ВЕСТНИК ЧГПУ
им. И. Я. ЯКОВЛЕВА
МЕХАНИКА
ПРЕДЕЛЬНОГО
СОСТОЯНИЯ
№ 2 • 2008

Исаев А. Г.

ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ТРЕЩИН СО СВЯЗЯМИ МЕЖДУ БЕРЕГАМИ

(Азербайджанский государственный педагогический университет)

Рассматривается задача о растяжении и сдвиге тонкой изотропной пластины, ослабленной двоякопериодической системой прямолинейных трещин с концевыми зонами. Строятся общие представления решений, описывающие класс задач с двоякопериодическим распределением напряжений вне трещин. Основное сингулярное интегральное уравнение задачи сводится к бесконечной системе алгебраических уравнений. Из-за неизвестного размера концевой зоны система уравнений оказалась нелинейной даже при линейном законе деформирования связей.

Пусть в неограниченной изотропной пластине, ослабленной двоякопериодической системой прямолинейных трещин, действуют средние напряжения N_1, N_2 и N_{12}. Будем считать, что на берегах трещин вне концевых зон заданы одинаковые в конгруэнтных точках, самоуравновешенные нагрузки $F^{\pm}(x)$.

Выделим части трещины длиной d_1 и d_2 (концевые области), примыкающие к ее вершинам ($-\mathbf{l} \le x \le -\mathbf{l} + d_1$ и $\mathbf{l} - d_2 \le x \le \mathbf{l}$, $y = 0$). Полагаем, что их размеры, заранее неизвестные, могут быть сравнимы с размером трещины. Взаимодействие берегов трещины в концевой области моделируется путем введения между берегами трещины связей, имеющих заданную диаграмму деформирования. Под действием внешних нагрузок в связях между берегами трещины будут возникать нормальные $q_y(x)$ и касательные усилия $q_{xy}(x)$. Величины этих напряжений заранее неизвестны и подлежат определению в процессе решения задачи механики разрушения.

Обозначим основные периоды w_1 и w_2 $(\operatorname{Im} w_1 = 0,\ \operatorname{Im} w_2/w_1 > 0)$, область, занятую материалом пластины, через D; начала и концы трещин поместим соответственно в точках

$$-\mathbf{l} + mw_1 + nw_2, \quad \mathbf{l} + mw_1 + nw_2, \qquad (m, n = 0, \pm 1, \pm \ldots; \quad 0 \le \mathbf{l} < w_1/2).$$

В силу симметрии граничных условий и геометрии области D, напряжения в D являются двоякопериодическими функциями с основными периодами w_1 и w_2.

Решение задачи ищем в виде [4]

$$\Phi(z)=\frac{1}{2p}\int_{-\mathbf{l}}^{\mathbf{l}} p(x)z\,(x-z)\,dx+A,$$

$$\overline{\Omega}(z)=\frac{1}{2p}\int_{-\mathbf{l}}^{\mathbf{l}}\left\{F(x)-\overline{p(x)}\right\}z\,(x-z)\,dx+ \qquad (1)$$

$$+\frac{1}{2p}\int_{-\mathbf{l}}^{\mathbf{l}} p(x)\left\{r_1(x-z)-(x-z)r\,(x-z)+z\,(x-z)\right\}dx+B.$$

Здесь $F(x)=F^{+}(x)-F^{-}(x)$; $r(z)$ и $z\,(z)$ – функции Вейерштрасса, $r_1(z)$ – специальная мероморфная функция; $F(x)$ – скачок выражения $s_y(x)+it_{xy}(x)$ на берегах трещин $[-\mathbf{l}+d_1,\ \mathbf{l}-d_2]$; A и B – постоянные, определяемые статическими условиями, $p(x)$ – искомая функция на $(-\mathbf{l},\mathbf{l})$.

К основным представлениям (1) необходимо добавить дополнительное равенство, выражающее условие однозначности смещений в *D:*

$$\int_{-\mathbf{l}}^{\mathbf{l}} p(x)\,dx=0. \qquad (2)$$

Из условий двоякопериодичности и существования в *D* заданных средних напряжений N_1, N_2 и N_{12}, находим постоянные *A* и *B* в следующем виде

$$\operatorname{Re}A=\frac{1}{4}(s_1+s_2)-\frac{p}{2S}f-\frac{1}{w_1}R(ad_1),\quad S=w_1\cdot\operatorname{Im}w_2,$$

$$B-A=\frac{1}{2}(s_2-s_1)+it-\frac{p-d_1\cdot\operatorname{Im}w_2}{S}f-\frac{ag_1}{w_1}-\frac{\overline{a}d_1}{w_1}. \qquad (3)$$

Здесь $s_2=N_2\sin a$, $t=N_{12}+N_2\cos a$, $s_1\sin a=N_1+2N_{12}\cos a+N_2\cos^2 a$, s_1, s_2, t – средние напряжения на площадках, перпендикулярных координатным осям Оx и Оy.

$$a=\frac{1}{2pi}\int_{-\mathbf{l}}^{\mathbf{l}} xp(x)\,dx;\quad f=\frac{1}{2pi}\int_{-\mathbf{l}}^{\mathbf{l}} xF(x)\,dx. \qquad (4)$$

Условия двоякопериодичности напряжений будут выполняться за счет выбора искомых функций (1), поэтому достаточно удовлетворить граничным условиям лишь на берегах основной трещины.

Эти граничные условия имеют вид [6]:

$$\overline{\Omega}(x)+\overline{\Phi(x)}=\begin{cases}F^{+}(x_0) & x=x_0+0i\\ F^{-}(x_0) & x=x_0-0i\end{cases},\quad x_0\in[-\mathbf{l}+d_1,\ \mathbf{l}-d_2], \qquad (5)$$

$\overline{\Omega}(x)+\overline{\Phi(x)}=q_y+iq_{xy}$ на концевых зонах $(-\mathbf{l},\ -\mathbf{l}+d_1)$ и $(\mathbf{l}-d_2,\ \mathbf{l})$.

Основные соотношения поставленной задачи должны быть дополнены уравнением, связывающим раскрытия берегов трещины и усилия в связях.

Это уравнение в рассматриваемой задаче можно представить, согласно [1, 2], в виде

$$\left(u^{+}-u^{-}\right)-i\left(u^{+}-u^{-}\right)=C(x,s)\left[q_y(x)-iq_{xy}(x)\right], \qquad (6)$$

$$s=\sqrt{q_y^2+q_{xy}^2}.$$

Функцию $C(x,s)$ можно рассматривать как эффективную податливость связей, зависящую от их натяжения; s – модуль вектора усилий в связях; $\left(u^{+}-u^{-}\right)$ – нормальная, $\left(u^{+}-u^{-}\right)$ – касательная составляющая раскрытия берегов трещины в концевой зоне.

Подставляя предельные значения функций $\overline{\Phi(x)}$ и $\overline{\Omega}(z)$ в граничное условие (5), получаем сингулярное интегральное уравнение относительно $p(x)$

$$\frac{1}{2pi}\int_{-\mathbf{l}}^{\mathbf{l}}\overline{p(x)}\left\{z\,(x-x_0)+\overline{z\,(x-x_0)}\right\}dx- \qquad (7)$$

$$-\frac{1}{2pi}\int_{-\mathbf{l}}^{\mathbf{l}}p(x)\left\{r_1(x-x_0)-(x-x_0)r\,(x-x_0)+z\,(x-x_0)\right\}dx-B-\overline{A}=G(x_0),$$

где при $x_0\in\left[-\mathbf{l}+d_1,\ \mathbf{l}-d_2\right]$

$$G(x_0)=\frac{1}{2pi}\int_{-\mathbf{l}}^{\mathbf{l}}F(x)z\,(x-x_0)dx-\frac{F^{+}(x)+F^{-}(x)}{2},$$

при $-\mathbf{l}\le x_0\le\mathbf{l}+d_1$ и $\mathbf{l}-d_2\le x_0\le\mathbf{l}$ $\quad G(x_0)=q_y+iq_{xy}$.

Воспользовавшись разложениями $z\,(z)$, $r\,(z)$ и $r_1(z)$ в основном параллелограмме периодов [5]

$$z\,(z)=\frac{1}{z}-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{g_{j+1}z^{2j+1}}{w_1^{2j+2}},\qquad g_k=\sum_{m,n}{}'\frac{1}{T^{2k}},$$

$$r\,(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(2j+1)g_{j+1}}{w_1^{2j+2}}z^{2j},\qquad r_k^{*}=\sum_{m,n}{}'\frac{\overline{T}}{T^{2k+1}},$$

$$r_1(z)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(2j+2)r_{2j+1}^{*}}{w_1^{2j+2}}z^{2j+1},$$

$$T=m+n\frac{w_2}{w_1},\ m,n=0,\pm1,\pm\ldots,\qquad k=2,3,\ldots .$$

Уравнение (7) после некоторых простых преобразований приведем к виду

$$\frac{1}{pi}\int_{-1}^{1}\frac{g(x)}{x-x_0}dx-\frac{1}{pi}\int_{-1}^{1}g(x)K(x-x_0)dx-\frac{1}{pi}\int_{-1}^{1}\overline{g(x)}K_{*}(x-x_0)dx=G_1(x_0), \qquad (8)$$

где

$$g(x)=p(x),\ x=\frac{x}{\mathbf{l}},\ x_0=\frac{x_0}{\mathbf{l}},\ l=\frac{2\mathbf{l}}{w_1},\ -1<x_0<1,$$

$$K(x)=\sum_{j=0}^{\infty}K_j\left(\frac{l}{2}\right)^{2j+2}x^{2j+1},\quad K_0=w_1\mathrm{Re}d_1,$$

$$K_{*}(x)=\sum_{j=0}^{\infty}K_j^{*}\left(\frac{l}{2}\right)^{2j+2}x^{2j+1},\quad 0\le l<1,$$

$$K_j = \operatorname{Re} g_{j+1}, \quad K_0^* = -\frac{w_1}{2}\left(\bar{g}_1 + \bar{d}_1\right),$$

$$K_j^* = (j+1)\left(\bar{r}_{j+1}^* - \bar{g}_{j+1}\right), \quad j = 1, 2, \ldots,$$

$$G_1(x_0) = it - s_2 + iq_{xy} - q_y \text{ при } -1 \le x_0 \le -1 + \frac{d_1}{\mathbf{l}} \text{ и } 1 - \frac{d_2}{\mathbf{l}} \le x_0 \le 1,$$

$$G_1(x_0) = it - s_2 + \frac{1}{2}\left\{F^+(x_0) + F^-(x_0)\right\} + \frac{1}{2pi}\int_{-\mathbf{1}}^{\mathbf{1}} \overline{F(x)}\left\{\overline{z(x - x_0)} - \frac{x\bar{d}_1}{w_1}\right\}dx,$$

$$F(x) = F^+(x) - F^-(x).$$

К сингулярному уравнению (8) необходимо добавить дополнительное равенство (2) в следующей форме

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx = 0. \tag{9}$$

Если пластинка и внешняя нагрузка симметричны относительно координатных осей, то уравнение (8) вырождается в одно сингулярное интегральное уравнение относительно функции $g(x)$, принимающей чисто мнимые значения. В общем случае, уравнение (8) представляет собой систему двух сингулярных интегральных уравнений относительно комплексной функции $g(x)$.

Сингулярное интегральное уравнение можно свести к бесконечной системе алгебраических уравнений.

Примем, что согласно [5]:

$$g(x) = \frac{g_0(x)}{\sqrt{1 - x^2}}, \tag{10}$$

где $g_0(x)$ – непрерывная по Гельдеру на $[-1, 1]$ функция.

Будем разыскивать $g_0(x)$ в виде ряда по полиномам Чебышева первого рода.

Имеем

$$g_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k T_k(x), \; T_k(x) = \cos(k \arccos x). \tag{11}$$

Подставляя (10), (11) в сингулярное интегральное уравнение (8), а также используя соотношения для полиномов Чебышева первого и второго ряда $T_k(x)$ и $U_k(x)$ и ортогональность функций $U_k(x)$ на $[-1, 1]$, получаем бесконечную систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов A_k:

$$A_{k+1} - \sum_{n=1}^{\infty} C_{nk} A_n - \sum_{n=1}^{\infty} C_{nk}^* \bar{A}_n = iD_k, \quad k = 0, 1, \tag{12}$$

где

$$C_{nk} = \frac{2}{p^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)U_k(x_0)\sqrt{1 - x_0^2}}{\sqrt{1 - x^2}} K(x - x_0)\,dx\,dx_0,$$

$$C_{nk}^{*} = \frac{2}{p^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{T_n(x)U_k(x_0)\sqrt{1-x_0^2}}{\sqrt{1-x^2}}K_*(x-x_0)\,dx\,dx_0 ,$$

$$D_k = \frac{2}{p}\int_{-1}^{1}G_1(x_0)U_k(x_0)\sqrt{1-x_0^2}\,dx_0 .$$

Коэффициенты C_{nk}, C_{nk}^{*} можно представить в явном виде.

Используя (7) и соотношения для полиномов Чебышева первого и второго ряда $T_k(x)$ и $U_k(x)$, находим

$$C_{nk} = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{l}{2}\right)^{2j+2}\cdot K_j a_{jnk} , \quad C_{nk}^{*} = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{l}{2}\right)^{2j+2}\cdot K_j^{*} a_{jnk} , \tag{13}$$

$$a_{jnk} = 2\sum_{s=0}^{2j+1}(-1)^s\frac{(2j+1)!}{s!(2j+1-s)!}a_{k,s}b_{n,2j-s+1} .$$

Величина d, характеризующая длину концевых зон, входит в решение системы (12) как неизвестный параметр, подлежащий определению. Так как напряжения в материале пластины ограничены, то решение сингулярного интегрального уравнения (8) следовало бы искать в классе всюду ограниченных функций (напряжений). Условие ограниченности напряжений в концах $x = \pm\mathbf{1}$ служит для определения параметров d_1 и d_2, зная которые можно найти длины концевых зон. В общем случае, размеры концевых зон на левом и правом концах трещины будут различны.

Для обеспечения конечности напряжений на левом и правом концах трещин необходимо к системе (12) добавить следующие условия

$$\sqrt{p\mathbf{l}}g_0(1) = \sqrt{p\mathbf{l}}\sum_{k=1}^{\infty}\overline{A}_k = 0 , \tag{14}$$

$$\sqrt{p\mathbf{l}}g_0(-1) = \sqrt{p\mathbf{l}}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\overline{A}_k = 0 .$$

В систему (12) входят неизвестные значения усилий q_y и q_{xy} в узловых точках, принадлежащих концевым зонам трещин.

На основании соотношения

$$\Phi^{+}(x)-\Phi^{-}(x) = \frac{2m}{1+\kappa_0}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{+}-u^{-}\right)+i\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{+}-u^{-}\right)\right]$$

и формулы (1), получим уравнение относительно неизвестной функции $q_y + iq_{xy}$:

$$p(x) = \frac{2m}{1+\kappa_0}\frac{d}{dx}\left[C(x,s)\left(q_y + iq_{xy}\right)\right]. \tag{15}$$

Для построения недостающих уравнений потребуем выполнения условий (15) в узловых точках, содержащихся в концевых зонах трещины. В результате получим алгебраическую систему из M_1 уравнений для определения приближенных значений $q_y(t_m)+iq_{xy}(t_m)$ ($m = 1, 2, ..., M_1$).

Полученные алгебраические системы (12), (14), (15) оказались связанными и решаются совместно. Из-за неизвестных размеров концевых зон система уравнений (12), (14), (15) даже при линейных связях является нелинейной.

Для ее решения использовали метод последовательных приближений [5], суть которого состоит в следующем.

Решаем алгебраическую систему (12), (15) при некоторых определенных значениях d_{1*} и d_{2*} относительно неизвестных A_k ($k = 1, 2, \ldots M$) и $q_y + iq_{xy}$. Неизвестные A_k, $q_y + iq_{xy}$ входят в систему линейным образом. Это обстоятельство оправдывает использование предлагаемого способа. Значения d_{1*} и d_{2*} и найденные значения коэффициентов A_k подставляются в неиспользованные уравнения (14). Взятые значения параметров d_{1*} и d_{2*} и соответствующие им значения коэффициентов A_k не будут, вообще говоря, удовлетворять уравнениям (14). Поэтому, подбирая значения параметров d_1 и d_2, будем многократно повторять вычисления до тех пор, пока последние уравнения системы (14) не будут удовлетворяться с заданной точностью.

Расчетами были получены зависимости размеров концевых зон в зависимости от относительного размера области $l = 2\mathbf{l}/w_1$ $\left(w_2 = w_1 e^{ip/3}\right.$ и $\left.w_2 = w_1 e^{ip/2}\right)$ и растягивающих напряжений. Берега трещин считались свободными от нагрузок. В случае нелинейного закона деформирования связей для определения усилий в концевых зонах использовался также алгоритм, подобный методу упругих решений [3].

Для определения предельно-равновесного состояния используем условие критического раскрытия трещины.

г. Баку
Поступила: 11.12.2007

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гаджиев, В .Д.* Предельно-равновесное состояние детали типа втулки контактной пары при наличии трещин со связями между берегами / В. Д. Гаджиев, В. М. Мирсалимов // Оптимальное проектирование механических систем. – Баку : Элм. – 1999. – С. 50-63.
2. *Гольдштейн, Р. В.* Рост трещин по границе соединения материалов / Р. В. Гольдштейн, М. Н. Перельмутер // Проблемы механики : Сб. статей к 90-летию со дня рождения А. Ю. Ишлинского. – М. : Физматлит, 2003. – С. 221-238.
3. *Ильюшин, А. А.* Пластичность. / А. А Ильюшин. – М. : Гостехиздат, 1948. – 376 с.
4. *Мирсалимов, В. М.* Разрушение упругих и упругопластических тел с трещинами / В. М. Мирсалимов. – Баку : Эл, 1984. – 124 с.
5. *Мирсалимов, В. М.* Неодномерные упругопластические задачи / В. М. Мирсалимов. – М. : Наука, 1987. – 256 с.
6. *Мусхелишвили, Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.