

Манцыбора А. А., Семенов К. Т.

ЗАДАЧА О СОУДАРЕНИИ ДВУХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ

(Институт автоматизации процессов управления ДВО РАН)

Рассмотрена плоская автомодельная задача об ударном деформировании упругопластического полупространства жестким телом с плоской границей. Изучается случай, когда необратимые деформации накапливаются внутри простых волн Римана. Приведено решение с возможной волновой картиной, когда возмущение в среде распространяется посредством двух упругих ударных волн и одной пластической централизованной волны.

Ключевые слова: упругость, пластичность, высокоскоростное соударение. Проведена постановка авт. деформирование осуществляется после прохождения по среде поперечной ударной волны.

Введение.

Первой публикацией, посвященной постановке и исследованию решения плоской автомодельной задачи динамики упругопластической среды является, по-видимому, статья [3]. Несомненно в любом случае, что именно данная работа инициировала целый ряд [1,2,4-10] следующих публикаций на данную тему. В этом ряду заметны результаты исследований Г. И. Быковцева и его учеников (В. А. Баскаков, П. Н. Сыгуров, Н. М. Зиновьев, А. В. Колокольчиков и др.) Настоящая публикация относится к этому же ряду, с той отличительной особенностью, что материал считается пластически сжимаемым, что обеспечивается выбором поверхности нагружения в форме пирамиды Кулона-Мора, основанием которой в плоскости параллельной девиаторной является шестиугольник Ишлинского-Ивлева.

Постановка задачи.

Полагаем, что полупространство $x_2 > 0$ (на $L_1: x_2 = 0$) (рис. 1) занято упругопластической средой. Ударник будем считать абсолютно твердым и имеющим также плоскую границу L_2 . Считаем, что ударник движется с некоторой скоростью $u(u_1, u_2)$ и плоскость ударника L_2 с плоскостью упругопластического полупространства образуют малый угол j_0 . В результате соударения тел образуется общая граница OL

(рис. 2), причем точка O – точка соприкосновения тел движется вдоль границы первого тела с некоторой скоростью s .

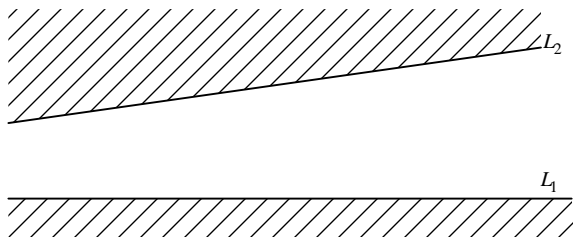


Рис. 1

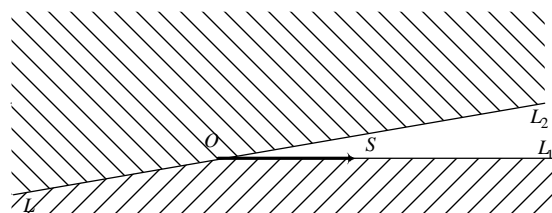


Рис. 2

Рассмотрим случай, когда $s = v_2 + \frac{v_1}{\sin j}$ больше скорости распространения возмущений в среде (больше скорости звука). Это достигается либо малостью угла соударения φ , либо высокой скоростью соударения v .

1. Решение упругой автомодельной задачи.

Пусть первоначально параметры задачи (v, φ) таковы, что в полупространстве не возникают необратимые деформации.

Систему уравнений динамического деформирования линейной упругой среды запишем в прямоугольной декартовой системе координат в следующем виде:

$$\begin{aligned} s_{ij} &= l d_{ij} e_{kk}^e + 2m e_{ij}^e, \\ e_{ij}^e &= \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \\ s_{ij,j} - \rho u_i &= 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь s_{ij}, e_{ij}^e, u_i – компоненты тензора напряжений, тензора малых упругих деформаций и вектора перемещений соответственно.

Введем автомодельную переменную:

$$x = \frac{x_1}{st - x_2} \quad (1.2)$$

и представим компоненты вектора перемещения в виде:

$$u_1 = (st - x_2) f(x), \quad u_2 = (st - x_2) g(x). \quad (1.3)$$

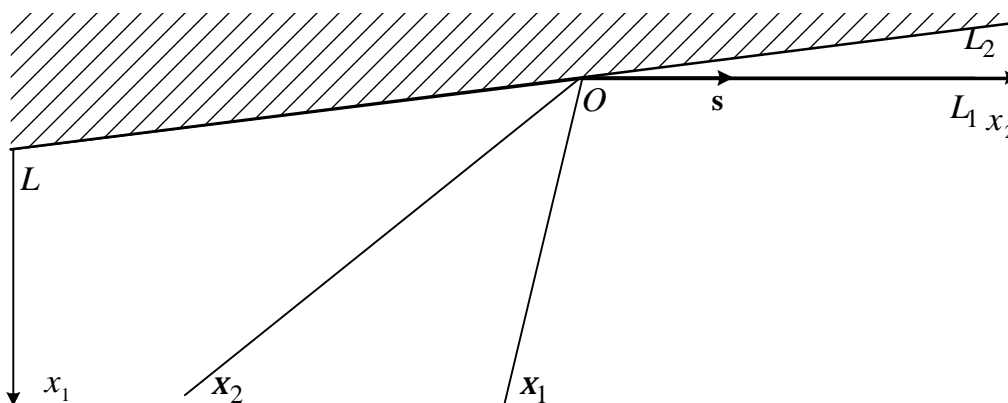


Рис. 3

Подставляя соотношения (1.3) в систему уравнений (1.1) можно получить систему из двух однородных квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} Af'' + Bg'' = 0, \\ Cf'' + Dg'' = 0, \end{cases} \quad (1.4)$$

где A, B, C, D – функции от $f(x), g(x), x$, их производных и упругих постоянных материала.

Система (1.4) допускает тривиальное решение:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax - b, \\ g(x) &= cx - d, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где a, b, c, d – постоянные.

Из соотношений (1.1), (1.2) и (1.5) находим:

$$e_{11} = a, \quad e_{22} = d, \quad e_{12} = e_{21} = \frac{b+c}{2}, \quad u_1 = -sb, \quad u_2 = -sd. \quad (1.6)$$

Компоненты тензора напряжений выражаются через постоянные a, b, c, d по закону Гука. Таким образом соотношения (6) определяют решение задачи в областях где S_{ij}, e_{ij}^e, u_i постоянны. Эти области разделены ударными волнами при переходе через которые эти величины изменяются скачком. На ударных волнах выполняются динамические и кинематические условия совместности разрывов:

$$\begin{aligned} [s_{ij} n_j] &= -rG[u_i], \\ [u_i] &= 0, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где n_j – компоненты единичной нормали к ударной волне, $[F] = F^+ - F^-$ – разрыв некоторой функции и индексами плюс и минус обозначены значения величины F перед и за ударной волной соответственно.

Вектор единичной нормали к плоскости волны \bar{n} имеет компоненты:

$$n_1^{(m)} = \cos(q_m), \quad n_2^{(m)} = \sin(q_m), \quad m = 1, 2. \quad (1.8)$$

В случае автомодельности задачи для сохранения конфигурации на рис.3 в любой момент времени, скорость распространения волны $\bar{G}^{(m)}$ и скорость движения нагрузки на границе полупространства \bar{s} необходимо связать соотношениями:

$$G^{(m)} = s \cdot \sin(q_m), \quad s = const. \quad (1.9)$$

Подставляя соотношения (1.3), (1.5), (1.6), (1.8), (1.9) в выражение (1.7), а также учитывая, что $x_m = tg(q_m)$, получим:

$$\begin{aligned} (I + 2m)[a] + I[d] + mx_m([b] + [c]) - rs^2 x_m [b] &= 0, \\ ((I + 2m)[d] + I[a])x_m + m([b] + [c]) - rs^2 x_m [d] &= 0, \\ [a]x_m - [b] &= 0, \\ [c]x_m - [d] &= 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Рассматривая систему (1.10) относительно разрывов переменных a, b, c, d , с учетом соотношения (1.9), и приравняв определитель системы к нулю окончательно получим соотношения для скоростей распространения ударных волн:

$$G_1 = \sqrt{\frac{l+2m}{r}}, \quad G_2 = \sqrt{\frac{m}{r}}. \quad (1.11)$$

2. Решение пластической автомодельной задачи.

Рассмотрим идеальную упругопластическую среду, полные деформации которой считаются малыми и складываются из двух частей: упругой и пластической:

$$e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (2.1)$$

Компоненты тензора напряжения выражаются через упругие деформации согласно закону Гука:

$$s_{ij} = l d_{ij} e_{kk}^e + 2m e_{ij}^e. \quad (2.2)$$

Также выполняются уравнения движения:

$$s_{ij,j} - \rho u_i = 0. \quad (2.3)$$

Скорости пластических деформаций связаны с напряжениями посредством ассоциированного закона пластического течения:

$$e_{ij}^p = \gamma \frac{\partial f}{\partial s_{ij}}, \quad (2.4)$$

где f – это условие пластичности.

В данной работе в качестве условия пластичности выбирается пирамида Ишлинского-Ивлева:

$$\max |s_i - s_j| + q s = \frac{2}{3} k, \quad s = \frac{1}{3} s_{ii}. \quad (2.5)$$

При численном решении данной задачи в силу выбранных значений начальных условий и параметров материала рассматривается одна из граней пирамиды Ишлинского-Ивлева:

$$s_1 + (q-1)s = \frac{2}{3} k. \quad (2.6)$$

Для плоской задачи главные напряжения выражаются через компоненты тензора напряжений следующим образом:

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{s_{11} + s_{22}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(s_{11} - s_{22})^2 + 4s_{12}^2}, \\ s_2 &= \frac{s_{11} + s_{22}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(s_{11} - s_{22})^2 + 4s_{12}^2}, \\ s_3 &= s_{33}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Условию (2.6) можно удовлетворить тождественно (при соблюдении условия (2.7)), положив:

$$\begin{aligned}
s_{11} &= \frac{1}{2}r \cdot \cos(q) + \frac{2k}{2q+1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{r+p}{2q+1}, \\
s_{22} &= -\frac{1}{2}r \cdot \cos(q) + \frac{2k}{2q+1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{r+p}{2q+1}, \\
s_{33} &= \frac{3}{2(q+1)}p.
\end{aligned}
\tag{2.8}$$

Из соотношений (2.4) и (2.8) получим:

$$\begin{aligned}
e_{11}^p &= y \left(\frac{2q+1}{4} + \frac{3}{4} \cos(q) \right), \\
e_{22}^p &= y \left(\frac{2q+1}{4} - \frac{3}{4} \cos(q) \right), \\
e_{33}^p &= y \frac{q-1}{2}, \\
e_{12}^p &= y \frac{3}{2} \sin(q).
\end{aligned}
\tag{2.9}$$

Из соотношений (2.1), (2.2), (2.3) получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
s_{ij} &= l d_{ij} (u_{k,k} - e_{kk}^p) + m (u_{i,j} + u_{j,i}) - 2m e_{ij}^p, \\
s_{ij,j} - r u_{i,j} &= 0.
\end{aligned}
\tag{2.10}$$

Введем автомодельную переменную (1.2), при этом выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
\Phi_{,1} &= -\Phi' \frac{sx}{st - x_2}, \\
\Phi_{,1} &= \Phi' \frac{1}{st - x_2}, \\
\Phi_{,2} &= \Phi' \frac{x}{st - x_2},
\end{aligned}
\tag{2.11}$$

где Φ – произвольная функция от x .

Из соотношений (2.8), (2.9), (2.10), (2.11) окончательно запишем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
A_{11}p' + A_{12}r' + A_{13}q' + A_{14}u' + A_{15}u_2' &= 0, \\
\text{.....} & \\
A_{51}p' + A_{52}r' + A_{53}q' + A_{54}u' + A_{55}u_2' &= 0.
\end{aligned}
\tag{2.12}$$

Величины A_{ij} являются функциями от r, p, q, u_1, u_2 и констант материала.

Система (2.12) является однородной. Таким образом, пластическое течение связано с нетривиальным решением данной системы. Равенство нулю определителя этой системы на отрезке $[x^-, x^+]$ означает, что необратимые деформации приобретаются материалом в простой центрированной волне Римана, передний фронт которой определяется

значением x^+ , а задний x^- . Согласно проводимым численным экспериментам возможны две центрированные волны, первая из них располагается между безвихревой ($x = x_1$ на рис. 4) и эквиволлюмиальной ($x = x_2$ на рис. 4) упругими волнами, вторая в области между эквиволлюмиальной волной и деформированной границей OL (рис. 4) среды. Возможен так же случай, когда одна из центрированных волн отсутствует. Так на рис. 4 иллюстрируется случай, когда центрированная волна присутствует только между x_2 и OL и задается параметрами x_2^+ (передний фронт) и x_2^- (задний фронт центрированной волны). Данная ситуация возникла при следующих значениях для параметров задачи: $l = 1,155 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $m = 7,7 \cdot 10^4 \text{ МПа}$, $r = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $k = 285 \cdot 10^3 \text{ МПа}$, $q = 0,05$, $u_1 = 11 \text{ м/с}$, $u_2 = 13 \text{ м/с}$, $j_0 \approx 3^\circ$.

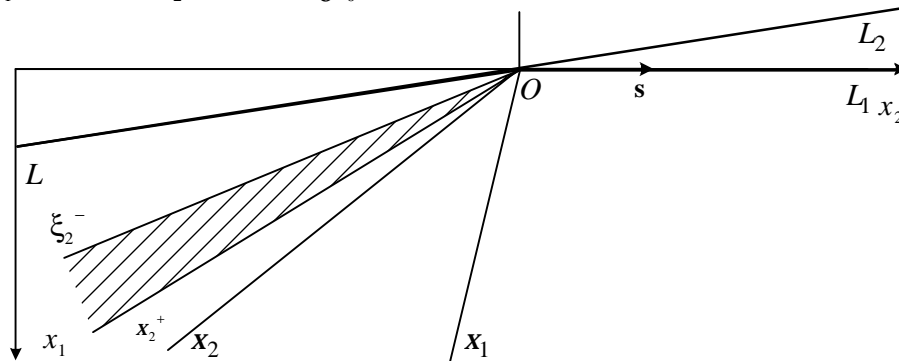


Рис. 4

Далее (рис. 5-8) показан характер изменения компонент тензора напряжения измеряемый в МПа, в зависимости от автомодельной переменной x в области пластической волны ($x^- ; x^+$):

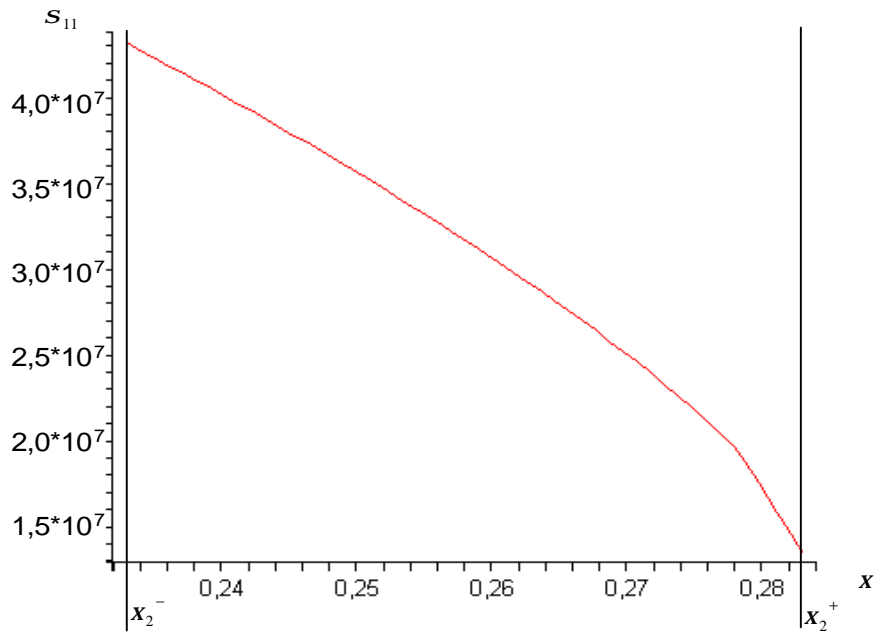


Рис. 5

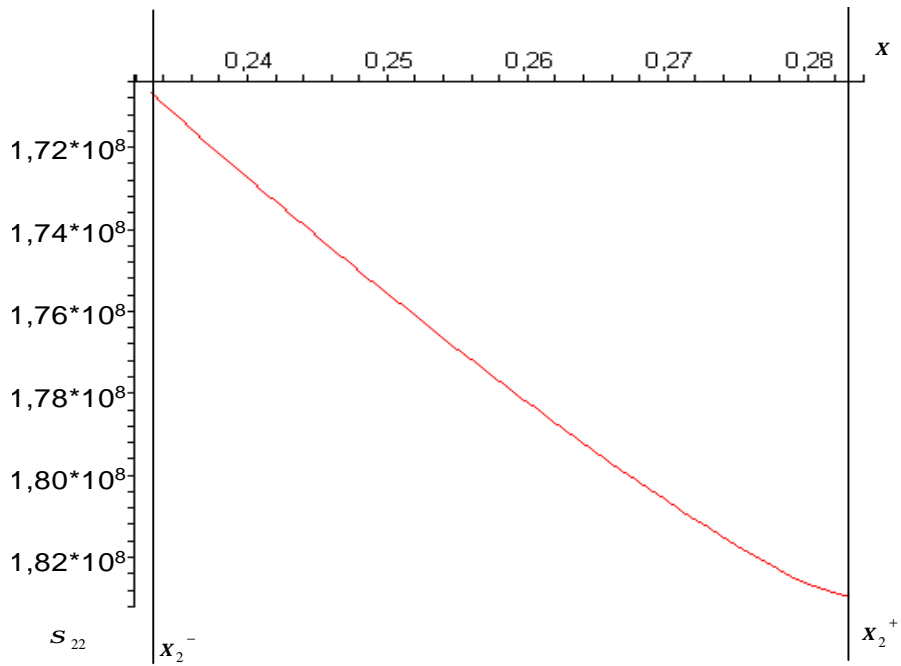


Рис. 6

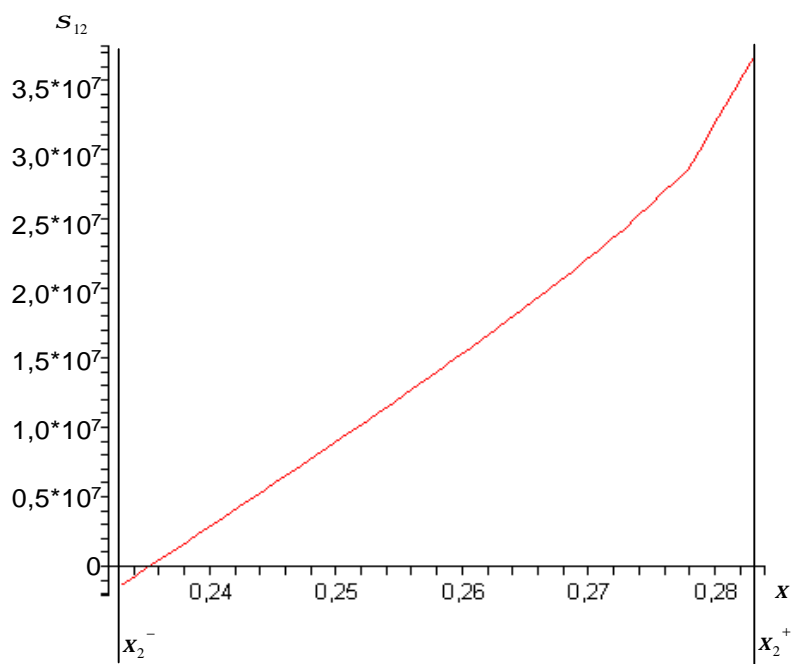


Рис. 7

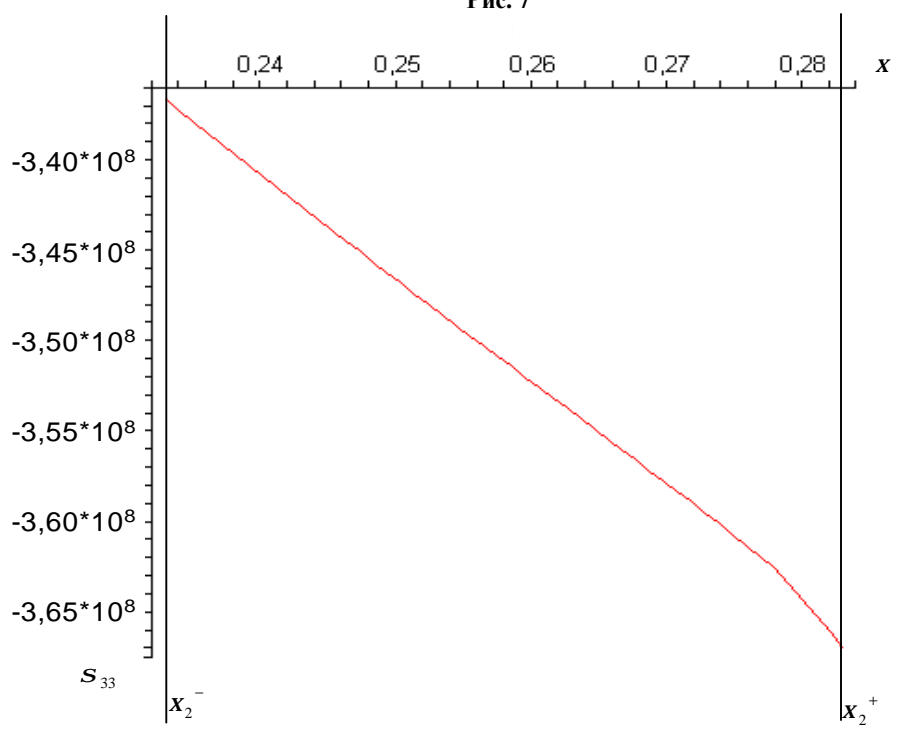


Рис. 8

Следует отметить, что кроме рассмотренного здесь случая (рис. 4) с волновой картиной – когда пластическая волна идет за поперечной упругой волной, при задании других краевых условий возможны еще случаи с другими волновыми картинами. А именно: когда волны несущие необратимые деформации существуют одновременно и за продольной и за поперечной упругими ударными волнами, либо случай с одной пластической волной между двумя упругими.

г. Владивосток

Поступила: 19 декабря 2007 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баскаков, В. А.* Об отражении плоскополяризованной волны от свободной поверхности в упрочняющейся упругопластической среде / В. А. Баскаков, Г. И. Быковцев // ПММ. М. : Мир, 1971. – 35. – №1. – С.71-72.
2. *Баскаков, В. А.* Пластическое деформирование среды при взаимодействии сдвиговых ударных волн / В. А. Баскаков // ПМТФ. – 1982. – №2. – С.127-133.
3. *Блейх, Г. Г.* Плоские волны в упругопластическом полупространстве, вызванные совместным действием нормальной и касательной поверхностных нагрузок / Г. Г. Блейх, Дж. Нельсон // ПММ. М. : Мир, 1966. – №1. – С.145-156.
4. *Блейх, Г. Г.* Движение со сверх сейсмической скоростью ступенчатой нагрузки по поверхности упругопластического полупространства / Г. Г. Блейх., А. Т. Мэтьюз // Сб. пер. «Механика». – 1968. – №1. – С.123-155.
5. *Быковцев, Г. И.* Автомодельные решения уравнений динамики идеального упругопластического тела при условии пластичности Треска / Г. И. Быковцев, А. В. Колокольчиков, П. Н. Сыгуров // ЖПМТФ. – 1984. – №6. – С.112-120.
6. *Быковцев, А. Г.* О преломлении ударных волн чистого сдвига в упругопластическое полупространство / А. Г. Быковцев // ПММ. – 1989. – Т.53, вып.2. – С.309-318.
7. *Ковшов, А. Н.* О преломлении упругой волны в упругопластическое полупространство / А. Н. Ковшов // Изв. АН СССР. МТТ. – 1972. – №6 – С.82-88.
8. *Ковшов, А. Н.* Отражение пластической волны, падающей под углом на жесткую стенку / А. Н. Ковшов, А. М. Скобеев // Изв. АН СССР, МТТ. – 1973. – №1. – С. 54-59.
9. *Кондауров, В. И.* Отражение плоской поперечной волны от свободной границы полупространства / В. И. Кондауров // В кн. Труды научной конф. МФТИ. Сер. Аэромеханика. Процессы управления. Долгопрудный. – 1973. – С. 105-111.
10. *Скобеев, А. М.* Подвижная нагрузка на неупругой полуплоскости / А. М. Скобеев, Л. М. Флитман // ПММ. – 1970. – т.34, вып. 1. – С.189-192.