

Герасименко Е. А., Завертан А. А., Рагозина В. Е.

**ЛУЧЕВЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В АНАЛИТИЧЕСКИХ И ЧИСЛЕННО-
АНАЛИТИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ ЗАДАЧ УДАРНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ**

(Институт автоматизи и процессов управления ДВО РАН)

В настоящей статье излагается способ построения приближенных решений краевых задач ударного деформирования лучевым разложением за фронтами разрывов деформаций. Показана методика включения полученных прифронтовых разложений решений в конечно-разностную схему расчетов с целью выделения на каждом временном шаге положения поверхности разрывов деформаций и определения интенсивности разрывов на ней.

Ключевые слова: ударные волны, методы с выделением разрывов, лучевой метод, нелинейная теория упругости.

Введение. Настоящая статья посвящена построению аналитических и численно-аналитических решений задач ударного деформирования с помощью лучевого метода. Как известно лучевой метод широко применяется при исследовании распространения объемных или поверхностных волн в средах различных по своим свойствам. Детальный обзор работ этого направления можно найти в [21]. На практике используют лучевые разложения различного вида [1,2,17]. Основой метода, развиваемого в настоящей статье, стал подход, разработанный воронежским коллективом исследователей под руководством Г. И. Быковцева. В нем точное решение в окрестности поверхности разрыва заменяется рядом типа ряда Тейлора, коэффициентами которого являются разрывы производных от искомым функций. Определяющая система уравнений для них может быть получена с помощью условий совместности разрывов на движущихся поверхностях. Теория условий совместности связана с именами Дж. Адамара [20], Т. Томаса [15] и Г. И. Быковцева [11]. Но только Г. И. Быковцеву вместе с учениками удалось получить условия совместности произвольного порядка в рекуррентной форме, что и стало основой метода [2]. С его помощью были построены приближенные решения целого ряда краевых задач идеальной пластичности [10], гиперболической теории теплообмена [16], динамики линейной [22] и нелинейной [3] упругой среды. Позднее была предложена модификация метода для краевых задач ударного деформирования.

Все же существующая теория условий совместности применима лишь в прямоугольной декартовой системе координат. В случае, когда решение конкретной краевой задачи эффективнее провести в криволинейной системе координат, удобно, если и необходимые для лучевого метода соотношения записаны в тех же координатах. Это избавляет от дополнительных математических трудностей. В [13] приводятся такие условия 1-го и 2-го порядка. Ранее нами были получены [12] рекуррентные соотношения, аналогичные

[11] в произвольной пространственной системе координат. Настоящей статьёй показываем использование этих соотношений для получения прифронтных лучевых рядов в задачах с криволинейными поверхностями разрывов деформаций. В качестве примера остановимся на задачах об одномерном и двумерном антиплоском движении нелинейно-упругой среды.

Включение построенных таким образом прифронтных разложений в конечно-разностные схемы позволяет отслеживать положение волновых фронтов в процессе численного решения краевых задач ударного деформирования. Такой алгоритм был реализован в задачах о распространении плоских ударных волн в [6,7]. Особенности обобщения этой методики на более сложные многомерные задачи с криволинейными и расходящимися лучами обсуждаются в последнем параграфе настоящей статьи.

Модельные соотношения. Условия на разрывах. Движение нелинейно-упругой несжимаемой изотропной среды в криволинейных координатах Эйлера x^i описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} v^i &= \mathfrak{v}^i + u^i_{,j} v^j, \quad s^{ij}_{,j} = r(\mathfrak{s}^i + v^i_{,j} v^j), \quad 2a_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i} u^k_{,j}, \\ W &= W(I_1, I_2), \quad I_1 = a^i_i, \quad I_2 = a^i_j a^j_i, \quad \mathfrak{s}^i = \frac{\partial u^i}{\partial t}, \\ u^i_{,j} &= \frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jk} u^k, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x^j} - \Gamma^k_{ij} u_k, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где u^i и v^i – компоненты векторов перемещения и скорости; a_{ij} – ковариантные компоненты тензора деформаций Альманси; s^i_j – смешанные компоненты тензора напряжений Эйлера-Коши; $r = const$ – плотность среды; p_0 – добавочное гидростатическое давление; W – функцию упругого потенциала зададим ее разложением в ряд Тейлора в окрестности свободного состояния

$$W = (a - m)I_1 + aI_2 + bI_1^2 - kI_1I_2 - qI_1^3 + lI_1^4 + dI_2^2 + kI_1^2I_2 + \mathbf{L}, \quad (1.2)$$

где m, a, b, k, q, l, d, k – упругие модули среды, многоточием обозначены слагаемые более высокого порядка малости. Далее рассматриваем быстро протекающие процессы, что позволяет считать их адиабатическими. Уравнения (1.1) как локальные следствия общих законов сохранения предполагают непрерывное изменение входящих в них функций. На поверхностях сильного разрыва, о которых пойдет речь в статье, законы сохранения нельзя записать в дифференциальной форме (1.1), но из них следуют динамические условия совместности

$$\begin{aligned} [r(v^i n_i - G)] &= 0, \\ [s^{ij} h_j] &= r^+ (v^{i+} n_i - G) [v^i], \\ s^{ij+} [v^j] h_j &= r^+ (v^{i+} n_i - G) \left(\frac{[v^i] [v_i]}{2} - [e] \right) - [q_j] h^j. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь n_i – компоненты единичной нормали поверхности разрывов Σ , направленной в сторону движения Σ ; q^i – компоненты вектора теплового потока, e – удельная плотность внутренней энергии, индексами “+” и “-” обозначены значения величин перед

волной и за ней соответственно; G – скорость движения Σ в направлении нормали, квадратными скобками обозначен скачок соответствующей величины на Σ .

Помимо (1.3) разрывы функций на движущихся поверхностях связаны с разрывами их производных геометрическими и кинематическими условиями совместности. Если движение поверхности разрывов задано в прямоугольной декартовой системе координат, то эти формулы хорошо известны из литературы [11]. Пересчет условий совместности разрывов на произвольную криволинейную систему координат в евклидовом пространстве E^3 – задача сама по себе нетривиальная, поэтому остановимся на этом несколько подробнее.

Движение поверхности $\Sigma(t)$ с течением времени представим зависимостью $x^i = f_i(y^1, y^2, t)$, причем f_i обладают требуемой гладкостью. Пусть траектория каждой точки Σ такова, что касательный вектор к ней в любой момент времени направлен по нормали $n^i(y^a, t)$, а поверхностные координаты остаются постоянными $y^a|_{\Sigma(t)} = y^a|_{\Sigma(0)}$. Эта линия называется лучом, а расстояние s вдоль нее от выбранной точки на Σ в момент $t=0$ до этой же точки в текущий момент времени – лучевой координатой. Такой выбор системы координат означает, что

$$\dot{x}^i(y^a, t) = Gn^i. \quad (1.4)$$

Греческие индексы в (1.4) и далее принимают значения 1, 2. Для того, чтобы отследить изменение со временем интересующих величин на Σ , а это могут быть скалярные или тензорные поля различного типа, необходимо ввести правила дифференцирования на Σ или d -производную. В декартовой системе координат d -производная определяется согласно формулам, представленным в [11]. Для криволинейной системы координат x^i необходимо уточнение операции d -дифференцирования как в [13], но с учетом введенных предположений относительно выбора внутренних координат на Σ

$$\begin{aligned} \frac{dA_{j_1 K_{j_r}}^{i_1 K_{i_s}}(x^k(y^a, t), t)}{dt} &= \frac{d\tilde{A}_{j_1 K_{j_r}}^{i_1 K_{i_s}}(y^a, t)}{dt} = \frac{\partial \tilde{A}_{j_1 K_{j_r}}^{i_1 K_{i_s}}}{\partial t} + \tilde{A}_{j_1 K_{j_r}, l}^{i_1 K_{i_s}} Gn^l, \\ \frac{dA_{j_1 K_{j_r}}^{i_1 K_{i_s}}(y^a, t)}{dt} &= \frac{\partial A_{j_1 K_{j_r}}^{i_1 K_{i_s}}}{\partial t} + \{\Gamma_{mk}^{i_1} A_{j_1 K_{j_r}}^{m K_{i_s}} + \mathbf{L} + \Gamma_{mk}^{i_s} A_{j_1 K_{j_r}}^{i_1 K_m} - \\ &- \Gamma_{j_1 k}^m A_{m K_{j_r}}^{i_1 K_{i_s}} - \mathbf{L} - \Gamma_{j_r k}^m A_{j_1 K_m}^{i_1 K_{i_s}}\} Gn^k, \\ \frac{dA_{b_1 K_{b_n}}^{a_1 K_{a_m}}(y^a, t)}{dt} &= A_{b_1 K_{b_n}}^{a_1 K_{a_m}}, \\ \frac{dA_{j_1 K_{j_r}, b_1 K_{b_n}}^{i_1 K_{i_s}, a_1 K_{a_m}}(y^a, t)}{dt} &= \frac{\partial A_{j_1 K_{j_r}, b_1 K_{b_n}}^{i_1 K_{i_s}, a_1 K_{a_m}}(y^a, t)}{\partial t} + \{\Gamma_{lk}^{i_1} A_{j_1 K_{j_r}, b_1 K_{b_n}}^{l K_{i_s}, a_1 K_{a_m}} + \mathbf{L} + \\ &+ \Gamma_{lk}^{i_s} A_{j_1 K_{j_r}, b_1 K_{b_n}}^{i_1 K_{l a_1}, K_{a_m}} - \Gamma_{j_1 k}^l A_{l K_{j_r}, b_1 K_{b_n}}^{i_1 K_{i_s}, a_1 K_{a_m}} - \mathbf{L} - \Gamma_{j_r k}^l A_{j_1 K_{l b_1}, K_{b_n}}^{i_1 K_{i_s}, a_1 K_{a_m}}\} Gn^k. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Перечислим некоторые важные свойства операции, определенной в (1.5). Их доказательства, так же как и d -производные геометрических характеристик поверхности Σ можно найти в [12]. Во-первых, d -производная является тензором того же порядка и типа, что и исходный. Во-вторых, для нее выполняется правило Лейбница дифференцирования произведения. В-третьих, в E^3 вычисление d -производной перестановочно по от-

ношению к операции тензорного дифференцирования по y^a и операции свертывания по латинским и греческим индексам.

Рассмотрим теперь функцию $f(x^i, t)$, под которой будем подразумевать компоненты некоторого тензорного поля, непрерывного и непрерывно дифференцируемого требуемое число раз в окрестности Σ . На Σ f , а также ее производные, начиная с некоторого порядка, могут иметь разрывы первого рода. Обозначим через f^+ и f^- предельные значения функции f , взятые по разные стороны от поверхности Σ , для которых, как следствие леммы Адамара [20,15], выполняются соотношения:

$$\begin{aligned} f_{,i}^{\pm} &= \frac{\partial f^{\pm}}{\partial n} n_i + a^{ab} x_b^j f_{,j}^{\pm} x_{i,a}, \quad \mathcal{F}^{\pm} = \frac{df^{\pm}}{dt} - f_{,j}^{\pm} G n^j, \\ \frac{\partial f^{\pm}}{\partial n} &= f_{,j}^{\pm} n^j, \quad x_{i,a} = g_{ik} x_a^k, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где a^{ab} и g_{ij} – компоненты поверхностной и пространственной метрики, соответственно. Вычитая формулы с разными знаками получим величины, определенные на Σ – разрывы функции f и ее производных

$$[f_{,i}] = \left[\frac{\partial f}{\partial n} \right] n_i + a^{ab} [f]_{,b} x_{i,a}, \quad [f \mathcal{F}] = \frac{d[f]}{dt} - \left[\frac{\partial f}{\partial n} \right] G, \quad [f] = f^+ - f^-. \quad (1.7)$$

Соотношения (1.7) называют геометрическими и кинематическими условиями совместности 1-го порядка. Как будет видно из дальнейшего, для получения определяющих соотношений лучевого метода необходимы условия совместности сколь угодно высокого порядка. Такие условия в рекуррентной форме были получены в [11] для случая декартовой системы координат. В [12] было показано, что в криволинейной пространственной системе координат их обобщением будут соотношения

$$\begin{aligned} [f_{,in\mathbf{K}n}] &= [f_{,n\mathbf{K}n}^{(k)}] n_i + a^{ab} x_{i,b} \left\{ [f_{,n\mathbf{K}n}^{(k-1)}]_{,a} - \sum_{s=3}^k \sum_{p=0}^{s-3} C_{k-1}^{k-s} (s-1)! [f_{,n\mathbf{K}n}^{(k-s)}]_{,a} k_1^{s-2-p} k_2^{p+1} \right\} + \\ &+ b^{ab} x_{i,b} \sum_{s=2}^k \sum_{p=0}^{s-2} C_{k-1}^{k-s} (s-1)! [f_{,n\mathbf{K}n}^{(k-s)}]_{,a} k_1^{s-2-p} k_2^p, \\ [f_{,in\mathbf{K}n}^{(k)}] &= \frac{d[f_{,n\mathbf{K}n}^{(k-1)}]}{dt} - G [f_{,n\mathbf{K}n}^{(k)}] + (k-1) a^{ab} G_{,b} [f_{,n\mathbf{K}n}^{(k-2)}]_{,a} - \\ &- \sum_{s=3}^{k-1} \sum_{p=0}^{s-3} C_{k-2}^{k-s-1} (s-1)! [f_{,n\mathbf{K}n}^{(k-s-1)}]_{,a} k_1^{s-2-p} k_2^{p+1} \left\} + \right. \\ &+ (k-1) b^{ab} G_{,b} \sum_{s=2}^{k-1} \sum_{p=0}^{s-2} C_{k-2}^{k-s-1} (s-1)! [f_{,n\mathbf{K}n}^{(k-s-1)}]_{,a} k_1^{s-2-p} k_2^p, \\ f_{,in\mathbf{K}n}^{(k)} &= f_{,ij\mathbf{K}n} n^j \mathbf{K}n^m, \quad f_{,in\mathbf{K}n}^{(k)} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{,j\mathbf{K}m} n^j \mathbf{K}n^m, \quad f_{,n\mathbf{K}n}^{(k)} = f_{,ij\mathbf{K}n} n^i n^j \mathbf{K}n^m, \end{aligned} \quad (1.8)$$

причем в формулах для $f_{,in\mathbf{K}n}^{(k)}$ и $f_{,m\mathbf{K}n}^{(k)}$ свертка с компонентами $n^j \mathbf{K}n^m$ проводится $(k-1)$ -раз, $f_{,ij\mathbf{K}m}$ – k -я ковариантная производная, b^{ab} – компоненты второй квадратичной формы поверхности. Обозначениям k_1 и k_2 соответствуют главные кривизны Σ . Полученные соотношения могут быть полезны также при исследовании слабых волн или же стационарных поверхностей разрывов.

2. Лучевой метод решения одномерной задачи антиплоского деформирования.

Изложение особенностей использования лучевых разложений за криволинейными поверхностями разрывов деформаций начнем с более простой одномерной задачи. Рассматривается ударное воздействие на границе цилиндрической полости радиуса r_0 в несжимаемом пространстве без предварительных деформаций. Последнее условие принято только с целью избежать громоздких формул. Динамическое воздействие на границе r_0

$$u_z|_{r_0} = g(t), \quad g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k g}{\partial t^k} \Big|_0 t^k \approx v_0 t + \frac{a_0 t^2}{2} + \mathbf{L}, \quad (2.1)$$

$$v_0 \neq 0, \quad t \geq 0$$

создает в пространстве поле перемещений вида $u_r = u_j = 0, u_z = u(r, t)$, где r, j, z – цилиндрическая система координат.

Следствием неравенства $v_0 \neq 0$ будет появление поперечной ударной волны $\Sigma(t)$ с начального момента времени. Свойства таких волн изучались, например, в [8,18-19]. Из (1.3) следует формула для вычисления скорости $\Sigma(t)$

$$G = C \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \left(\frac{w_1}{C} \right)^{2k} \right) = C \left(1 + g_1 \frac{w_1^2}{C^2} + \mathbf{L} \right) \quad (2.2)$$

$$C = \sqrt{\frac{m}{r}}, \quad g_1 = \frac{a+b+k+d}{2m}, \quad w_1 = [\mathbf{g}]$$

и условие на добавочное гидростатическое давление

$$p = p^+ - \frac{b w_1^2}{2G^2}, \quad b = \frac{2a+2m+2b+k}{m}, \quad p = \frac{p_0 - a - m}{m}, \quad (2.3)$$

где p^+ – известное давление в недеформированной области. Поскольку перемещения на Σ непрерывны, то $u|_{r_\Sigma} = 0$, где $r_\Sigma(t)$, определяющее положение волнового фронта имеет вид

$$r_\Sigma(t) = r_0 + \int_0^t G(x) dx \approx r_0 + \int_0^t C \left(1 + g_1 \frac{w_1^2}{C^2} + \mathbf{L} \right) dx. \quad (2.4)$$

На Σ внутренние координаты удобно выбрать так, что $y^1 = j$, $y^2 = z$. В области деформирования, исключая Σ , движение среды описывается системой уравнений, следующей из (1.1)

$$\begin{aligned}
u_{,rr}(1+3au_{,r}^2) + \frac{u_{,r}}{r}(1+au_{,r}^2) + \mathbf{L} &= \frac{\mathbf{K}}{C^2}, \\
p_{,r} + bu_{,r}u_{,rr} + (1+g)\frac{u_{,r}^2}{r} + \mathbf{L} &= 0, \quad a = 2g_1, \quad g = \frac{a}{m}.
\end{aligned}
\tag{2.5}$$

В (2.5) основным считаем первое уравнение, решение которого может быть найдено независимо от второго. Его решение за фронтом ударной волны Σ представим в виде лучевого ряда

$$\begin{aligned}
u^I(r,t) &\approx u^0(r,t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} w_k(t_{\Sigma})(t-t_{\Sigma})^k, \quad t \geq t_{\Sigma}, \\
u(r,t) &= u^0(r,t), \quad t \leq t_{\Sigma}, \quad t_{\Sigma}(r) = \int_{r_0}^r \frac{dx}{G(x)},
\end{aligned}
\tag{2.6}$$

где индексами “0” и “I” обозначено решение в области перед Σ и за ней, соответственно. В одномерной задаче геометрия лучей исходно известна, в данном случае это радиальные направления. Для определения коэффициентов w_k в (2.6) необходимо k -раз продифференцировать уравнение движения, всякий раз записывая результат в разрывах на Σ с учетом условий совместности (1.8). В линеаризованном случае или же в задачах со слабыми волнами такая процедура приводит к системе рекуррентных уравнений (уравнений затухания), последовательное интегрирование которой завершает решение.

Особенностью ударных волн оказывается зависимость каждого разрыва искомой функции от разрыва более высокого порядка, что исключает возможность непосредственного интегрирования

$$\frac{dw_k}{dt} = F_k(w_1, w_2, \mathbf{K}, w_{k+1}), \quad k = 1, 2, \mathbf{K}
\tag{2.7}$$

Записывая само уравнение движения в разрывах, получим первое из уравнений (2.7)

$$\frac{dw_1}{dt} = \frac{2aw_2w_1^2C^{-2}}{2+5aw_1^2C^{-2}+\mathbf{L}} - \frac{w_1C\left(1+\frac{3}{2}aw_1^2C^{-2}\right)}{r_{\Sigma}(2+5aw_1^2C^{-2}+\mathbf{L})} + \mathbf{L}
\tag{2.8}$$

Из (2.8) видно, что изменение интенсивности волны происходит в основном за счет линейного вклада $-\frac{w_1C}{2r_{\Sigma}}$, куда в отличие от плоской задачи входит величина r_{Σ}^{-1} , определяющая изменение кривизны волнового фронта. Это означает, что влияние геометрического расхождения на изменение w_1 превалирует над нелинейными эффектами. Последнее полностью согласуется с данными вычислительных экспериментов в упругих диэлектриках [20].

Адаптировать традиционный лучевой метод для задач ударного деформирования удалось благодаря включению в (2.7) дополнительных разложений w_k в ряды по их d -производным в окрестности нуля [4-5]

$$w_k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n w_{k0}}{dt^n}, \quad \frac{d^n w_{k0}}{dt^n} = \frac{d^n w_k}{dt^n} \Big|_{t=0}. \quad (2.9)$$

Такой подход предполагает, что решение строится для малых послеударных времен. Уравнения (2.7) справедливы и при $t=0$ и совместно с граничным условием (2.1) составляют замкнутую систему алгебраических уравнений относительно искомых функций. Например, если оборвать ряд (2.1) на квадратичном слагаемом, то достаточно определить только w_{10} , w_{20} и $\frac{dw_{10}}{dt}$. Совместно с полем перемещений лучевой метод позволяет определить функциональную зависимость $r_{\Sigma} = r_{\Sigma}(t)$ или $t_{\Sigma} = t_{\Sigma}(r)$, связывающую r и t на переднем фронте волны

$$u = - \left(w_{10} + \frac{dw_{10}}{dt} t_{\Sigma} + \mathbf{L} \right) (t - t_{\Sigma}) - \frac{1}{2} (w_{20} + \mathbf{L}) (t - t_{\Sigma})^2 + \mathbf{L}, \quad (2.10)$$

$$t_{\Sigma} = \frac{r - r_0}{C(1 + g_1 w_{10}^2 C^{-2})} - \frac{g_1 w_{10} C^{-1} \frac{dw_{10}}{dt} (r - r_0)^2}{C^3 (1 + g_1 w_{10}^2 C^{-2})^3} + \mathbf{L},$$

где $\frac{dw_{10}}{dt}$ определяется соотношением (2.8) при $t=0$. Сопоставляя ряд (2.10) с краевым условием (2.1), получим $w_{10} = -v_0$, $w_{20} = -a_0$. Решение может быть продолжено дальше с требуемой степенью точности в зависимости от краевых условий на r_0 . Определение функции добавочного гидростатического давления $p(r, t)$ по известному полю перемещений не представляет сложностей, кроме вычислительных, поэтому не будем на этом останавливаться ни здесь, ни в следующем параграфе, чтобы не перегружать текст формулами. Далее покажем, как рассмотренный алгоритм решения можно перенести на неоднородные задачи, когда геометрия лучей заранее неизвестна, лучи становятся криволинейными и расходящимися.

3. Лучевой метод решения двумерной задачи антиплоского деформирования.

Предположим, что в несжимаемой недеформированной среде имеется цилиндрическая полость с направляющей L_0 в форме эллипса

$$\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} = 1, \quad (3.1)$$

где z_i – декартовы координаты.

Начиная с момента $t=0$ в среде осуществляется антиплоское движение $u_1 = u_2 = 0$, $u_3 = u(z_1, z_2, t)$, вызванное ударным воздействием на L_0 , которое приводит к граничным перемещениям

$$u|_{L_0} = g(y, t), \quad g(y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k g}{\partial t^k} \Big|_0 t^k \approx v_0(y)t + \frac{a_0(y)t^2}{2} + \mathbf{L}, \quad (3.2)$$

где $y = z_1$ – явная параметризация на L_0 . Будем считать, что (3.2) задано симметрично относительно осей координат, поэтому рассмотрим решение только в первом квадранте $0 \leq y \leq a$, $z_2 \geq 0$. Система уравнений движения для этой задачи имеет вид

$$\begin{aligned} u_{,11} \{1 + 3au_{,1}^2 + au_{,2}^2\} + u_{,22} \{1 + au_{,1}^2 + 3au_{,2}^2\} + 4au_{,12}u_{,1}u_{,2} + \mathbf{L} &= \frac{\mathbf{K}}{C^2} + \mathbf{L}, \\ -p_{,1} - 2j_1 u_{,11}u_{,1} - 2j_2 u_{,12}u_{,2} - (1+g)(u_{,12}u_{,2} + u_{,22}u_{,1}) + \mathbf{L} &= 0, \\ -p_{,2} - 2j_1 u_{,22}u_{,2} - 2j_2 u_{,12}u_{,1} - (1+g)(u_{,11}u_{,2} + u_{,12}u_{,1}) + \mathbf{L} &= 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$j_1 = \frac{b}{2}, \quad j_2 = \frac{b + \frac{k}{2}}{m}, \quad u_{,t} = \frac{\partial u}{\partial z_t}, \quad t = 1, 2.$$

Отметим, что система трех уравнений (3.3) содержит только две неизвестные функции u и p , поэтому упругий потенциал должен быть задан специальным образом [9,14]

$$W = -2ml_1 - ml_2 + bI_1^2 + (b-m)I_1I_2 - qI_1^3 + lI_1^4 + \frac{b-m}{4}I_2^2 + \left(b-m - \frac{3}{2}q\right)I_1^2I_2 + \mathbf{L}, \quad (3.4)$$

при котором два последних уравнения тождественно равны. В (3.4) m , b , q , l – независимые константы среды, через которые выражены остальные. Скорость индуцированной поперечной ударной волны определяется той же формулой (2.2). Следствием непрерывности поля перемещений на фронте волны $\Sigma(t)$ будет условие

$$u|_{\bar{r}_\Sigma} = 0, \quad \bar{r}_\Sigma(y, t) = \bar{r}_0(y) + \int_0^t G(y, x) \bar{n}(y, x) dz, \quad (3.5)$$

где $\bar{r}_0(y)$ и $\bar{r}_\Sigma(y, t)$ – радиус-векторы некоторой точки Σ с постоянным значением параметра y в начальный и текущий моменты времени, соответственно. Отметим, что для двумерной задачи компоненты вектора нормали $\bar{n}(y, t)$ – неизвестные величины, которые подлежат определению наряду с полем перемещений и геометрией $\Sigma(t)$ в процессе решения задачи. Перемещения за фронтом Σ представим рядом, аналогичным (2.6)

$$\begin{aligned} u^l(s, y, t) &\approx u^0(s, y, t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} w_k(y, t_\Sigma) (t - t_\Sigma)^k, \quad t \geq t_\Sigma, \\ u(s, y, t) &= u^0(s, y, t), \quad t < t_\Sigma, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$t_\Sigma(y, s) = \int_0^s G^{-1}(y, x) dx,$$

в которой отличаем от предыдущей задачи является зависимость от криволинейных координат s и y – координаты эйконала. Следуя обычной схеме лучевого метода, запишем уравнение затухания интенсивности волны, сразу полагая в нем $t = 0$

$$\frac{dw_{10}}{dt} = \frac{2aC^{-2}w_{10}^2w_{20} + 3H_0Cw_{10}\left(1 + \frac{3}{2}a\frac{w_{10}^2}{C^2}\right)}{2 + 5aw_{10}^2C^{-2} + \mathbf{L}} + \mathbf{L}, \quad (3.7)$$

$$H_0 = \frac{-ab}{2(a^2 - e^2y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

где H_0 – средняя кривизна $\Sigma(0)$, e – эксцентриситет эллипса. Отметим, что при $H_0 = -\frac{1}{2r_0}$ – средняя кривизна кругового цилиндра – уравнение (3.7) переходит в аналогичное для одномерной задачи.

С учетом разложений (2.9) расстояние вдоль луча определяется зависимостью

$$s = \int_0^t G(y, x) dx = C \left(1 + \frac{a}{2} w_{10}^2 C^{-2}\right) t + aC^{-1} w_{10} \frac{dw_{10}}{dt} \frac{t^2}{2} + \mathbf{L}, \quad (3.8)$$

обращение которой позволяет вычислить время прихода волны в данную точку пространства

$$t_{\Sigma}(s, y) = \left(1 - \frac{a}{2} \frac{w_{10}^2}{C^2} + \mathbf{L}\right) \frac{s}{C} - \frac{a}{2} C^{-2} w_{10} \frac{dw_{10}}{dt} \left(\frac{s}{C}\right)^2 + \mathbf{L} \quad (3.9)$$

Лучевое разложение (3.6) для перемещений можно представить той же формулой (2.10), заменив входящие в нее функции на (3.7), (3.9).

Геометрия лучей задается соотношениями, следующими из (3.5)

$$z_1 = f_i(y, t) = z_{i0}(y) + \int_0^t G(y, t) n_i(y, t) dt, \quad (3.10)$$

$$z_{10} = y, \quad z_{20} = f(y) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - y^2},$$

причем компоненты вектора нормали n_i зависят от текущего положения волнового фронта, что не позволяет проинтегрировать (3.10). Аппроксимируя n_i рядами, аналогичными (2.9), и вычисляя их d -производные согласно правилам, определенным в [11], получим

$$n_i(y, t) = n_{i0} + \frac{dn_{i0}}{dt} t + \mathbf{L},$$

$$n_{10} = \frac{by}{a\sqrt{a^2 - e^2y^2}}, \quad n_{20} = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{\sqrt{a^2 - e^2y^2}}, \quad (3.11)$$

$$\left. \frac{dn_i}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{a}{c} a^{11} z_{i,y} w_1 w_{1,y} \Big|_{t=0} = -\frac{a}{c} a_0^{11} z_{i0,t} w_{10} w_{10,y}.$$

Подставляя (3.11), (2.9) и (3.7) в (3.10), получим параметрическое представление поверхности $\Sigma(t)$

$$\begin{aligned}
z_1 = f_1(y,t) &= y + \frac{Cby}{a\sqrt{a^2 - e^2y^2}} \left(1 + \frac{a}{2} w_{10}^2 C^{-2} \right) t + \left[-\frac{a(a^2 - y^2)w_{10}w_{10,y}}{a^2 - e^2y^2} \times \right. \\
&\times \left. \left(1 + \frac{a}{2} w_{10}^2 C^{-2} \right) + \frac{aby}{Ca\sqrt{a^2 - e^2y^2}} w_{10} \frac{dw_{10}}{dt} \right] \frac{t^2}{2} + \mathbf{L}, \\
z_2 = f_2(y,t) &= \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - y^2} + \frac{C\sqrt{a^2 - y^2}}{\sqrt{a^2 - e^2y^2}} \left(1 + \frac{a}{2} w_{10}^2 C^{-2} \right) t + \\
&+ \left[-\frac{aby\sqrt{a^2 - y^2}w_{10}w_{10,y}}{a(a^2 - e^2y^2)} \left(1 + \frac{a}{2} w_{10}^2 C^{-2} \right) + \frac{a\sqrt{a^2 - y^2}}{C\sqrt{a^2 - e^2y^2}} w_{10} \frac{dw_{10}}{dt} \right] \frac{t^2}{2} + \mathbf{L},
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Как уже отмечалось, полученное аналитическое решение пригодно лишь на не-большом удалении от нагружаемой поверхности. С целью расширить рассматриваемый временной диапазон перейдем к численному расчету процесса деформирования, используя прифронтное лучевое разложение в качестве начальных и краевых данных для численной схемы.

4. Численная схема расчетов. Полагаем, что до момента $t = t_0$ (рис. 1) справедливо аналитическое решение. Начиная с момента $t = t_0$ будем искать численное решение задачи в узлах регулярной прямоугольной сетки с шагами Δx_1 , Δx_2 и Δt по пространству и времени, соответственно. Для этого уравнения движения (3.3) относительно функции перемещения заменим системой нелинейных алгебраических уравнений, связывающих перемещения в соседних узлах сетки. Входящие в (3.3) частные производные заменим конечно-разностными аппроксимациями согласно шаблону, изображенному на рис. 2.

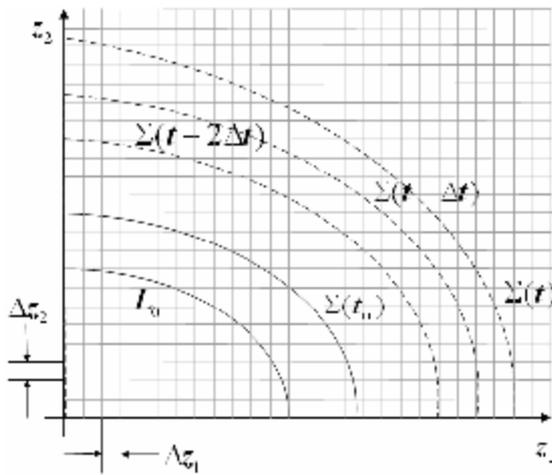


Рис. 1

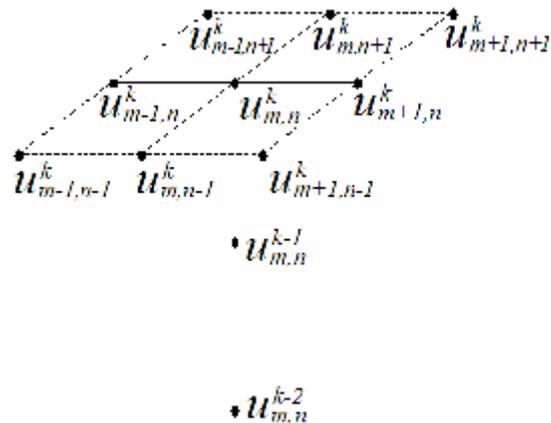


Рис. 2. Шаблон численной схемы

Положение фронта ударной волны (функции $f_i(y, t)$) на каждом временном слое, границу L_0 , а также заданные на них функции $w_1(y, t)$ и $w_2(y, t)$ будем интерполировать

кубическими сплайнами, причем узлы сплайнов, соответствующие функциям, заданным на одной границе, совпадают. Также учтем, что при движении $\Sigma(t)$ значение параметра у любого узла сплайна остается неизменным.

Для замыкания системы необходимы уравнения, связывающие перемещения точек среды в прифронтной области от $\Sigma(t-2\Delta t)$ до $\Sigma(t)$, где нельзя записать конечно-разностное выражение для второй производной по времени, т.к. соответствующие узлы с предыдущих временных слоев не попадают в деформированную область (см. рис. 1). В этих точках можно записать лучевое разложение, при условии, что входящие в него параметры w_{n0} неизвестны.

Например, вычислив перемещения в точках среды, соответствующих отдельным узлам сплайнов $f_i(y, t-2\Delta t)$, можно получить систему уравнений относительно параметров лучевого разложения для данного узла. Положим, для удобства, на последнем временном слое $t=0$, тогда $t_\Sigma = -2\Delta t$ и из (2.10) следует

$$\begin{aligned} w_{10} &= -\frac{u(z_1, z_2, t) - u(z_1, z_2, t - \Delta t)}{\Delta t} - 2\Delta t \frac{dw_{10}}{dt} + 2\Delta t w_{20}, \\ w_{20} &= -\frac{u(z_1, z_2, t) - 2u(z_1, z_2, t - \Delta t) + u(z_1, z_2, t - 2\Delta t)}{\Delta t^2}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Для вычисления d -производной в (4.1) используем конечно-разностное выражение

$$\frac{dw_1}{dt}(y, t) \approx \frac{w_1(y, t) - w_1(y, t - \Delta t)}{\Delta t}. \quad (4.2)$$

Система нелинейных алгебраических уравнений, включающая конечно-разностные уравнения для внутренних узлов деформированной области, лучевые разложения для точек, совпадающих с узлами поверхности разрыва на позапрошлом временном слое и граничные условия, решается методом простой итерации. Также с помощью лучевого разложения вычисляются поля перемещений на первых двух временных слоях, необходимые для инициализации схемы, и начальное приближение для очередного слоя.

Получаемые в ходе решения константы лучевого разложения используются для определения на каждой итерации положения фронта ударной волны и его геометрических параметров, входящих в лучевой ряд.

Таким образом, построена неявная вычислительная схема, на каждой итерации которой сначала пересчитываются внутренние узлы области, а затем сплайны, описывающие заданные на волновом фронте функции, и положение самого фронта. Каждая итерация завершается вычислением перемещений в узлах сетки в прифронтной области, входящих в конечно-разностные уравнения.

По описанному алгоритму была разработана и отлажена программа, позволяющая вычислить на каждом временном шаге перемещения за фронтом ударной волны, положение фронта и константы лучевого разложения. Некоторые результаты расчетов представлены на рис. 3-5. Параметры задачи выбраны следующим образом: $a = 10$, $C = 10^3$ м/с, $v_0 = 1$ м/с, $a_0 = 1$ м/с², $a = 1,5$ м, $b = 1$ м. Шаги расчетной сетки составляют $\Delta t = 10^{-4}$ с, $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 0,05$ м.

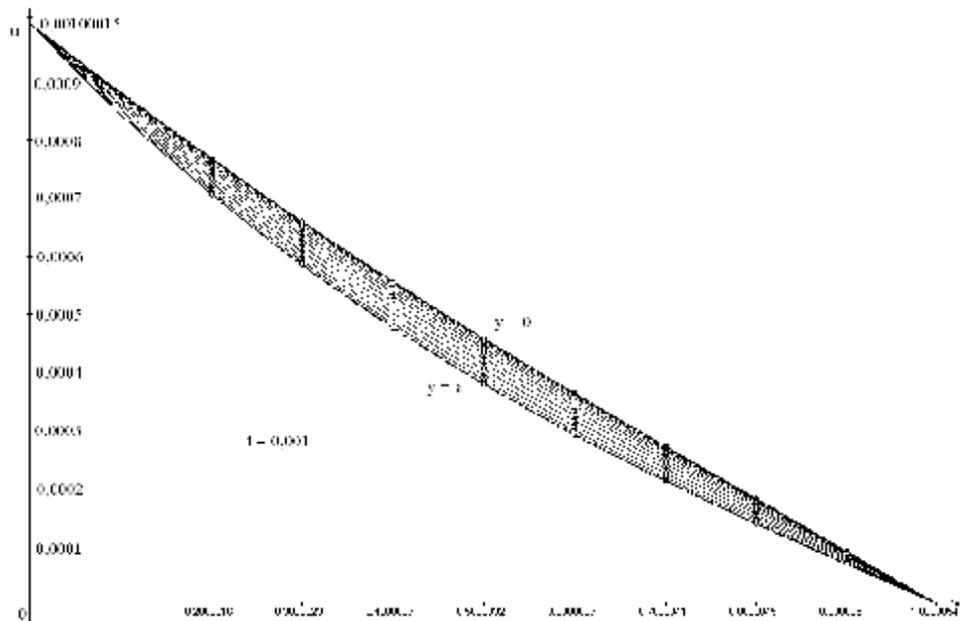


Рис. 3. Значения перемещений вдоль фиксированных лучей в момент времени $t = 0,001$ с .
 $t = 0,0017$

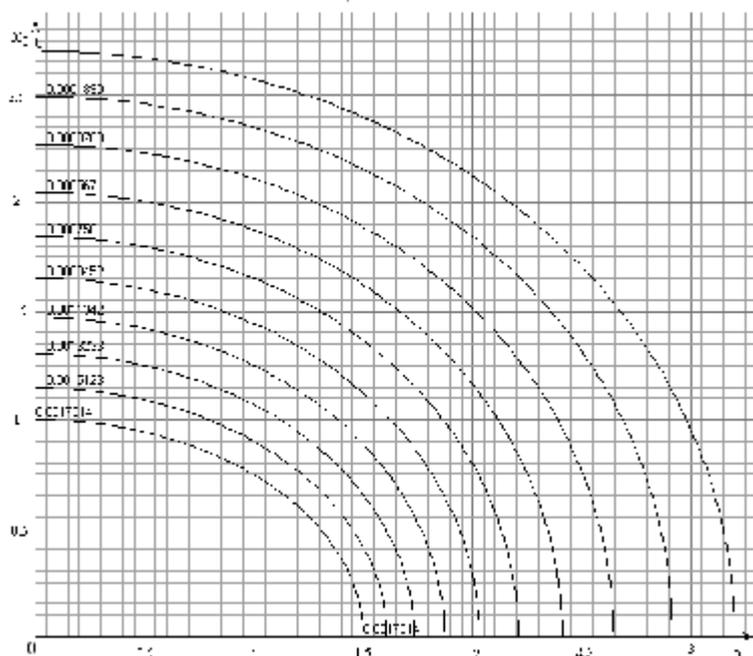


Рис. 4. Изолинии функции перемещения $u(x_1, x_2, t)$ в момент времени $t = 0,0017$ с .

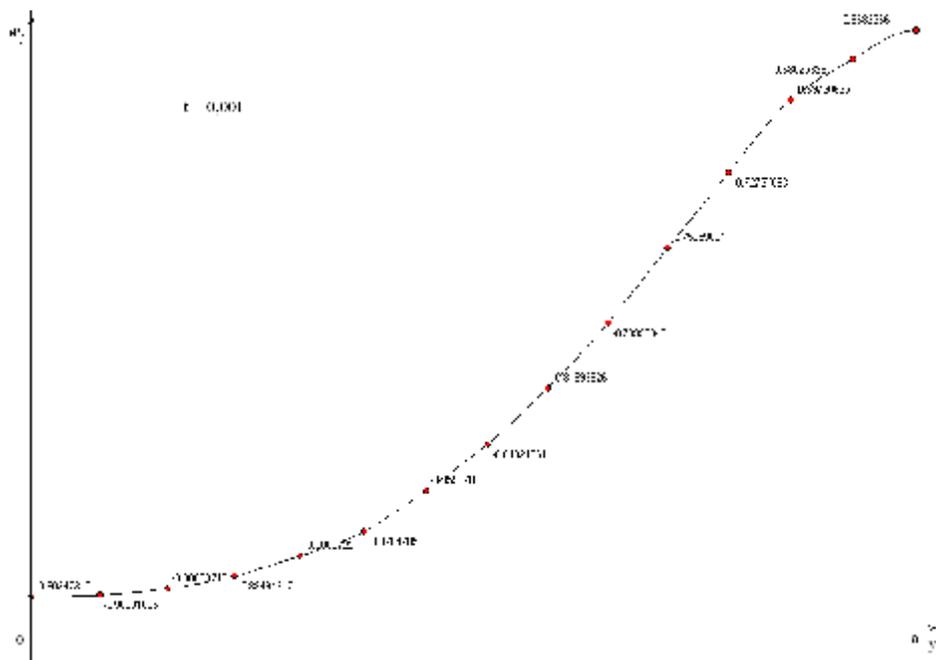


Рис. 5. Изменение интенсивности волны вдоль волнового фронта в момент времени $t = 0,001$ с.

Из представленных рисунков видно, что более пологие участки фронта движутся быстрее, так что контур $\Sigma(t)$ стремится принять форму окружности.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-96005) и ДВО РАН (грант № 06-III-A-01-009).

г. Владивосток

Поступила: 21 декабря 2007 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабич, В. М.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн / В. М. Бабич, В. С. Булдырев. – М.: Наука, 1972. – 456 с.
2. *Бабичева, Л. А.* Лучевой метод решения динамических задач в упруго-вязко-пластических средах / Л. А. Бабичева, Г. И. Быковцев, Н. Д. Вервейко // ПММ. – 1973. – Т.37. – №1. – С.145-155.
3. *Бестужева, Н. П.* К исследованию нестационарных поверхностных волн в нелинейно-упругих средах / Н. П. Бестужева, Г. И. Быковцев, В. Н. Дурова // Прикладная механика. – 1981. – Т.17. – №12. – С.27-33.
4. *Буренин, А. А.* Лучевой метод решения одномерных задач нелинейной динамической теории упругости с плоскими поверхностями сильных разрывов / А. А. Буренин, Ю. А. Россихин // Прикладные задачи механики деформируемых сред. – Владивосток : Изд-во ДВО АН СССР, 1991. – С.129-137.
5. *Буренин, А. А.* Об одной возможности построения приближенных решений нестационарных задач динамики упругих сред при ударных воздействиях / А. А. Буренин // Дальневосточный математический журнал. – 1999. – Вып.8. – С.49-72.
6. *Буренин, А. А.* Выделение поверхностей разрывов лучевым методом в задачах динамики упругих сред / А. А. Буренин, П. В. Зиновьев, В. Е. Рагозина // Фундаментальные и прикладные вопросы

- механики : сб. докладов международной научной конференции (Хабаровск, 8-11 октября 2003 г.). – Хабаровск : Изд-во ХГТУ, 2003. – С.64-66.
7. Буренин, А. А. К проблеме выделения поверхностей разрывов в численных методах динамики деформируемых сред / А. А. Буренин, П. В. Зиновьев // Проблемы механики: сб. статей к 90-летию А. Ю. Ишлинского. – М. : Физматлит, 2003. – С.146-155.
 8. Буренин, А. А. Об ударном деформировании несжимаемого упругого полупространства / А. А. Буренин // Прикладная механика. – 1985. – Т. XXI. – №5. – С.3-8.
 9. Буренин, А. А. К построению приближенных решений краевых задач ударного деформирования / А. А. Буренин, В. Е. Рагозина // Изв. РАН. МДТТ. – 2007. – №6. (извещение редакции)
 10. Быковцев, Г. И. Особые линии и поверхности в пространственных течениях идеальных жестко-пластических сред / Г. И. Быковцев, И. А. Власова // Механика деформируемого твердого тела (динамика сплошной среды). – Новосибирск: Изд-во Института гидродинамики СО АН СССР, 1979. – Вып.41. – С.31-43.
 11. Быковцев, Г. И. Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. – Владивосток : Изд-во «Дальнаука», 1998. – 528 с.
 12. Герасименко, Е. А. Геометрические и кинематические ограничения на разрывы функций на движущихся поверхностях / Е. А. Герасименко, В. Е. Рагозина // Дальневосточный математический журнал. – 2004. – Т.5. – №1. – С.100-109.
 13. Гринфельд, М. А. Методы механики сплошных сред в теории фазовых превращений / М. А. Гринфельд. – М. : Наука, 1990. – 312 с.
 14. Лурье, А. И. Нелинейная теория упругости / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1980. – 512 с.
 15. Россихин Ю. А. О равномерной пригодности лучевых разложений в задачах, связанных с распространением ударных волн в слабо анизотропной среде / Ю. А. Россихин // Изв. АН СССР – 1989. – №.6. – С.131-138.
 16. Томас, Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах / Т. Томас. – М. : Мир, 1964. – 308 с.
 17. Шаталов, А. Г. Разрывные решения в связанной задаче термоупругости / А. Г. Шаталов // Механика деформируемых сред. – Куйбышев: Изд-во Куйбышевский ун-т, 1979. – Вып.6. – С.85-90.
 18. Achenbach, J. D. Note on wave propagation in lineary viscoelastic media / J. D. Achenbach, D. R. Reddy // Zeitschr. fur angew. Match. und Phus. – 1967. – N.18. – S.141-144.
 19. Boa-The, Chy Finite amplitude waves in incompressible pefetly elastic materials / Chy Boa-The // J. Mech. Phys. Solids. – 1964. – V.12. – N.1. – P. 45-57.
 20. Fu, Y. B. Transverse cylindrical simple waves and shock waves in elastic non-conductors / Y. B. Fu, N. H. Scott // International Journal of Solids and Structures. – 1991. – V.27. – P.547-563.
 21. Hadamard, J. Lecons sur la Propagation des Ondes et les Equations de Vhydrodynamique / J. Hadamard. – Paris. – Librairie Scientifique A Hermann, 1903.
 22. Rossikhin, Yu. A. Ray method for solving dynamic problems connected with propagation of wave surfaces of strong and weak discontinuities / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // Appl. mech. rev. – 1995. – V.48. – N.1. – P.1-39.