial r}, \quad n'_2 = -\frac{\sin q}{2k^0}\frac{\partial \Psi(r,q,f)}{\partial q}, \tag{2.6}$$

тогда из третьего уравнения (2.5) получим линейное однородное уравнение

$$r^2 \Psi''_{rr} + \Psi''_{qq} - \frac{1}{\sin^2 q}\Psi''_{ff} + 4r\,\Psi'_r + 3ctgq\,\Psi'_q = 0. \tag{2.7}$$

Положим $\Psi = R(r)Y(q,f)$, тогда, разделяя переменные в (2.7), для функций $R(r)$ и $Y(q,f)$ получим уравнения

$$r^2 R'' + 4r\,R' - lR = 0, \tag{2.8}$$

$$Y''_{qq} - \frac{1}{\sin^2 q}Y''_{ff} + 3ctgq\,Y'_q + lY = 0, \ l - const. \tag{2.9}$$

Полагая $Y(q,f) = \Theta(q)\Phi(f)$, для функций $\Phi(f)$ и $\Theta(q)$ получим соответственно уравнения

$$\Phi'' + m^2\Phi = 0, \quad m - \text{целые числа},$$
$$\sin^2 q\ \Theta'' + 3\sin q \cos q\ \Theta' + (\sin^2 q\ l + m^2)\Theta = 0.$$

Ограниченным решением последнего при $l = (n + 1/2)^2 - 9/4$, $n$ = 0,1,2,.. является функция

$$\Theta(q) = \frac{1}{\sin q}P_n^{m_1}(\cos q), \ m_1 = \sqrt{1 - m^2}, \quad m_1, n = 0,1,2...$$



PDF создан версией pdfFactory Pro для ознакомления www.pdffactory.com

где $P_n^{m_1}(\cos q)$ – присоединенный полином Лежандра 1-го рода.
Следовательно, решение уравнения (2.7) будет следующим

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(C_1 r^{-\frac{3}{2}+b} + C_2 r^{-\frac{3}{2}-b})\frac{1}{\sin q}(D_{mn}\cos mf + E_{mn}\sin mf)P_n^{\sqrt{1-m^2}}(\cos q), \quad (2.10)$$

$$b = \sqrt{l + \frac{9}{4}}, \quad l = (n+1/2)^2 - \frac{9}{4},$$

где $C_1$, $C_2$ – константы, определяемые из граничных условий, в предположении [1], что $D_{mn}$, $E_{mn}$ совпадают с коэффициентами разложения функции $r_1(q,f)$ в ряд по сферическим функциям.

Порядок присоединенного полинома Лежандра $m_1$ принимает целые значения при $m = 0$ или $m = 1$. При $m = 1$ функция (2.10) запишется в виде

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty}(C_1 r^{-\frac{3}{2}+b} + C_2 r^{-\frac{3}{2}-b})\frac{1}{\sin q}(D_n\cos f + E_n\sin f)P_n^0(\cos q), \quad (2.11)$$

где $b = n + \frac{1}{2}$, $D_n, E_n$ - *const.*

Из (2.2), (2.6), (2.11) определим выражения для компонент напряжений

$$s_r' = s_q' = -\frac{2}{3}k' + 2k'\ln\left|r\sin q\right| +$$
$$+\frac{1}{\sin q}\sum_{n=0}^{\infty}(C_1 r^{-\frac{3}{2}+b} + C_2 r^{-\frac{3}{2}-b})(-D_n\sin f + E_n\cos f)P_n^0(\cos q),$$
$$s_f' = \frac{4}{3}k' + 2k'\ln\left|r\sin q\right| + \quad (2.12)$$
$$+\frac{1}{\sin q}\sum_{n=0}^{\infty}(C_1 r^{-\frac{3}{2}+b} + C_2 r^{-\frac{3}{2}-b})(-D_n\sin f + E_n\cos f)P_n^0(\cos q),$$
$$t_{rq}' = 0,$$
$$t_{qf}' = \sum_{n=0}^{\infty}(C_1 r^{-\frac{3}{2}+b} + C_2 r^{-\frac{3}{2}-b})(D_n\cos f + E_n\sin f)\left(ctgq\ P_n^0(\cos q) - \frac{\partial P_n^0(\cos q)}{\partial q}\right),$$
$$t_{rf}' = -\sum_{n=0}^{\infty}[(-3/2+b)C_1 r^{-\frac{3}{2}+b} + (-3/2-b)C_2 r^{-\frac{3}{2}-b}](D_n\cos f + E_n\sin f)P_n^0(\cos q).$$

3. Рассмотрим случай (1.15). Из (1.12), (1.15) получим в нулевом приближении

$$n_2^0 = n_3^0 = 0, \qquad n_1^0 = 1,$$
$$s_r^0 = s_q^0 + 2k^0, \qquad s_q^0 = s_f^0, \quad (3.1)$$
$$t_{rq}^0 = t_{qf}^0 = t_{rf}^0 = 0, \qquad где\ k^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}k_0.$$

Согласно (1.13), (1.15), (3.1) в первом приближении будем иметь

$$n_1' = 0,$$



PDF создан версией pdfFactory Pro для ознакомления www.pdffactory.com

$$s_r^{'} = s_q^{'} + 2k^{'} = s^{'} + \frac{4}{3}k^{'}, \qquad s_q^{'} = s_f^{'} = s^{'} - \frac{2}{3}k^{'}, \tag{3.2}$$
$$t_{rq}^{'} = 2k^0 n_2^{'}, \qquad t_{qf}^{'} = 0, \qquad t_{rf}^{'} = 2k^0 n_3^{'},$$

где

$$k^{'} = -\frac{c}{4}\, k^0 ( \overline{A} + \overline{C} ), \qquad s^{'} = \frac{1}{3}( s_r^{'} + s_q^{'} + s_f^{'} ). \tag{3.3}$$

Из уравнений равновесия (1.4) в нулевом приближении согласно (1.15), (3.1) получим

$$\frac{\partial s_r^0}{\partial r} + \frac{2}{r}( s_r^0 - s_q^0 ) = 0, \qquad \frac{\partial s_q^0}{\partial q} = \frac{\partial s_f^0}{\partial f} = 0. \tag{3.4}$$

В первом приближении уравнения равновесия с учетом (3.2) примут вид

$$\frac{\partial s^{'}}{\partial r} + \frac{2k^0}{r}\frac{\partial n_2^{'}}{\partial q} + \frac{2k^0}{r\sin q}\frac{\partial n_3^{'}}{\partial f} + \frac{1}{r}(4k^{'} + 2k^0 n_2^{'} ctg q) = 0,$$
$$2k^0 \frac{\partial n_2^{'}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial s^{'}}{\partial q} + \frac{1}{r}(6k^0 n_2^{'}) = 0, \tag{3.5}$$
$$2k^0 \frac{\partial n_3^{'}}{\partial r} + \frac{1}{r\sin q}\frac{\partial s^{'}}{\partial f} + \frac{1}{r}(6k^0 n_3^{'}) = 0.$$

Удовлетворим второму и третьему уравнениям (3.5) с помощью замены

$$s^{'} = \frac{2k^0}{r^2}\frac{\partial \Psi(r,q,f)}{\partial r}, \quad n_2^{'} = -\frac{1}{r^3}\frac{\partial \Psi(r,q,f)}{\partial q}, \quad n_3^{'} = -\frac{1}{r^3\sin q}\frac{\partial \Psi(r,q,f)}{\partial f}, \tag{3.6}$$

тогда из первого уравнения (3.5) получим линейное неоднородное уравнение

$$r^2 \Psi_{rr}^{''} - \Psi_{qq}^{''} - \frac{1}{\sin^2 q}\Psi_{ff}^{''} - 2r\, \Psi_r^{'} - ctg q\, \Psi_q^{'} = D r^3, \tag{3.7}$$

где

$$D = -\frac{2k^{'}}{k^0} = \frac{c}{2}( \overline{A} + \overline{C} ). \tag{3.8}$$

В случае $k^{'} = 0$, т.е. если среда изотропная ($c\ \overline{A} = c\ \overline{B} = \ldots = c\ \overline{H} = 0$), или $\overline{A} = -\overline{C}$, или при $\overline{A} = \overline{C} = 0$ уравнение (3.7) становится однородным ($D$ = 0) и совпадает с уравнением, приведенным в [3].

Общее решение $\Psi$ линейного неоднородного уравнения (3.7) представляется в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения $\Psi_1$ и частного решения неоднородного $\Psi_2$, т.е. $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$. Функция $\Psi_1$ находится методом разделения переменных в соответствующем однородном уравнении. Для этого положим $\Psi_1 = R(r)Y(q,f)$, тогда, разделяя переменные, для функции $R(r)$ получим уравнение Эйлера

$$r^2 R'' - 2rR' - lR = 0, \quad l - const. \tag{3.9}$$

Полагая $Y(q,f) = \Theta(q)\Phi(f)$, для функций $\Phi(f)$ и $\Theta(q)$ получим соответственно уравнения

$$\Phi'' + m^2\Phi = 0, \tag{3.10}$$



PDF создан версией pdfFactory Pro для ознакомления www.pdffactory.com

$$\sin^2 q\ \Theta'' + \sin q \cos q\ \Theta' + (-\sin^2 q\ \ l - m^2)\Theta = 0\,. \qquad (3.11)$$

Ограниченным решением последнего при $l = -n(n+1)$; $n$, $m$ = 0, 1, 2,… является присоединенный полином Лежандра 1-го рода $P_n^m(\cos q)$. Для функции $Y(q, f)$ получим выражение

$$Y(q,f) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(D_{mn}\cos mf + E_{mn}\sin mf)P_n^m(\cos q)\,,\ D_{mn}, E_{mn} - const.$$

Решением уравнения (3.9) является функция $R(r) = C_1 r^{\frac{3}{2}+b} + C_2 r^{\frac{3}{2}-b}$, где $b = \sqrt{\frac{9}{4} - n(n+1)}$. Для действительных значений $b$ получим следующее решение однородного уравнения, соответствующего неоднородному уравнению (3.7)

$$\Psi_1 = (C_1 r^2 + C_2 r\ \ )(D_1\cos f + E_1 \sin f)P_1^1(\cos q)\,,\ C_1, C_2, D_1, E_1 - const. \qquad (3.12)$$

Частным решением неоднородного уравнения (3.7) является функция

$$\Psi_2 = \frac{D}{3}(r^3 \ln r - \frac{r^3}{3}) + C_3\frac{r^3}{3}\,, \qquad C_3 - const\,. \qquad (3.13)$$

Таким образом, общее решение уравнения (3.7) будет следующим

$$\Psi = [\ (C_1 r^2 + C_2 r\ \ )(D_1 \cos f + E_1 \sin f)\ ] + \frac{D}{3}(r^3 \ln r - \frac{r^3}{3}) + C_3\frac{r^3}{3}\,, \qquad (3.14)$$

где $C_1, C_2, C_3, D_1, E_1$ – константы, определяемые из граничных условий, $D$ – согласно (3.8).

Из (3.2), (3.6), (3.14) получим выражения для компонент напряжений

$$s_r' = \frac{4}{3}k' + \frac{2k^0}{r^2}\left[\ (2C_1 r + C_2)(D_1\cos f + E_1 \sin f)P_1^1(\cos q) + Dr^2 \ln r + C_3 r^2\ \right],$$

$$s_q' = s_f' = -\frac{2}{3}k' + \frac{2k^0}{r^2}\left[\ (2C_1 r + C_2)(D_1\cos f + E_1 \sin f)P_1^1(\cos q) + Dr^2 \ln r + C_3 r^2\ \right],$$

$$t_{rq}' = -\frac{2k^0}{r^3}(C_1 r^2 + C_2 r\ \ )(D_1 \cos q + E_1 \sin f)\frac{\partial\left(P_1^1(\cos q)\right)}{\partial q}\,, \qquad (3.15)$$

$$t_{qf}' = 0\,,$$

$$t_{rf}' = -\frac{2k^0}{r^3 \sin q}(C_1 r^2 + C_2 r\ \ )(-D_1 \sin f + E_1 \cos f)P_1^1(\cos q)\,.$$

4. Рассмотрим случай (1.16). Из (1.12), (1.16) получим в нулевом приближении

$$n_1^0 = n_3^0 = 0, \qquad n_2^0 = 1\,,$$

$$s_q^0 = s_f^0 + 2k^0, \qquad s_r^0 = s_f^0\,, \qquad (4.1)$$

$$t_{rq}^0 = t_{qf}^0 = t_{rf}^0 = 0, \qquad где\ \ k^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}k_0\,.$$

Согласно (1.13), (1.16), (4.1) в первом приближении будем иметь



PDF создан версией pdfFactory Pro для ознакомления www.pdffactory.com

$$n_2^{'} = 0\,,$$

$$s_q^{\,'} = s_r^{\,'} + 2k^{'} = s^{\,'} + \frac{4}{3}k^{'}, \qquad s_r^{\,'} = s_f^{\,'} = s^{\,'} - \frac{2}{3}k^{'}, \tag{4.2}$$

$$t_{rq}^{\,'} = 2k^0 n_1^{'}, \qquad t_{qf}^{\,'} = 2k^0 n_3^{'}, \qquad t_{rf}^{\,'} = 0\,,$$

где

$$k^{'} = -\frac{c}{4}\;k^0(\;\overline{A} + \overline{B}\;), \qquad s^{\,'} = \frac{1}{3}(s_r^{\,'} + s_q^{\,'} + s_f^{\,'})\,. \tag{4.3}$$

Из уравнений равновесия (1.4) в нулевом приближении согласно (1.16), (4.1) получим

$$\frac{\partial s_r^{\,0}}{\partial r} - \frac{2k^0}{r} = 0, \qquad \frac{\partial s_q^{\,0}}{\partial q} + 2k^0 ctgq = 0, \qquad \frac{\partial s_f^{\,0}}{\partial f} = 0\,. \tag{4.4}$$

В первом приближении уравнения равновесия с учетом (4.2) примут вид

$$\frac{\partial s^{\,'}}{\partial r} + \frac{2k^0}{r}\frac{\partial n_1^{'}}{\partial q} + \frac{1}{r}(-2k^{'} + 2k^0 n_1^{'} ctgq) = 0\,,$$

$$2k^0\frac{\partial n_1^{'}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial s^{\,'}}{\partial q} + \frac{2k^0}{r\sin q}\frac{\partial n_3^{'}}{\partial f} + \frac{1}{r}(2k^{'} ctgq + 6k^0 n_1^{'}) = 0\,, \tag{4.5}$$

$$2k^0\frac{\partial n_3^{'}}{\partial q} + \frac{1}{\sin q}\frac{\partial s^{\,'}}{\partial f} + 4k^0 n_3^{'} ctgq = 0\,.$$

Удовлетворим первому и третьему уравнениям (4.5) с помощью замены

$$s^{\,'} = -\frac{2k^0}{\sin q}\frac{\partial \Psi(r,q,f)}{\partial q} + 2k^{'}\ln r\,,$$

$$n_1^{'} = \frac{r}{\sin q}\frac{\partial \Psi(r,q,f)}{\partial r}, \quad n_3^{'} = \frac{1}{\sin^2 q}\frac{\partial \Psi(r,q,f)}{\partial f}\,, \tag{4.6}$$

тогда из второго уравнения (4.5) получим линейное неоднородное уравнение

$$r^2\Psi_{rr}^{''} - \Psi_{qq}^{''} + \frac{1}{\sin^2 q}\Psi_{ff}^{''} + 4r\;\Psi_r^{'} + ctgq\;\Psi_q^{'} = D_1\cos q\,, \tag{4.7}$$

где

$$D_1 = -\frac{k^{'}}{k^0} = \frac{c}{4}(\;\overline{A} + \overline{B}\;)\,. \tag{4.8}$$

Общее решение $\Psi$ линейного неоднородного уравнения (4.7) представляется в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения $\Psi_1$ и частного решения неоднородного $\Psi_2$, т.е. $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$. Функция $\Psi_1$ находится методом разделения переменных в соответствующем однородном уравнении. Для этого положим $\Psi_1 = R(r)Y(q,f)$, тогда, разделяя переменные, для функции $R(r)$ и $Y(q,f)$ получим уравнения

$$r^2 R'' + 4r\;R' - l R = 0\,, \quad l - const\,, \tag{4.9}$$

$$Y_{qq}^{''} - \frac{1}{\sin^2 q}Y_{ff}^{''} - ctgq\;Y_q^{'} - l\,Y = 0\,. \tag{4.10}$$



PDF создан версией pdfFactory Pro для ознакомления www.pdffactory.com

Полагая $Y(q,f)=\Theta(q)\Phi(f)$, для функций $\Phi(f)$ и $\Theta(q)$ получим соответственно уравнения

$$\Phi'' + m^2\Phi = 0, \tag{4.11}$$

$$\sin^2 q\ \Theta'' - \sin q \cos q\ \Theta' + (-\sin^2 q\ l + m^2)\Theta = 0. \tag{4.12}$$

Ограниченным решением последнего при $l = 1/4 - (n+1/2)^2$, $n$ = 0,1,2,.. является функция

$$\Theta(q) = \sin q\ P_n^{m_2}(\cos q),\ m_2 = \sqrt{1-m^2}, \quad m_2, n = 0,1,2...$$

где $P_n^{m_2}(\cos q)$ – присоединенный полином Лежандра 1-го рода.

Из (4.9) – (4.12) получим решение однородного уравнения, соответствующего неоднородному уравнению (4.7)

$$\Psi_1 = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(C_1 r^{-\frac{3}{2}+b} + C_2 r^{-\frac{3}{2}-b})\sin q\,(D_{mn}\cos mf + E_{mn}\sin mf)P_n^{\sqrt{1-m^2}}(\cos q), \tag{4.13}$$

$$b = \sqrt{\frac{9}{4}+l},\quad l = \frac{1}{4} - (n+1/2)^2, \quad n,\ m = 0,\ 1,\ 2...$$

Частным решением неоднородного уравнения (4.7) является функция

$$\Psi_2 = \overline{D}_1 \int \sin q\ \ln|\sin q|\ dq - C_3 \cos q\ ,\ C_3\ - const \tag{4.14}$$

Параметры $b$ и $m_2$ принимают действительные значения при условии $m$=1, $n$ = 0, 1, тогда общее решение уравнения (4.7) будет следующим

$$\Psi = (C_1 r^{-\frac{3}{2}+b} + C_2 r^{-\frac{3}{2}-b})\sin q\,(D_n \cos f + E_n \sin f)P_n^0(\cos q) +$$

$$\overline{D}_1 \int \sin q\ \ln|\sin q|\ dq - C_3\cos q\ ,\ n = 0,1,\ b = \sqrt{5/2-(n+1/2)^2}\,. \tag{4.15}$$

где $C_1, C_2, C_3, D_n, E_n$ – константы, определяемые из граничных условий, $\overline{D_1}$ – согласно (4.8).

Из (4.2), (4.6), (4.15) получим выражения для компонент напряжений

$$s'_r = s'_f = -\frac{2}{3}k' + 2k'\ln r -$$

$$-2k^0(C_1 r^{-\frac{3}{2}+b} + C_2 r^{-\frac{3}{2}-b})(D_n\cos f + E_n \sin f)\left(ctg\,q\ P_n^0(\cos q) + \frac{\partial P_n^0(\cos q)}{\partial q}\right) +$$

$$+\overline{D}_1 \sin q \ln|\sin q| + C_3 \sin q\ ,$$

$$s'_q = \frac{4}{3}k' + 2k'\ln r - \tag{4.16}$$

$$-2k^0(C_1 r^{-\frac{3}{2}+b} + C_2 r^{-\frac{3}{2}-b})(D_n\cos f + E_n \sin f)\left(ctg q\ P_n^0(\cos q) + \frac{\partial P_n^0(\cos q)}{\partial q}\right),$$

$$t'_{rf} = 0\ ,$$

$$t'_{rq} = 2k^0[(-3/2+b)C_1 r^{-\frac{3}{2}+b} + (-3/2-b)C_2 r^{-\frac{3}{2}-b}](D_n\cos f + E_n \sin f)P_n^0(\cos q)\,,$$



PDF создан версией pdfFactory Pro для ознакомления www.pdffactory.com

$$t'_{qf} = \frac{2k^0}{\sin q}(C_1 r^{-\frac{3}{2}+b} + C_2 r^{-\frac{3}{2}-b})(-D_n \sin f + E_n \cos f) P_n^0(\cos q),$$ при $n = 0, 1$.

Отметим, что при $k' = 0$ полученные результаты совпадают с результатами, приведенными в [1] для изотропной среды.

г. Чебоксары

Поступила: 19 февраля 2008 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ефремов, В. Г.* Идеальнопластическое напряженное состояние тел вблизи сферической полости / В. Г. Ефремов // Изв. РАН, МТТ. – 1999. – №3. – С. 70-75.
2. *Ивлев, Д. Д.* Механика пластических сред / Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2001. – Т. 1. – 448 с.; 2002. – Т. 2. – 448 с.
3. *Семыкина, Т. Д.* О трехосном растяжении упруго-пластического пространства, ослабленного сферической полостью / Т. Д. Семыкина // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1963. – №1. – С. 173-177.
4. *Хилл, Р.* Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – М. : Гостехиздат, 1956. – 407 с.



PDF создан версией pdfFactory Pro для ознакомления www.pdffactory.com