ВЕСТНИК ЧГПУ
им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
МЕХАНИКА
ПРЕДЕЛЬНОГО
СОСТОЯНИЯ
№ 2 • 2008

Гоцев Д. В., Спорыхин А. Н., Стасюк А. Н.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ВЫРАБОТОК НЕКРУГОВОЙ ФОРМЫ ПРИ СОВМЕСТНОМ РАСЧЕТЕ КРЕПИ И МАССИВА ГОРНЫХ ПОРОД

(Воронежский государственный университет)

Известно, что решение задач горной механики, относящихся к процессам проведения и охраны подземных выработок, бурения нефтяных и газовых скважин, сводится к постановке и решению задач устойчивости массива и крепи при неупругих деформациях [2-6, 8, 10]. Эта задача разделяется на два этапа: первый – заключается в совместном определении напряженно-деформированного состояния (НДС) горного массива в приконтурной области и крепи выработки, имеющей в поперечном сечении форму эллипса или правильного многоугольника, второй – в решении самой линеаризированной задачи устойчивости, т. е. в определении критической величины давления, равномерно распределенного по внутреннему контуру крепи. В отличие от [4, 5] в настоящей работе на основе точных трехмерных уравнений [6] исследуется локальная неустойчивость пород приствольной зоны вертикальной выработки и крепи с учетом ее многослойности и некруговой формы поперечного сечения.

Исследуем потерю устойчивости вертикальной выработки и ее многослойной крепи, *i*-ый слой которой в поперечном сечении имеет форму эллипса или правильного многоугольника. Материал массива и слоев крепи предполагается различным и моделируется упруго-вязко-пластической средой [10] с трансляционным упрочнением [1,7].

В этом случае функция нагружения имеет вид

$$F = \left(S_s^j - c_i e_s^{j p} - h_i e_s^{j p} \right)\left(S_j^s - c_i e_j^{s p} - h_i e_j^{s p} \right) - k_i^{\,2}, \tag{1}$$

а соотношения ассоциированного закона течения –

$$de_i^{j p} = dl \, \frac{\partial F}{\partial s_i^{j}} \, . \tag{2}$$

Здесь c_i –коэффициент упрочнения; k_i– предел текучести, h_i – коэффициент вязкости; $S_s^j = s_s^j - s d_s^j$ – девиатор тензора напряжений; $s = s_k^k/3$; d_s^j – символ Кронекера; e_s^j – компоненты тензора деформаций; e_s^j – компоненты тензора скоростей деформаций; dl – скалярный положительный множитель. Индексы *s, j* принимают значения от 1 до 3. Индекс *i* принимает значения 0,1, 2,…, N. Равенство нулю индекса *i* у величин *c, k, h* в (1), (2) и далее, подчеркивает принадлежность этих величин к массиву, при $i \neq 0$– принадлежность к *i*-му слою По повторяющимся индексам проводится суммирование. Здесь и далее верхние индексы «*p*» или «*e*» обозначают величины, относящиеся к пластической или упругой областям соответственно.

Определение НДС массива и многослойной крепи горной выработки сводится к решению двух взаимосвязанных задач о концентрации напряжений. Первая задача сводится к определению НДС в ***i***- ом слое крепи, вторая – к определению НДС в массиве горных пород.

При определении НДС все функции представляются в виде рядов по степеням малого параметра d, характеризующего отклонение от исходного невозмущенного состояния, то есть отклонение окружности радиуса a_i от правильного многоугольника радиуса [7]

$$r_{mi} = a_i(1 + d\,d_i \cos m_i q - \frac{2m_i - 1}{4} d^2 d_i^2 (1 - \cos 2m_i q) + o(d^3)), \tag{3}$$

где $d\, d_i$ – параметр, определяющийся полуосями эллипса (m_i=2): $a_i(1+\partial d)$, $a_i(1-\partial d)$) или параметрами гипоциклоиды в случае $m_i \neq 2$. Здесь и далее $0 \le q \le 2p$. В качестве нулевого приближения выбирается решение осесимметричной задачи о распределении полей напряжений и перемещений в массиве около подкрепленной круговой вертикальной выработки и в многослойной круговой крепи.

1. Рассмотрим горный массив с круговой вертикальной выработкой радиуса a_0, подкрепленной с некоторым натягом круговой *N*-слойной крепью (каждый последующий слой крепи с некоторым натягом помещается в предыдущий, a_i – внутренний радиус ***i***-ого слоя, b_i – внешний радиус ***i***-ого слоя). К внутреннему контуру N-ого слоя крепи радиуса a_N приложена равномерно распределенная нагрузка q_N. На линиях сопряжения слоев крепи и массива возникают сжимающие усилия $q_0, q_1, \ldots, q_{N-1}$. На бесконечности напряжения в массиве стремятся в величине gh (g – объемный вес породы, h – глубина заложения выработки), т. е. начальное напряженное состояние в массиве (до проведения выработки) принимается гидростатическим. Величины q_i (*i*=0,1,2,…, N) и gh таковы, что образовавшиеся пластические области полностью охватывают внутренние контуры слоев крепи и контур выработки. Решение проведем в рамках плоской задачи теории течения используя цилиндрическую систему координат r, q, z для случая установившегося течения. Граничные условия и условия сопряжения для ***i***-го слоя крепи и массива горных пород имеют соответственно вид

$$\begin{gathered} s_{ri}\big|_{r=a_i} = s_{ri}\big|_{r=b_{i+1}} = -q_i \qquad (i=0,1,2,\ldots,N-1), \\ s_{r0}\big|_{r\to\infty} = -gh,\ s_{rN}\big|_{r=a_N} = -q_N, \\ [s_{ri}]\big|_{r=g_i} = 0, [s_{qi}]\big|_{r=g_i} = 0 \qquad (i=0,1,2,\ldots,N), \end{gathered} \tag{4}$$

где квадратные скобки обозначают разрыв значений выражения, в данном случае – на границе g_i раздела сред упругого и пластического деформирования.

НДС, соответствующее ***i***-ому слою круговой крепи (*i*=1,2,…, N) при установившемся движении, определено в виде:

– в пластической области ($a_i < r < g_i$) распределение напряжений имеет вид

$$s_{ri} = -q_i + \frac{4m_i c_i k_i}{c_i + 2m_i}(\ln\frac{r}{a_i} + \frac{c_i D_i}{2c_i k_i}(\frac{1}{a_i^2} - \frac{1}{r^2})),$$

$$s_{qi} = -q_i + \frac{4m_i c_i k_i}{c_i + 2m_i}(\ln\frac{r}{a_i} + 1 + \frac{c_i D_i}{2c_i k_i}(\frac{1}{a_i^2} + \frac{1}{r^2})); \quad (5)$$

– в упругой области $(g_i < r < b_i)$ поле напряжений имеет вид

$$s_{ri} = -q_{i-1} + 2m_i D_i(\frac{1}{b_i^2} - \frac{1}{r^2}),\ s_{qi} = -q_{i-1} + 2m_i D_i(\frac{1}{b_i^2} + \frac{1}{r^2}), \quad (6)$$

где m_i – модуль сдвига для i-ого слоя крепи, $D_i = \frac{c_i k_i}{2m_i} g_i^{\,2}$, $c_i = \mathrm{sign}(q_{i-1} - q_i)$.

Перемещения (u – вдоль радиального направления) и полные деформации в упругой и пластической областях определяются формулам и

$$u_i = \frac{D_i}{r},\ e_{ri} = -e_{\theta i} = -\frac{D_i}{r^2}. \quad (7)$$

Пластические деформации определяются соотношением

$$e_{ri}^{p} = -e_{qi}^{p} = \frac{c_i k_i}{c_i + 2m_i}(1 - \frac{g_i^{\,2}}{r^2}). \quad (8)$$

НДС горного массива возле круговой выработки определено в виде:

– в пластической области $(1 < r < g_0)$ распределение напряжений имеет вид

$$s_{r0} = -q_0 + \frac{4m_0 c_0 k_0}{c_0 + 2m_0}(\ln\frac{r}{a_0} + \frac{c_0 D_0}{2c_0 k_0}(\frac{1}{a_0^2} - \frac{1}{r^2})),$$

$$s_{q0} = -q_0 + \frac{4m_0 c_0 k_0}{c_0 + 2m_0}(\ln\frac{r}{a_0} + 1 + \frac{c_0 D_0}{2c_0 k_0}(\frac{1}{a_0^2} + \frac{1}{r^2})); \quad (9)$$

– в упругой области $(g_0 < r < \infty)$ поле напряжений согласно [11] имеет вид

$$s_{r0} = -gh - \frac{2m_0 D_0}{r^2},\ s_{q0} = -gh + \frac{2m_0 D_0}{r^2}, \quad (10)$$

где m_0 – модуль сдвига для материала массива, $D_0 = \frac{c_0 k_0}{2m_0} g_0^{\,2}$, $c_0 = \mathrm{sign}(q_0 - gh)$.

Перемещения и полные деформации в упругой и пластической областях, а так же пластические деформации определяются по формулам (7), (8), где надо положить i=0. Для поиска неизвестных констант интегрирования D_i (i=0, 1,… N), контактных нагрузок q_i (i=0, 1,… N–1) и радиусов упруго-пластических границ g_i (i=0, 1,… N) используются условия совместного деформирования слоев крепи и массива

$$\frac{1}{a_i} D_i - \frac{1}{b_{i+1}} D_{i+1} = b_{i+1} - a_i, \quad (11)$$

(i=0,1,2,…, N–1), которые рассматриваются в совокупности с условиями (4).

В (5) – (10) все величины, имеющие размерность напряжений, отнесены к пределу текучести для материала горного массива – k_0, а имеющие размерность длины – к радиусу выработки a_0 , т.е. k_0=1, a_0 =1.

Полученные решения для массива и крепи принимаются в качестве нулевого приближения для исследуемых далее задач.

2. Далее рассмотрим задачу об определении полей напряжений и перемещений для области: а) массива около вертикальной подкрепленной выработки с поперечным сечением близким к правильному многоугольнику (или эллипсу) и б) многослойной крепи, состоящей из N слоев, поперечные сечения которых имеют форму колец (внешний и внутренний контур близки по форме к правильному m-угольнику или эллипсу). Ограничимся случаем первого приближения первой итерации.

Граничные условия на нормальные s_{ni} и касательные s_{ni} напряжения для i-го слоя крепи ($r_{m(i-1)}$ – внутренний радиус i-ого слоя, r_{mi} – внешний радиус) согласно [7] имеют соответственно вид

$$s_{ri}^{(1)}\Big|_{r=a_i} = -2A_i d_i \cos m_i q \ , \qquad (12)$$

$$t_{rq\,i}^{(1)}\Big|_{r=a_i} = -2m_i A_i d_i \sin m_i q \ ,$$

где $\quad A_i = \dfrac{2m_i c_i k_i}{c_i + 2m_i}\left(1+\dfrac{c_i D_i}{c_i k_i}\dfrac{1}{a_i^2}\right)$.

Тогда напряжения в пластической зоне с учетом (12) будут иметь вид

$$s_{ri}^{(1)}(r,q) = \frac{2A_i a_i d_i}{r}\left(\sqrt{m_i^2-1}\cdot\sin b_i(r) - \cos b_i(r)\right)\cos m_i q - \frac{F_i}{2}\left(g_i^2\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{a_i^2}\right)+2\ln\frac{r}{a_i}\right),$$

$$s_{qi}^{(1)}(r,q) = \frac{2A_i a_i d_i}{r}\left(\sqrt{m_i^2-1}\cdot\sin b_i(r) - \cos b_i(r)\right)\cos m_i q - \frac{F_i}{2}\left(-g_i^2\left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{a_i^2}\right)+2\ln\frac{r}{a_i}+2\right), \qquad (13)$$

$$t_{rq\,i}^{(1)}(r,q) = -\frac{2m_i A_i a_i d_i}{r}\cos b_i(r)\sin m_i q .$$

Здесь $b_i(r) = \sqrt{m_i^2-1}\cdot\ln\dfrac{r}{a_i}$, $F_i = \dfrac{2c_i k_i c_i}{c_i + 2m_i}$.

Эти соотношения будут справедливы и для пластической области массива, если в них положить i=0.

По условию сопряжения напряжений на упругопластической границе g_i ,следуя [11] получим граничные условия для напряжений в упругой зоне i-ого слоя крепи на ее внутренней границе

$$s_{ri}^{(1)}\Big|_{r=g_i} = a_{oi}F_i - a_{1i}d_i\cos m_i q \ , \qquad t_{rq\,i}^{(1)}\Big|_{r=g_i} = -a_{2i}d_i\sin m_i q \ ,$$

где

$$b_{0i} = \sqrt{m_i^2-1}\cdot\ln\frac{g_i}{a_i}, \ a_{oi} = -\frac{1}{2}\left(1-\frac{g_i}{a_i^2}+2\ln\frac{g_i}{a_i}\right), \qquad (14)$$

$$a_{1i} = -\frac{2A_i a_i}{g_i}(\sqrt{m_i^2-1}\cdot\sin b_{0i} - \cos b_{0i}),\quad a_{2i} = \frac{2m_i A_i a_i}{g_i}\cos b_{0i}.$$

На внешней границе области упругого деформирования i-ого слоя будут иметь место следующие граничные условия

$$s_{ri}^{(1)}\Big|_{r=b_i} = -2B_i d_i \cos m_i q,\qquad t_{rqi}^{(1)}\Big|_{r=b_i} = -2B_i m_i d_i \sin m_i q, \tag{15}$$

где $B_i = \frac{2m_i D_i}{b_i^2}$.

Используя (14) и (15), согласно [8] определим первые итерации первых приближений напряжений и перемещений в упругой области, разделив их на 2 части – найденные по условиям на внутренней границе (верхний индекс (g)) и на внешней границе(верхний индекс (b))

$$\begin{aligned}
&s_{ri}^{(1)} = s_{ri}^{(g)} + s_{ri}^{(b)},\ s_{qi}^{(1)} = s_{qi}^{(g)} + s_{qi}^{(b)},\ t_{rqi}^{(1)} = t_{rqi}^{(g)} + t_{rqi}^{(b)},\\
&u_{ri}^{(1)} = u_{ri}^{(g)} + u_{ri}^{(b)},\ u_{qi}^{(1)} = u_{qi}^{(g)} + u_{qi}^{(b)},
\end{aligned}\tag{16}$$

– внутренние составляющие напряжений

$$\begin{aligned}
s_{ri}^{(g)} = {}&\frac{g_i^2}{b_i^2-g_i^2}\Big(-a_{oi}F_i + a_o F_i\frac{b_i^2}{r^2}\Big) - \frac{1}{2N_i}\{\{m_i[(m_i-1)-m_i(\frac{b_i}{g_i})^2+(\frac{b_i}{g_i})^{-2m_i}](\frac{r}{g_i})^{m_i-2}+\\
&+m_i[(m_i+1)-m_i(\frac{b_i}{g_i})^2-(\frac{b_i}{g_i})^{2m_i}](\frac{r}{g_i})^{-(m_i+2)}+(m_i-2)[(m_i+1)-m_i(\frac{b_i}{g_i})^{-2}-(\frac{b_i}{g_i})^{-2m_i}](\frac{r}{g_i})^{m_i}+\\
&+(m_i+2)[(m_i-1)-m_i(\frac{b_i}{g_i})^{-2}+(\frac{b_i}{g_i})^{2m_i}](\frac{r}{g_i})^{-m_i}\}a_{1i}+\\
&+\{[-(m_i-1)(m_i+2)+m_i^2(\frac{b_i}{g_i})^2+(m_i-2)(\frac{b_i}{g_i})^{-2m_i}](\frac{r}{g_i})^{m_i-2}+\\
&+[(m_i-2)(m_i+1)-m_i^2(\frac{b_i}{g_i})^2+(m_i+2)(\frac{b_i}{g_i})^{2m_i}](\frac{r}{g_i})^{-(m_i+2)}+[-(m_i-2)(m_i+1)+\\
&+(m_i^2-4)(\frac{b_i}{g_i})^{-2}-(m_i-2)(\frac{b_i}{g_i})^{-2m_i}](\frac{r}{g_i})^{m_i}+[(m_i-1)(m_i+2)-(m_i^2-4)(\frac{b_i}{g_i})^{-2}-\\
&-(m_i+2)(\frac{b_i}{g_i})^{2m_i}](\frac{r}{g_i})^{-m_i}\}a_{2i}\}d_i\cos m_i q,
\end{aligned}\tag{17}$$

$$\begin{aligned}
s_{qi}^{(g)} = {}&\frac{g_i^2}{b_i^2-g_i^2}\Big(-a_{oi}F_i - a_{oi}F_i\frac{b_i^2}{r^2}\Big) - \frac{1}{2N_i}\{\{m_i[-(m_i-1)+m_i(\frac{b_i}{g_i})^2-(\frac{b_i}{g_i})^{-2m_i}](\frac{r}{g_i})^{m_i-2}+\\
&+m_i[-(m_i+1)+m_i(\frac{b_i}{g_i})^2+(\frac{b_i}{g_i})^{2m_i}](\frac{r}{g_i})^{-(m_i+2)}+(m_i+2)[-(m_i+1)+m_i(\frac{b_i}{g_i})^{-2}+(\frac{b_i}{g_i})^{-2m_i}](\frac{r}{g_i})^{m_i}+\\
&+(m_i-2)[-(m_i-1)+m_i(\frac{b_i}{g_i})^{-2}-(\frac{b_i}{g_i})^{2m_i}](\frac{r}{g_i})^{-m_i}\}a_{1i}+\{[(m_i-1)(m_i+2)-m_i^2(\frac{b_i}{g_i})^2-\\
&-(m_i-2)(\frac{b_i}{g_i})^{-2m_i}](\frac{r}{g_i})^{m_i-2}+[-(m_i-2)(m_i+1)+m_i^2(\frac{b_i}{g_i})^2-(m_i+2)(\frac{b_i}{g_i})^{2m_i}](\frac{r}{g_i})^{-(m_i+2)}+
\end{aligned}$$

$$+[(m_i+1)(m_i+2)-(m_i+2)^2(\frac{b_i}{g_i})^{-2}+(m_i+2)(\frac{b_i}{g_i})^{-2m_i}](\frac{r}{g_i})^{m_i}+[-(m_i-1)(m_i-2)+(m_i-2)^2(\frac{b_i}{g_i})^{-2}+$$

$$+(m_i-2)(\frac{b_i}{g_i})^{2m_i}](\frac{r}{g_i})^{-m_i}\}a_{2i}\}d_i\cos m_i q,$$

$$t_{rq\,i}^{(g)}=-\frac{1}{2N_i}\{[m_i(-(m_i-1)+m_i(\frac{b_i}{g_i})^2-(\frac{b_i}{g_i})^{-2m_i})(\frac{r}{g_i})^{m_i-2}+m_i((m_i+1)-m_i(\frac{b_i}{g_i})^2-$$

$$-(\frac{b_i}{g_i})^{2m_i})(\frac{r}{g_i})^{-(m_i+2)}+m_i(-(m_i+1)+m_i(\frac{b_i}{g_i})^{-2}+(\frac{b_i}{g_i})^{-2m_i})(\frac{r}{g_i})^{m_i}+m_i((m_i-1)-$$

$$-m_i(\frac{b_i}{g_i})^{-2}+(\frac{b_i}{g_i})^{2m_i})(\frac{r}{g_i})^{-m_i})]a_{1i}+[((m_i-1)(m_i+2)-m_i^2(\frac{b_i}{g_i})^2-$$

$$-(m_i-2)(\frac{b_i}{g_i})^{-2m_i})(\frac{r}{g_i})^{m_i-2}+((m_i-2)(m_i+1)-m_i^2(\frac{b_i}{g_i})^2+(m_i+2)(\frac{b_i}{g_i})^{2m_i})(\frac{r}{g_i})^{-(m_i+2)}+$$

$$+(m_i(m_i+1)-m_i(m_i+2)(\frac{b_i}{g_i})^{-2}+m_i(\frac{b_i}{g_i})^{-2m_i})(\frac{r}{g_i})^{m_i}+(m_i(m_i-1)-m_i(m_i-2)(\frac{b_i}{g_i})^{-2}-$$

$$-m_i(\frac{b_i}{g_i})^{2m_i})(\frac{r}{g_i})^{-m_i}]a_{2i}\}d_i\sin m_i q;$$

– внешние составляющие напряжений

$$s_{ri}^{(b)}=-\frac{1}{N_i}\{m_i[-(m_i-1)(m_i+1)+m_i(m_i-1)(\frac{b_i}{g_i})^{-2}+(m_i-1)(\frac{b_i}{g_i})^{2m_i}](\frac{r}{b_i})^{m_i-2}+$$

$$+m_i[(m_i+1)(m_i-1)-m_i(m_i+1)(\frac{b_i}{g_i})^{-2}+(m_i+1)(\frac{b_i}{g_i})^{-2m_i}](\frac{r}{b_i})^{-(m_i+2)}+$$

$$+(m_i-2)[-(m_i-1)(m_i+1)+m_i(m_i+1)(\frac{b_i}{g_i})^2-(m_i+1)(\frac{b_i}{g_i})^{2m_i}](\frac{r}{b_i})^{m_i}+$$

$$+(m_i+2)[(m_i-1)(m_i+1)-m_i(m_i-1)(\frac{b_i}{g_i})^2-(m_i-1)(\frac{b_i}{g_i})^{-2m_i}](\frac{r}{b_i})^{-m_i}\}B_i d_i\cos m_i q,$$

(18)

$$s_{q\,i}^{(b)}=-\frac{1}{N_i}\{m_i(m_i-1)[(m_i+1)-m_i(\frac{b_i}{g_i})^{-2}-(\frac{b_i}{g_i})^{2m_i}](\frac{r}{b_i})^{m_i-2}+m_i(m_i+1)[-(m_i-1)+m_i(\frac{b_i}{g_i})^{-2}-$$

$$-(\frac{b_i}{g_i})^{-2m_i}](\frac{r}{b_i})^{-(m_i+2)}+(m_i+1)(m_i+2)[(m_i-1)-m_i(\frac{b_i}{g_i})^2+(\frac{b_i}{g_i})^{2m_i}](\frac{r}{b_i})^{m_i}+$$

$$+(m_i-2)(m_i-1)[-(m_i+1)+m_i(\frac{b_i}{g_i})^2+(\frac{b_i}{g_i})^{-2m_i}](\frac{r}{b_i})^{-m_i}\}B_i d_i\cos m_i q,$$

$$t_{rq\,i}^{(b)}=-\frac{m_i}{N_i}\{(m_i-1)[(m_i+1)-m_i(\frac{b_i}{g_i})^{-2}-(\frac{b_i}{g_i})^{2m_i}](\frac{r}{b_i})^{m_i-2}+(m_i+1)[(m_i-1)-m_i(\frac{b_i}{g_i})^{-2}+$$

$$+(\frac{b_i}{g_i})^{-2m_i}](\frac{r}{b_i})^{-(m_i+2)}+(m_i+1)[(m_i-1)-m_i(\frac{b_i}{g_i})^2+(\frac{b_i}{g_i})^{2m_i}](\frac{r}{b_i})^{m_i}+(m_i-1)[(m_i+1)-$$

$$-m_i(\frac{b_i}{g_i})^2-(\frac{b_i}{g_i})^{-2m_i}](\frac{r}{b_i})^{-m_i}\}B_i d_i \sin m_i q\ ,$$

здесь $N_i=2(m_i^{\,2}-1)-m_i^{\,2}\dfrac{b_i^4+g_i^{\,4}}{b_i^2 g_i^{\,2}}+\dfrac{b_i^{4m_i}+g_i^{\,4m_i}}{b_i^{2m_i}g_i^{\,2m_i}}$;

– внутренние составляющие перемещений

$$u_{ri}^{(g)}=\frac{-g_i^{\,2}}{6m_i(b_i^2-g_i^{\,2})}[a_{0i}F_i+3a_{0i}F_i\frac{b_i^{\,2}}{r^2}]r-\frac{1}{3m_i}[-\frac{3}{2}m_iC_{1i}^{(g)}(\frac{r}{b_i})^{m_i-1}+\frac{3}{2}m_iC_{2i}^{(g)}(\frac{r}{b_i})^{-(m_i+1)}-$$
$$-(\frac{3}{2}m_i-1)C_{3i}^{(g)}(\frac{r}{b_i})^{m_i+1}+(\frac{3}{2}m_i+1)C_{4i}^{(g)}(\frac{r}{b_i})^{-(m_i-1)}]b_i d_i\cos m_i q,$$
$$u_{qi}^{(g)}=-\frac{1}{3m}[\frac{3}{2}m_iC_{1i}^{(g)}(\frac{r}{b_i})^{m_i-1}+\frac{3}{2}m_iC_{2i}^{(g)}(\frac{r}{b_i})^{-(m_i+1)}+(\frac{3}{2}m_i+4)C_{3i}^{(g)}(\frac{r}{b_i})^{m_i+1}+\tag{19}$$
$$+(\frac{3}{2}m_i-4)C_{4i}^{(g)}(\frac{r}{b_i})^{-(m_i-1)}]b_i d_i\sin m_i q;$$

– внешние составляющие перемещений

$$u_{ri}^{(b)}=-\frac{1}{3m_i}[-\frac{3}{2}m_iC_{1i}^{(b)}(\frac{r}{b_i})^{m_i-1}+\frac{3}{2}m_iC_{2i}^{(b)}(\frac{r}{b_i})^{-(m_i+1)}-(\frac{3}{2}m_i-1)C_{3i}^{(b)}(\frac{r}{b_i})^{m_i+1}+$$
$$+(\frac{3}{2}m_i+1)C_{4i}^{(b)}(\frac{r}{b_i})^{-(m_i-1)}]b_i d_i\cos m_i q,$$
$$u_{qi}^{(b)}=-\frac{1}{3m_i}[\frac{3}{2}m_iC_{1i}^{(b)}(\frac{r}{b_i})^{m_i-1}+\frac{3}{2}m_iC_{2i}^{(b)}(\frac{r}{b_i})^{-(m_i+1)}+(\frac{3}{2}m_i+4)C_{3i}^{(b)}(\frac{r}{b_i})^{m_i+1}+\tag{20}$$
$$+(\frac{3}{2}m_i-4)C_{4i}^{(b)}(\frac{r}{b_i})^{-(m_i-1)}]b_i d_i\sin m_i q;$$

здесь

$$C_{1i}^{(g)}=\frac{-(m_i-1)+m_i(\frac{b_i}{g_i})^2-(\frac{b_i}{g_i})^{-2m_i}}{2(m_i-1)N_i}(\frac{b_i}{g_i})^{-(m_i-2)}a_{1i}+\frac{(m_i-1)(m_i+2)-m_i^{\,2}(\frac{b_i}{g_i})^2-(m_i-2)(\frac{b_i}{g_i})^{-2m_i}}{2m_i(m_i-1)N_i}(\frac{b_i}{g_i})^{m_i-2}a_{2i},$$
$$C_{2i}^{(g)}=\frac{-(m_i+1)+m_i(\frac{b_i}{g_i})^2+(\frac{b_i}{g_i})^{2m_i}}{2(m+1)N_i}(\frac{b_i}{g_i})^{-(m_i+2)}a_{1i}+\frac{-(m_i-2)(m_i+1)+m_i^{\,2}(\frac{b_i}{g_i})^2-(m_i+2)(\frac{b_i}{g_i})^{2m_i}}{2m_i(m_i+1)N_i}(\frac{b_i}{g_i})^{-(m_i+2)}a_{2i},$$
$$C_{3i}^{(g)}=\frac{-(m_i+1)+m_i(\frac{b_i}{g_i})^{-2}+(\frac{b_i}{g_i})^{-2m_i}}{2(m_i+1)N_i}(\frac{b_i}{g_i})^{m_i}a_{1i}+\frac{(m_i+1)-(m_i+2)(\frac{b_i}{g_i})^{-2}+(\frac{b_i}{g_i})^{-2m_i}}{2m_i(m_i+1)N_i}(\frac{b_i}{g_i})^{m_i}a_{2i},$$
$$C_{4i}^{(g)}=\frac{-(m_i-1)+m_i(\frac{b_i}{g_i})^{-2}-(\frac{b_i}{g_i})^{2m_i}}{2(m_i-1)N_i}(\frac{b_i}{g_i})^{-m_i}a_{1i}+\frac{-(m_i-1)+(m_i-2)(\frac{b_i}{g_i})^{-2}+(\frac{b_i}{g_i})^{2m_i}}{2(m_i-1)N_i}(\frac{b_i}{g_i})^{-m_i}a_{2i},$$

$$C_{1i}^{(b)}=\frac{-(m_i-1)+m_i(\frac{b_i}{g_i})^{-2}-(\frac{b_i}{g_i})^{2m_i}}{2(m_i-1)N_i}2B_i+\frac{(m_i-1)(m_i+2)-m_i^2(\frac{b_i}{g_i})^{-2}-(m_i-2)(\frac{b_i}{g_i})^{2m_i}}{2m_i(m_i-1)N_i}2m_iB_i,$$

$$C_{2i}^{(b)}=\frac{-(m_i+1)+m_i(\frac{b_i}{g_i})^{-2}+(\frac{b_i}{g_i})^{-2m_i}}{2(m_i+1)N_i}2B_i+\frac{-(m_i-2)(m_i+1)+m_i^2(\frac{b_i}{g_i})^{-2}-(m_i+2)(\frac{b_i}{g_i})^{-2m_i}}{2m_i(m_i-1)N_i}2m_iB_i,$$

$$C_{3i}^{(b)}=\frac{-(m_i+1)+m_i(\frac{b_i}{g_i})^{2}+(\frac{b_i}{g_i})^{2m_i}}{2(m_i+1)N_i}2B_i+\frac{(m_i+1)-(m_i+2)(\frac{b_i}{g_i})^{2}+(\frac{b_i}{g_i})^{2m_i}}{2(m_i-1)N_i}2m_iB_i,$$

$$C_{4i}^{(b)}=\frac{-(m_i-1)+m_i(\frac{b_i}{g_i})^{2}-(\frac{b_i}{g_i})^{-2m_i}}{2(m_i-1)N_i}2B_i+\frac{-(m_i-1)+(m_i-2)(\frac{b_i}{g_i})^{2}+(\frac{b_i}{g_i})^{-2m_i}}{2(m_i-1)N_i}2m_iB_i\,.$$

Граница раздела упругой и пластической областей, согласно [11] определяется в виде

$$g_i^{(1)}=-\frac{[s_{qi}^{(1)}]\big|_{r=g_i}}{[\frac{ds_{qi}}{dr}]\Big|_{r=g_i}}, \tag{21}$$

где $[\frac{ds_{qi}}{dr}]\Big|_{r=g_i}=\frac{4m_ic_ik_i}{c_i+2m_i}\frac{1}{g_i}(1+\frac{2m_iD_i}{c_ik_i}\frac{1}{g_i^2})$,

$$\begin{aligned}
&[s_{qi}^{(1)}]\big|_{r=g_i}=\frac{2A_ia_id_i}{g_i}(\sqrt{m_i^2-1}\cdot\sin b_i(g_i)-\cos b_i(g_i))\cos m_iq-\frac{F_i}{2}(-\frac{g_i^2}{a_i^2}+2\ln\frac{g_i}{a_i}+1)-\\
&+\frac{b_i^2+g_i^2}{b_i^2-g_i^2}a_{oi}F_i+\frac{1}{2N_i}\{\{-4m_i^2-4+2m_i^2((\frac{b_i}{g_i})^2+(\frac{b_i}{g_i})^{-2})+2((\frac{b_i}{g_i})^{2m_i}+(\frac{b_i}{g_i})^{-2m_i})\}a_{1i}+\\
&+\{8m_i-8m_i(\frac{b_i}{g_i})^{-2}+4(\frac{b_i}{g_i})^{-2m_i}-4(\frac{b_i}{g_i})^{2m_i}\}a_{2i}\}d_i\cos m_iq+\\
&+\frac{1}{N_i}\{-4(m_i+1)m_i(\frac{b_i}{g_i})^{-m_i+2}+4m_i(m_i-1)(\frac{b_i}{g_i})^{-m_i}+2(m_i+1)(m_i+2)(\frac{b_i}{g_i})^{m_i}-\\
&-2(m_i-1)m_i(\frac{b_i}{g_i})^{m_i+2}\}B_id_i\cos m_iq\,.
\end{aligned} \tag{22}$$

Таким образом, соотношения (13), (16) – (22) определяют НДС и положение упругопластической границы и в i-ом слое крепи (i=1, 2,…, N), правильной многоугольной формы поперечного сечения.

НДС массива в окрестности вертикальной выработки многоугольного поперечного сечения будем определять так же в рамках [7].

Граничные условия для напряжений в упругой зоне массива на ее внутренней границе будут иметь вид (14), если в них положить i=0. На внешней границе области упругого деформирования массива при $r \to \infty$ будут иметь место следующие граничные условия

$$s_r^{(1)}\Big|_{r\to\infty} = 0\,,\; t_{rq}^{(1)}\Big|_{r\to\infty} = 0\,. \tag{23}$$

Первые итерации первых приближений напряжений и перемещений в упругой области массива представимы в виде (16) (надо положить *i*=0) и согласно [9] определяются соотношениями

$$s_r^{(g)} = a_{00}B_0\frac{g_0^{\,2}}{r^2} - \frac{1}{2}\{[-m_0(\frac{g_0}{r})^{m_0+2} + (m_0+2)(\frac{g_0}{r})^{m_0}]a_{10} + [(m_0+2)(\frac{g_0}{r})^{m_0+2} - (m_0+2)(\frac{g_0}{r})^{m_0}]a_{20}\}\cos m_0 q\,,$$

$$\sigma_q^{(g)} = -a_{00}B_0\frac{g_0^{\,2}}{r^2} - \frac{1}{2}\{[m_0(\frac{g_0}{r})^{m_0+2} - (m_0-2)(\frac{g_0}{r})^{m_0}]a_{10} + [-(m_0+2)(\frac{g_0}{r})^{m_0+2} + (m_0-2)(\frac{g_0}{r})^{m_0}]a_{20}\}\cos m_0 q\,,$$

$$t_{rq}^{(g)} = -\frac{1}{2}\{[-m_0(\frac{g_0}{r})^{m_0+2} + m_0(\frac{g_0}{r})^{m_0}]a_{10} + [(m_0+2)(\frac{g_0}{r})^{m_0+2} - m_0(\frac{g_0}{r})^{m_0}]a_{20}\}\sin m_0 q\,,$$

$$s_r^{(b)} = 0\,,\; s_q^{(b)} = 0\,,\; t_{rq}^{(b)} = 0\,, \tag{24}$$

$$u_r^{(g)} = -\frac{a_{00}B_0}{2m_0}\frac{g_0^{\,2}}{r} - \frac{1}{3m_0}[(\frac{g_0}{r})^3(\frac{1}{2}a_{10} - a_{20}) - 2\frac{g_0}{r}(a_{10} - a_{20})]g_0 d_0\cos m_0 q\,,$$

$$u_q^{(g)} = -\frac{1}{3m_0}[(\frac{g_0}{r})^3(\frac{1}{2}a_{10} - a_{20}) + \frac{1}{2}\frac{g_0}{r}(a_{10} - a_{20})]g_0 d_0\sin m_0 q\,,$$

$$u_r^{(b)} = 0\,,\; u_q^{(b)} = 0 \tag{25}$$

Радиус упругопластической границы находится по формуле (21), где надо положить $i = 0$ и

$$[\frac{ds_{q0}}{dr}]\Big|_{r=g_0} = \frac{4m_0c_0k_0}{c_0+2m_0}\frac{1}{g_0}(1+\frac{2m_0D_0}{c_0k_0}\frac{1}{g_0^{\,2}})\,,$$

$$\begin{gathered}[s_{q0}^{(1)}]\Big|_{r=g_0} = \frac{2A_0a_0d_0}{g_0}(\sqrt{m_0^{\,2}-1}\cdot\sin b_0(g_0) - \cos b_0(g_0))\cos m_0 q - \\ -\frac{F_0}{2}(-\frac{g_0^{\,2}}{a_0^{\,2}} + 2\ln\frac{g_0}{a_0} + 1) + a_0F_0 + \{a_{10} - 2a_{20}\}d_0\cos m_0 q.\end{gathered} \tag{26}$$

Таким образом соотношения (13), (16), (21) (в них надо положить *i*=0), (24) – (26) определяют НДС в массиве горных пород около вертикальной выработки с поперечным сечением близким по форме к правильному m_0 – угольнику.

3. Исследование устойчивости основного состояния (5) – (26) вертикальной выработки с многослойной некруговой крепью при принятии обобщенной концепции продолжающегося нагружения [6] и в предположении, что слои работают совместно без проскальзывания и отставания, сводится к решению системы дифференциальных уравнений в вариациях при соответствующих граничных условиях [10].

Уравнения равновесия для областей пластического V_i^p и упругого V_i^e деформирования массива и крепи имеют вид

$$\nabla_b\left(s_{ji}^{\;b} + s_{ai}^{\,0b}\nabla^a u_{ji}\right) - r s^2 u_{ji} = 0, \quad s = iw \tag{27}$$

Здесь и далее по индексу i суммирования нет (если особо не оговарено) i=0, 1, 2,…, N, ∇ – символ ковариантного дифференцирования, кружок вверху соответствует компонентам основного невозмущенного состояния (5) – (26).

Граничные условия на внутренней поверхности крепи и условия затухания возмущений на внешней поверхности массива запишем в виде

$$N_b\left(s_{\ jn}^{b}+s_{\ an}^{0b}\nabla^a u_{jn}\right)=0\,,\ \ u_{j0}\big|_{r\to\infty}\to 0\,. \tag{28}$$

Условия непрерывности на упругопластических границах g_i имеют вид

$$\left[N_b\left(s_{\ ji}^{b}+s_{\ ai}^{0b}\nabla^a u_{ji}\right)\right]=0\,,\ \left[u_{ji}\right]=0\,. \tag{29}$$

Связь между амплитудными значениями напряжений и перемещений для несжимаемой упруговязкопластической модели в пластической и упругой областях представима в форме

$$s_{\ ji}^{b}=p_i d_{\ j}^{b}+2m_i e_{\ ji}^{b}-a_i b_i f_{\ ji}^{b}\,, \tag{30}$$

где p_i – множитель Лагранжа, $a_i=\dfrac{4m_i^2}{k_i^2(2m_i+c_i+h_i s)}$, $f_{ji}^{b}=s^{0b}_{\ \ ji}-c_i e^{p0b}_{\ \ \ ji}$, $b_i=f_{li}^{k}e_{li}^{k}$

В упругих областях надо положить $a_i=0$. В случае однородного докритического состояния эти соотношения совпадают с полученными в [10].

Уравнения (27) – (30) с учетом условий несжимаемости в пластических областях $V_i^p,(i=0,1,2,...N)$ горного массива и крепи представляют собой взаимосвязанную замкнутую систему уравнений для исследования устойчивости вертикальной выработки с многослойной крепью, когда имеются границы раздела областей упругого и пластического поведения материала при нагружении в горном массиве и крепи. Система уравнений (24), (27) – система $4(N+1)$ дифференциальных уравнений в частных производных относительно амплитудных значений векторов перемещений u_i, v_i, w_i и гидростатических давлений p_i соответствующих пластической и упругой зонам массива и крепи. Нетривиальное решение этой задачи соответствует потери устойчивости основного состояния. Для нахождения собственных значений задачи перемещения и гидростатические давления в зонах упругого и пластического деформирования для горного массива и крепи аппроксимируем двойными тригонометрическими рядами

$$\begin{gathered}u_i=\sum_n^\infty\sum_m^\infty A_i^{nm}(r)\cos(mq)\cos(nz),\quad v_i=\sum_n^\infty\sum_m^\infty B_i^{nm}(r)\sin(mq)\cos(nz),\\ w_i=\sum_n^\infty\sum_m^\infty C_i^{nm}(r)\cos(mq)\sin(nz),\quad p_i=\sum_n^\infty\sum_m^\infty D_i^{nm}(r)\cos(mq)\cos(nz).\end{gathered} \tag{31}$$

Здесь n,m – параметры волнообразования. Выбор решений в форме (31) допускает локальную потерю устойчивости массива и крепи по одинаковой форме.

Подставляя функции u_i, v_i, w_i, p_i в условие несжимаемости и линеаризированные уравнения устойчивости (27) и учитывая (30) после ряда преобразований получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно A_i^{nm}, $B_i^{nm}, C_i^{nm}, D_i^{nm}$

$$A_i + A_i' r + B_i m + C_i n r = 0\,,$$

$$\begin{gathered}
A_i((-\frac{1}{r}a_{5i} + a_{2i,r} + \frac{1}{r}a_{8i,q} + \frac{1}{r}(r^2 r w^2 - s^0{}_{qi}))\cos mq - (a_{9i} + \frac{1}{r}s^0{}_{qi})m^2\cos mq - \\
-(m_i r + r s^0{}_{zi})n^2\cos mq - (a_{3i} - a_{6i} + \frac{1}{r}a_{8i} + r a_{3i,r} + a_{9i,q} + \frac{1}{r}(r t^0{}_{rqi,r} + s^0{}_{qi,q}))m\sin mq) + \\
+A_i'((a_{1i} + a_{2i} - a_{4i} + r a_{1i,r} + a_{7i,q} + r s^0{}_{ri,r} + t^0{}_{rqi,q} + s^0{}_{ri})\cos mq - \\
-(r a_{3i} + a_{7i} + 2t^0{}_{rqi})m\sin mq) + A_i''(r a_{1i} + r s^0{}_{ri})\cos mq + \\
+B_i((-\frac{1}{r}a_{5i} - a_{9i} + a_{2i,r} + \frac{1}{r}a_{8i,q} - \frac{2}{r}s^0{}_{qi})m\cos mq + \\
+(-a_{3i} + a_{6i} - r a_{3i,r} - a_{9i,q} - \frac{1}{r}(r t^0{}_{rqi,r} + s^0{}_{qi,q}))\sin mq - \frac{1}{r}a_8 m^2\sin mq) + \\
+B_i'((a_{2i} + r a_{9i})m\cos mq + (r a_{3i} - r a_{6i} + r^2 a_{3i,r} + r a_{9i,q} - 2t^0{}_{rqi})\sin mq) + \\
+B_i'' r^2 a_{3i}\sin mq + C_i' r m_i n\cos mq + D_i' r\cos mq = 0, \\
A_i((\frac{1}{r}a_{8i} + a_{8i,r} + \frac{1}{r}a_{5i,q} + \frac{1}{r}(r t^0{}_{rqi,r} + s^0{}_{qi,q}))\cos mq - a_{6i}m^2\cos mq - \\
-(\frac{1}{r}a_{5i} + 2a_{9i} + r a_{9i,r} + a_{6i,q} + \frac{2}{r}s^0{}_{qi})m\sin mq) + \\
+A_i'((2a_{7i} + a_{8i} + r a_{7i,r} + a_{4i,q} + 2t^0{}_{rqi})\cos mq - (a_{4i} + r a_{9i})m\sin mq) + \\
+A_i'' r a_{7i}\cos mq + B_i((-a_{6i} + \frac{1}{r}a_{8i} + a_{8i,r} + \frac{1}{r}a_{5i,q} + \frac{1}{r}(r t^0{}_{rqi,r} + s^0{}_{qi,q}))m\cos mq + \qquad (32) \\
+(-2a_{9i} - r a_{9i,r} - a_{6i,q} + \frac{1}{r}(r^2 r w^2 - s^0{}_{qi}))\sin mq - (\frac{1}{r}a_{5i} + \frac{1}{r}s^0{}_{qi})m^2\sin mq - \\
-(r m_i + r s^0{}_{zi})n^2\sin mq) + B_i'((r a_{6i} + a_{8i} + 2t^0{}_{rqi})m\cos mq + \\
+(2r a_{9i} + r^2 a_{9i,r} + r a_{6i,q} + r s^0{}_{ri,r} + t^0{}_{rqi,q} + s^0{}_{ri})\sin mq) + \\
+B_i''(r^2 a_{9i} + r s^0{}_{ri})\sin mq + C_i m_i m n\sin mq + m D_i\sin mq = 0, \\
A_i(-m_i)n\cos mq + A_i'(-r m_i)n\cos mq + B_i(-m_i)n m\cos mq + \\
+C_i(r r w^2\cos mq - \frac{1}{r}(m_i + s^0{}_{qi})m^2\cos mq - r(2m_i + s^0{}_{zi})n^2\cos mq - \\
-\frac{1}{r}(r t^0{}_{rqi,r} + s^0{}_{qi,q})m\sin mq) + C_i'((m_i + r s^0{}_{ri,r} + t^0{}_{rqi,q} + s^0{}_{ri})\cos mq - \\
-2t^0{}_{rqi}m\sin mq) + C_i'' r(m_i + s^0{}_r)\cos mq + D_i(-r)n\cos mq = 0,
\end{gathered}$$

где

$$a_{1i} = -a_i f_{ri}{}^2 + 2m_i\,,\ a_{2i} = -a_i f_{ri} f_{qi}\,,\ a_{3i} = -(r^2 + \frac{1}{r^2})a_i f_{ri} f_{rqi}\frac{1}{2r}\,,\ a_{4i} = -a_i f_{ri} f_{qi}\,,$$

$$a_{5i} = -(a_i f_{qi}{}^2 - 2m_i)\,,\ a_{6i} = -(r^2 + \frac{1}{r^2})a_i f_{qi} f_{rqi} \frac{1}{2r}\,,\ a_7 = -a_i f_{ri} f_{rqi}\,,\ a_{8i} = -a_i f_{qi} f_{rqi}\,, \qquad (33)$$

$$a_{9i} = -((r^2 + \frac{1}{r^2})a_i f_{rqi}{}^2 - 2m_i)\frac{1}{2r}\,.$$

При этом докритическое НДС в составной конструкции массив-крепь в пластических V_i^p и упругих V_i^e областях находится совместно из системы (5) – (26). Для упрощения записи здесь в (32) и далее индексы n,m у величин A, B , C, D опущены.

Граничные условия на внутренем контуре крепи при $r = a_N(1 + d\,d_N \cos(m_N q))$ (m_N – количество углов многоугольника), с учетом (30), (31) принимают вид

$$A_N\{\frac{1}{r}a_{2N}\cos mq - m(a_{3N} + \frac{1}{r}t^0_{rqN})\sin mq\} + A'_N(a_{1N} + s^0_{rN})\cos mq +$$
$$+B_N\{(-a_{3N} - \frac{1}{r}t^0_{rqN})\sin mq + m\frac{1}{r}a_{2N}\cos mq\} + B'_N r a_{3N}\sin mq + D_N\cos mq = 0,$$
$$A_N\{(\frac{1}{r}a_{8N} + \frac{t^0_{rqN}}{r})\cos mq - m a_{9N}\sin mq\} + a_{7N}A'_N\cos mq + \qquad (34)$$
$$+B_N\{-a_{9N}\sin mq + m(\frac{1}{r}a_{8N} + \frac{t^0_{rqN}}{r})\cos mq\} + B'_N(r a_{9N} + s^0_{rN})\sin mq = 0,$$
$$A_N(-n m_N\cos mq) + C_N(-m\frac{t^0_{rqN}}{r}\sin mq) + C'_N(m_N + s^0_{rN})\cos mq = 0\,.$$

Из условий сопряжения (29) на упругопластических границах при $r = g_i + d\,d_i g_i^{(1)}$ (i=0, 1,…N) при учете (30), (31) получаем

$$[A_i\{\frac{1}{r}a_{2i}\cos mq - m(a_{3i} + \frac{1}{r}t^0_{rqi})\sin mq\} + A'_i(a_{1i} + s^0_{ri})\cos mq +$$
$$+B_i\{(-a_{3i} - \frac{1}{r}t^0_{i})\sin mq + m\frac{1}{r}a_{2i}\cos mq\} + B'_i r a_{3i}\sin mq + D_i\cos mq] = 0,$$
$$[A_i\{(\frac{1}{r}a_{8i} + \frac{t^0_{rqi}}{r})\cos mq - m a_{9i}\sin mq\} + a_{7i}A'_i\cos mq + \qquad (35)$$
$$+B_i\{-a_{9i}\sin mq + m(\frac{1}{r}a_{8i} + \frac{t^0_{rqi}}{r})\cos mq\} + B'_i(r a_{9i} + s^0_{ri})\sin mq] = 0,$$
$$[A_i(-n m_i\cos mq) + C_i(-m\frac{t^0_{rqi}}{r}\sin mq) + C'_i(m_i + s^0_{ri})\cos mq] = 0\,,$$
$$[A_i] = 0\,,\ [A'_i] = 0\,, [B_i] = 0\,,\ [B'_i] = 0\,, [C_i] = 0\,,\ [C'_i] = 0\,.$$

Из условий непрерывности напряжений и перемещений на линиях контакта слоев крепи и массива с учетом (30) и (31) получим

$$A_i\{\frac{1}{r}a_{2i}\cos mq - m(a_{3i} + \frac{1}{r}t^0_{rqi})\sin mq\} + A'_i(a_{1i} + s^0_{ri})\cos mq +$$

$$+B_i\{(-a_{3i}-\frac{1}{r}t^0_{rqi})\sin mq+B_i m\frac{1}{r}a_{2i}\cos mq\}+B_i' r a_{3i}\sin mq+D_i\cos mq=$$

$$=A_{(i+1)}\{\frac{1}{r}a_{2(i+1)}\cos mq-m(a_{3(i+1)}+\frac{1}{r}t^0_{rq(i+1)})\sin mq\}+A'_{(i+1)}(a_{1(i+1)}+s^0_{r(i+1)})\cos mq+$$

$$+B_{(i+1)}\{(-a_{3(i+1)}-\frac{1}{r}t^0_{rq(i+1)})\sin mq+m\frac{1}{r}a_{2(i+1)}\cos mq\}+B'_{(i+1)}ra_{3(i+1)}\sin mq+D_{i+1}\cos mq),$$

$$(A_i\{(\frac{1}{r}a_{8i}+\frac{t^0_{rqi}}{r})\cos mq-ma_{9i}\sin mq\}+a_{7i}A_i'\cos mq+ \tag{36}$$

$$+B_i\{-a_{9i}\sin mq+m(\frac{1}{r}a_{8i}+\frac{t^0_{rqi}}{r})\cos mq\}+B_i'(ra_{9i}+s^0_{ri})\sin mq)=$$

$$(A_{(i+1)}\{(\frac{1}{r}a_{8(i+1)}+\frac{t^0_{rq(i+1)}}{r})\cos mq-ma_{9(i+1)}\sin mq\}+a_{7(i+1)}A'_{(i+1)}\cos mq+$$

$$+B_{(i+1)}\{-a_{9(i+1)}\sin mq+m(\frac{1}{r}a_{8(i+1)}+\frac{t^0_{rq(i+1)}}{r})\cos mq\}+B'_{(i+1)}(ra_{9(i+1)}+s^0_{r(i+1)})\sin mq),$$

$$(A_i(-nm_i\cos mq)+C_i(-m\frac{t^0_{rqi}}{r}\sin mq)+C_i'(m_i+s^0_{ri})\cos mq]=$$

$$=(A_{(i+1)}(-nm_{(i+1)}\cos mq)+C_{(i+1)}(-m\frac{t^0_{rq(i+1)}}{r}\sin mq)+C'_{(i+1)}(m_{(i+1)}+s^0_{r(i+1)})\cos mq)$$

$$A_i=A_{i+1},\ B_i=B_{i+1},\ C_i=C_{i+1}.$$

В соотношениях (36) левые части вычисляются при $r=a_i(1+d\,d_i\cos(m_i q))$, правые при $r=b_{i+1}(1+d\,d_{i+1}\cos(m_{i+1}q))$.

Из условия затухания (28) возмущений перемещений на внешней поверхности массива при $r\to\infty$ с учетом (31) получим

$$A_0'=0,\ A_0''=0,\ B_0'=0,\ B_0''=0,\ C_0'=0,\ C_0''=0. \tag{37}$$

Найти точное аналитическое решение краевой задачи (32)–(37) не представляется возможным. Будем искать приближенное решение методом конечных разностей. В результате получим бесконечную систему однородных алгебраических уравнений, линейных относительно параметров A_i^{nm}, B_i^{nm}, C_i^{nm}, D_i^{nm},. Отсюда следует, что определение величины критической нагрузки q_N, равномерно распределенной по внутреннему контуру крепи и соответствующей локальной потере устойчивости вертикальной выработки с многослойной некруговой крепью, сводится к разрешимости матричного уравнения. Минимизация должна производиться по шагу разностной сетки, параметрам волнообразования по контуру m и образующей n, параметрам материала и конструкции l_j. Таким образом, получаем задачу многомерной оптимизации величины q_N в зависимости от m, n при условии равенства нулю определителя полученной алгебраической системы: det (q_N, m, n, λ_j)=0.

г. Воронеж
Поступила: 13 ноября 2007 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. 1. *Быковцев, Г. И.* Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. Владивосток. : Дальнаука. – 1998. – 320 с.
2. *Гоцев, Д. В.* Исследование устойчивости состояния равновесия многослойной крепи вертикальной горной выработки в массивах с упругопластическими свойствами / Д. В. Гоцев, А. В. Ковалев, А. Н. Спорыхин // Международный научный журнал Прикладная Механика. – Киев. – Е39 – № 3.– 2003г. – С. 45-51.
3. *Гоцев, Д. В*. Локальная неустойчивость горизонтальных выработок с многослойной крепью в упруго-пластических массивах / Д. В. Гоцев, А. Н. Спорыхин // Механика твердого тела. – 2004. – №1. – С. 158 – 166.
4. *Гоцев, Д. В.* Локальная неустойчивость горизонтальных выработок многоугольной формы в упруго-вязко-пластических массивах / Д. В. Гоцев, И. А. Ененко, А. Н. Спорыхин // Прикл. механика и техн. физика. – 2005. – Т. 46. – N 2. – С. 141-150.
5. *Гоцев, Д. В.* Локальная неустойчивость горизонтальных выработок эллиптической формы в упруго-вязко-пластических массивах / Д. В. Гоцев, И. А. Ененко, А. Н. Спорыхин // Механика твердого тела. – 2007. – №2. – С. 183-192.
6. *Гузь, А. Н.* Основы теории устойчивости горных выработок / А. Н. Гузь Киев. : Наукова думка, 1977. – 202 с.
7. *Ершов, Л. В.* О проявлении горного давления в горизонтальных выработках / Л. В. Ершов – Докл. АН СССР. – 1962. – т. 145. – № 2. – с. 298-300.
8. *Ишлинский, А. Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев М. : Физматлит. – 2001. – 701 с.
9. *Ершов, Л. В.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Л. В. Ершов, Д. Д. Ивлев М. : Наука, 1978. – 208 с.
10. *Спорыхин, А. Н.* Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред / А. Н. Спорыхин Воронеж : Изд-во Воронеж. ун-та, 1997. – 359 с.
11. *Спорыхин, А. Н.* Неодномерные задачи упруговязкопла стичности с неизвестной границей / А. Н. Спорыхин, А. В. Ковалев, Ю. Д. Щеглова – Воронеж : ВГУ, 2004.