**ВЕСТНИК ЧГПУ**
**им. И. Я. ЯКОВЛЕВА**
**МЕХАНИКА**
**ПРЕДЕЛЬНОГО**
**СОСТОЯНИЯ**
**№ 2 • 2008**

*Гаврилкина М. В., Глаголев В. В.*

# ВАРИАНТ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ РАЗРУШЕНИЯ ТИПА НОРМАЛЬНОГО ОТРЫВА

*(Тульский государственный университет)*

*Предлагается подход к решению задач механики разрушения на масштабном уровне механики сплошной среды. Для элементарного элемента объема в рамках данного подхода рассмотрено наступление момента образования новых материальных поверхностей. Предложена постановка и метод решения частной задачи механики разрушения.*

***Ключевые слова:*** *характерный размер, граничное интегральное уравнение, линейная упругость.*

**1. Подходы к описанию процесса разрушения.** В процессе внешних, монотонных до некоторого момента воздействий на твердое тело, его материал проходит стадии обратимого (упругого), необратимого равновесного (упругопластического) деформирования и, наконец, стадию разрушения. Наименее изученной, но и наиболее важной с прикладной точки зрения является стадия разрушения. Существенное отличие этой стадии от предыдущих заключается в том, что если упругое и неупругое деформирование может охватывать весь материал тела, в частности, деформированное состояние может быть однородным, то процесс разрушения, как правило, локализуется в тонких слоях. Сложность описания таких процессов связана с неопределенностью самого понятия "разрушение".

Исторически сложились два направления описания разрушения. Первое рассматривает наступление предельного состояния в окрестности точки континуума для тел без начальных вырезов [1,7,10]. В этом случае определяется момент наступления критического состояния в окрестности материальной точки и не рассматривается дальнейшая эволюция разрушения, в частности, процесс формирования новых материальных поверхностей. Второе направление – определение условий начала движения имеющегося в теле разреза, который полагается либо математическим (теория трещин) [11–15,17], либо физическим, имеющим некоторый характерный размер [6,9,16]. Для математического разреза процесс образования поверхностей не связывается с разрушением материала в смысле использования критериев прочности. В качестве условия начала продвижения поверхности разрыва принимается критерий Гриффитса в энергетическом или силовом вариантах. В работах [2-5] предлагается рассматривать разрушение как термомеханический процесс, и даны оценки соответствующего масштабного уровня через известные механические характеристики среды.

**2. Постановка частной задачи механики разделения.** В качестве примера решения задачи разделения на масштабном уровне выполнения гипотез механики сплошной среды рассмотрим условия начала продвижения физического разреза (слоя взаимодействия) [2] в линейно упругой плоскости согласно схеме, показанной на рис.1, соответствующей разрушению типа нормального отрыва.

В отличие от постановки задачи [2], наряду с напряжением $\sigma_{11}(x_2)$ учитываем напряжение $\sigma_{22}(x_2)$, обусловленное наличием касательных напряжений $\sigma_{21}(x_2)$ вдоль границы со слоем. Подчеркнем, что в слое постулируется однородность напряженно-деформированного (НДС) состояния в направлении ортогональном поверхности разделения (плоскости $OX_2X_3$).

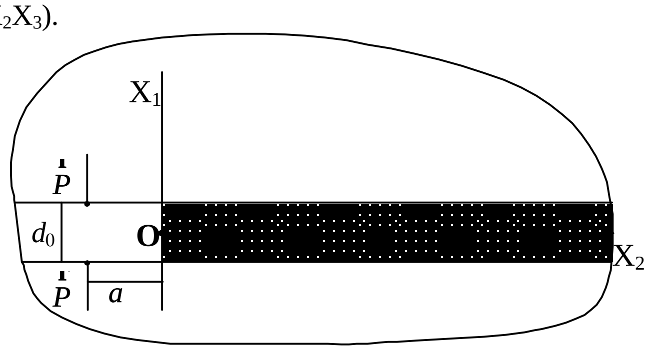


**Рис.1.** Схема разделения плоскости

Полагаем, что связь между напряжениями и деформациями вне слоя взаимодействия описывается соотношениями линейной теории упругости для случая плоского деформирования. В силу симметрии задачи рассмотрим только верхнюю полуплоскость ($x_1 \ge \delta_0/2$) (рис.2), а действие слоя эквивалентно нагрузке на полуплоскость $\vec{q}(x) = -(\tilde{\sigma}_{11}\vec{e}_1 + \tilde{\sigma}_{21}\vec{e}_2)$ (здесь и далее $x \equiv x_2/d_0$ – безразмерная координата; $\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} \cdot \beta$ $\iota, j = 1,2$ – безразмерные напряжения; $\beta = \dfrac{2(1-\nu^2)}{\pi E}$ – параметр материала, $E$ – модуль упругости; $\nu$ – коэффициент Пуассона).

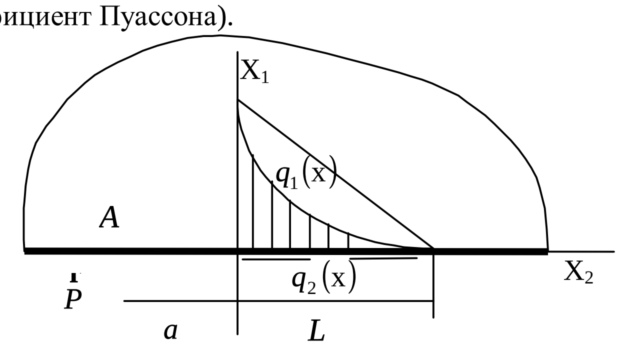

**Рис.2.** Схема нагружения плоскости

Связь между напряжением $\tilde{\sigma}_{22}$ в слое взаимодействия и напряжением $\tilde{\sigma}_{21}$ по границе слоя получим из условия равновесия элемента слоя в виде

$$\frac{\partial\tilde{\sigma}_{22}}{\partial x} = -2\tilde{\sigma}_{21}. \qquad (1)$$

На основании решения задачи Фламана распределение перемещений точек границы полуплоскости под действием нагрузок, показанных на рис.2, имеет вид

$$\tilde{u}_1(x) = -\tilde{P}\cdot\ln\left(\frac{x+a}{L+a}\right) + \int_0^L \tilde{\sigma}_{11}(\xi)\cdot\ln\left(\frac{|x-\xi|}{L-\xi}\right)d\xi, \qquad (2)$$

$$\tilde{u}_2(x) = \int_0^L \tilde{\sigma}_{21}(\xi)\cdot\ln\left(\frac{|x-\xi|}{L-\xi}\right)d\xi, \qquad (3)$$

где $\tilde{u}_i = u_i/\delta_0$ $i,j = 1{,}2$ – безразмерные перемещения; $\tilde{P} = P\beta/\delta_0$ – безразмерная сила на единицу толщины; L – удаленная точка с нулевым перемещением; $L$ – расстояние от начала координат до L.

Запишем перемещения в левых частях (2) и (3) через соответствующие главные деформации слоя взаимодействия с учетом гипотезы однородности напряженно-деформированного состояния по толщине слоя

$$\tilde{u}_1(x) = \varepsilon_{11}(x)/2, \qquad (4)$$

$$\tilde{u}_2(x) = \int_L^x \frac{\varepsilon_{22}(x)}{2}dx. \qquad (5)$$

Выражение главных деформаций найдем через соответствующие напряжения из закона Гука

$$\varepsilon_{11} = \tilde{A}\tilde{\sigma}_{11} - \tilde{B}\tilde{\sigma}_{22}, \qquad (6)$$

$$\varepsilon_{22} = \tilde{A}\tilde{\sigma}_{22} - \tilde{B}\tilde{\sigma}_{11}, \qquad (7)$$

где $\tilde{A} = \frac{\pi}{2}$, $\tilde{B} = \frac{\nu\pi}{2(1-\nu)}$ – безразмерные постоянные.

Таким образом, с учетом (4), (6), представим граничное интегральное уравнение (2) в следующей форме

$$\frac{1}{2}\left(\tilde{A}\tilde{\sigma}_{11} - \tilde{B}\tilde{\sigma}_{22}\right) = -\tilde{P}\cdot\ln\left(\frac{x+a}{L+a}\right) + \int_0^L \tilde{\sigma}_{11}(\xi)\cdot\ln\left(\frac{|x-\xi|}{L-\xi}\right)d\xi. \qquad (8)$$

Продифференцируем по x выражение (3)

$$\varepsilon_{22} = \frac{d\tilde{u}_2}{dx} = \int_0^L \tilde{\sigma}_{12}(\xi)\frac{1}{x-\xi}d\xi. \qquad (9)$$

Подставим в формулу (9) выражение (7) в результате получим

$$\tilde{A}\tilde{\sigma}_{22} - \tilde{B}\tilde{\sigma}_{11} = \int_0^L \tilde{\sigma}_{21}(\xi)\frac{1}{x-\xi}d\xi. \qquad (10)$$

Отсутствие напряжений $\tilde{\sigma}_{22}$ в точке О и условие затухания напряжений на бесконечности приводит к следующему граничному условию

$$\tilde{\sigma}_{22}\big|_{x=0} = 0. \tag{11}$$

Таким образом, имеем систему интегральных уравнений (8), (10), дополняемую связью (1). Перепишем полученную систему интегро-дифференциальных уравнений в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\tilde{A}\tilde{\sigma}_{11} - \tilde{B}\tilde{\sigma}_{22}\right) = -\tilde{P}\cdot\ln\left(\dfrac{x+a}{L+a}\right) + \displaystyle\int_0^L \tilde{\sigma}_{11}(\xi)\cdot\ln\left(\dfrac{|x-\xi|}{L-\xi}\right)d\xi, \\ \tilde{A}\tilde{\sigma}_{22} - \tilde{B}\tilde{\sigma}_{11} = \displaystyle\int_0^L \tilde{\sigma}_{21}(\xi)\dfrac{1}{x-\xi}\,d\xi, \\ \dfrac{\partial\tilde{\sigma}_{22}}{\partial x} = -2\tilde{\sigma}_{21}. \end{cases} \tag{12}$$

Результатом решения системы (12) является нахождение поля напряжений $\tilde{\sigma}_{11}$ и $\tilde{\sigma}_{22}$, а также касательных напряжений по границе со слоем – $\tilde{\sigma}_{21}$ при условии затухания напряжений на бесконечности: $\tilde{\sigma}_{11}\big|_{x=L} = \tilde{\sigma}_{21}\big|_{x=L} = \tilde{\sigma}_{22}\big|_{x=L} = 0$.

**3. Результаты решения**. Для решения задачи в рамках дискретной модели разобьем границу полуплоскости OL на $N$ граничных элементов [8]. Считаем, что каждый граничный элемент характеризуется постоянным (средним по элементу) значением напряжения $\tilde{\sigma}_{ii}^{(k)}$, где $k = \overline{1\cdots N}, \imath = 1,2$.

Построим дискретные выражения интегральных операторов в уравнениях системы (12)

$$\int_0^L \tilde{\sigma}_{11}(\xi)\cdot\ln\left(\frac{|x-\xi|}{L-\xi}\right)d\xi = \sum_{k=1}^{N}\tilde{\sigma}_{11}^{(k)}\cdot\int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}}\ln\left(\frac{|x_j-\xi|}{L-\xi}\right)d\xi, \tag{13}$$

$$\int_0^L \tilde{\sigma}_{21}(\xi)\cdot\frac{1}{x-\xi}d\xi = \sum_{k=1}^{N}\tilde{\sigma}_{21}^{(k)}\cdot\int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}}\frac{1}{x_j-\xi}d\xi. \tag{14}$$

Используя условие постоянства напряжения $\tilde{\sigma}_{21}^{(j)}$ и производной $\dfrac{d\tilde{\sigma}_{22}^{j}}{dx}$, соотношение (1) примет следующий вид

$$\tilde{s}_{21}^{(j)} = -\frac{\tilde{s}_{22}^{(j)} - \tilde{s}_{22}^{(j-1)}}{2}. \tag{15}$$

Таким образом, система (12) сводится к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно $\tilde{\sigma}_{11}^{(k)}, \tilde{\sigma}_{21}^{(k)}$ и $\tilde{\sigma}_{22}^{(k)}$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\tilde{A}}{2}\tilde{\sigma}_{11}^{(j)} - \dfrac{\tilde{B}}{2}\tilde{\sigma}_{22}^{(j)} = -\tilde{p}^{(j)} \cdot \ln\left(\dfrac{x_j + a}{L + a}\right) + \sum\limits_{k=1}^{N} \tilde{\sigma}_{11}^{(j)} \cdot \int\limits_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \ln\left(\dfrac{x_j - \xi}{L - x}\right) d\xi, \\
\tilde{A}\tilde{\sigma}_{22}^{(j)} - \tilde{B}\tilde{\sigma}_{11}^{(j)} = \sum\limits_{k=1}^{N} \tilde{\sigma}_{21}^{(j)} \cdot \int\limits_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \dfrac{1}{x_j - \xi} d\xi, \\
\tilde{\sigma}_{22}^{(j)} = -\dfrac{\tilde{\sigma}_{22}^{(j)} - \tilde{\sigma}_{22}^{(j-1)}}{2}.
\end{cases}
\tag{16}
$$

На рис.3 построены эпюры распределения напряжений в слое взаимодействия на первых 7 элементах при следующих расчетных характеристиках: N = 1000; $a$ = 10 для двух значений коэффициента Пуассона: $\nu = 0{,}15$ , $\nu = 0{,}35$. Непрерывные линии соответствуют $\nu = 0{,}35$, а штриховые – $\nu = 0{,}15$. Кривые 1 и 3 определяют напряжение $\sigma_{11}$, а 2 и 4 – $\sigma_{22}$.

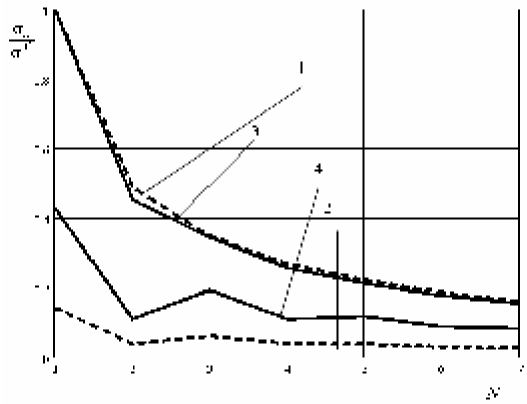

**Рис.3.** Распределение напряжений на границе слоя

Из рисунка видно, что коэффициент Пуассона практически не влияет на распределение напряжений $\sigma_{11}$, но оказывает существенное влияние на напряжение $\sigma_{22}$. Полученная зависимость показывает, что напряжение $\sigma_{22}$ для физического разреза соответствует напряжению $\sigma_{11}$ и может играть существенную роль при формировании пластической зоны, предшествующей началу разделения. Кроме того, отношение $\dfrac{\sigma_{22}}{\sigma_{11}}$ для дискретной рассматриваемой модели существенно зависит от коэффициента Пуассона.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 06-01-00047 и № 07-01-96402).

г. Тула
Поступила: 18 января 2008 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бриджмен, П.* Исследование больших пластических деформаций и разрыва /П. Бриджмен – М. : ИЛ, 1955. – 444 с.

2. *Глаголев, В. В.* Модель процесса разделения деформируемого тела / В. В. Глаголев, К. А. Кузнецов, А. А. Маркин // Известия РАН. МТТ. – 2003. – № 6. – С. 61-68.

3. *Глаголев, В. В* Модель установившегося разделения материального слоя / В. В. Глаголев, А. А. Маркин // Известия РАН. МТТ. – 2004. – № 5. – С. 121-129.

4. *Глаголев, В. В.* Об одном способе определения связей между критическими значениями характеристик процесса установившегося разделения материала / В. В. Глаголев, А. А. Маркин // Проблемы прочности. – 2006. – №2. – С. 47-58.

5. *Глаголев, В. В.* Оценка толщины слоя взаимодействия как универсального параметра материала / В. В. Глаголев, А. А. Маркин // Известия РАН. МТТ. – 2006. – №5. – С. 177-186.

6. *Ентов, В. М.* К модели хрупкого разрушения Прандтля / В. М. Ентов, Р. Л. Салганик // Изв. АН СССР. МТТ. – 1968. – № 6. – С. 87-99.

7. *Качанов, Л. М.* Основы механики разрушения /Л. М. Качанов – М. : Наука, 1974. – 312 с.

8. *Крауч, С.* Методы граничных элементов в механике твердого тела / С. Крауч, А. Старфилд : Пер. с. англ. – М. : Мир, 1987. – 328 с.

9. *Новожилов, В. В.* О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности /В. В. Новожилов // ПММ. – 1969. – № 2. – С. 212-222.

10. *Фридман, Я. Б.* Механические свойства металлов. – Ч. 1. Деформация и разрушение / Я. Б. Фидман – М. : Машиностроение, 1974. – 472 с.

11. *Черепанов, Г. П.* Механика хрупкого разрушения / Г. П. Черепанов– М. : Наука, 1974.– 640 с.

12. *Griffith, A. A.* The theory of rupture / A. A. Griffith // In: Proc. 1st Int. Congr. Appl. Mech. – Delft. – 1924. – P. 55-63.

13. *Irwin, G. R.* Analysis of stresses and stain near the end of a crack traversing a plate / G. R. Irvin // J. Appl. Mech. 1958. – V. 24. –¹ 3. – P. 361-364. (Discussion // J. Appl. Mech. / 1958. – V. 25. – ¹ 2. – P. 299-303).

14. *Matvienko, Yu. G.* Some problems in linear and non-linear fracture mechanics / Yu. G. Matvienko, E. M. Morozov // Engineering Fracture Mechanics. – 1987. – V.62. – P. 127-138.

15. *Orowan, E. O.* Proc. Symposium on internal stresses in metals and allows / E. O. Orowan – London : Institut of Metals, 1948 – p.451.

16. *Prandtl, L.* Ein Gedankenmodell für den Zerreibvorgand spröder Körper / L. Prandtl ZAMM Bd. 13. – 1933. – S. 129-133.

17. *Rice J. R.* The elastic-plastic mechanics of crack extension / J. R. Rice // Int. J. Fracture Mech. – 1968. – V. 4. – ¹ 1. – P. 41-47