Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 4 (22). С. 176–187

А. В. Чичурин, Е. Н. Швычкина

ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ СИСТЕМ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА, ЭКВИВАЛЕНТНЫХ УРАВНЕНИЮ ШАЗИ С ШЕСТЬЮ НЕПОДВИЖНЫМИ ПОЛЮСАМИ

Европейский университет информатики и экономики

Брестский государственный технический университет

Аннотация. В работе построены системы двух дифференциальных уравнений, эквивалентные дифференциальному уравнению Шази третьего порядка с шестью постоянными полюсами. Коэффициенты построенных систем найдены с помощью аналитического метода. Приведен пример эквивалентной системы для заданного набора постоянных полюсов.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение Шази, эквивалентные системы третьего порядка, подвижные критические особые точки.

УДК: 517.91

Актуальность исследуемой проблемы. Исследуя уравнения вида

$$w''' = P(w'', w', w, z), \tag{1}$$

где P – полином по w'', w', w с аналитическими коэффициентами по z, Шази надеялся найти новые уравнения достаточно простого вида, решения которых не были бы классическими функциями и которые не приводились бы к каноническим уравнениям Пенлеве. Как отмечено в работе В. А. Добровольского [1], результаты этих исследований оказались мало обнадеживающими. Тогда Шази стал рассматривать уравнения

$$w''' = R(w'', w', w, z) \tag{2}$$

($R-$ рациональная функция по w'', w', w с аналитическими коэффициентами по z), решения которых не имели бы подвижных критических особых точек [2].

Согласно методу Пенлеве [2] сначала необходимо было найти упрощенное уравнение для уравнения (2) с неподвижными критическими точками. Шази получил такое уравнение в виде

$$w''' = \frac{PQ'' - QP''}{PQ' - QP'} w'w'' - \frac{P'Q'' - Q'P''}{PQ' - QP'} \; \frac{w'^3}{2}, \tag{3}$$

где $P,\ Q$ – два полинома четвертой степени по w с постоянными коэффициентами, а $P'', Q'',\ P', Q'$ – производные полиномов P, Q по w [3]. В этой же работе он показал, что уравнение (3) имеет не более шести полюсов, а также то, что уравнение P-типа [2], которое допускает в качестве своего упрощения уравнение (3), причем все корни относительно переменной w уравнения $PQ' - QP' = 0$ простые, необходимо имеет вид

Поступила 10.11.2014

$$\begin{aligned} w''' = \sum_{k=1}^{6} \tfrac{(w'-a_k')(w''-a_k'')+A_k(w'-a_k')^3+B_k(w'-a_k')^2+c_k(w'-a_k')}{w-a_k} + D\, w'' + \\ + E\, w' + \prod_{i=1}^{6}(w-a_i) \sum_{k=1}^{6} \tfrac{F_k}{w-a_k}. \end{aligned} \tag{4}$$

Уравнение (4) содержит 32 коэффициента – функции по z: a_k, A_k, B_k, c_k, F_k $(k = \overline{1,6})$, D, E. Шази получил следующую систему алгебраических и дифференциальных уравнений, связывающую эти коэффициенты:

$$\sum_{k=1}^{6} A_k = 0, \sum_{k=1}^{6} a_k A_k = -6, \sum_{k=1}^{6} a_k^2 A_k = -2\sum_{k=1}^{6} a_k, \tag{5}$$

$$2D + \sum_{k=1}^{6}(B_k - 3a_k' A_k) = 0, \sum_{k=1}^{6} F_k = \sum_{k=1}^{6} a_k F_k = \sum_{k=1}^{6} a_k^2 F_k = 0. \tag{6}$$

$$2A_k^2 + \sum_j \frac{A_k - A_j}{a_k - a_j} = 0 (k, j = \overline{1,6}; j \neq k), \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \left(\tfrac{5}{2}A_k - \sum_j \tfrac{1}{a_k-a_j}\right) B_k + \sum_j \left(\tfrac{1}{2}A_k + \tfrac{1}{a_k-a_j}\right) B_j = -A_k' + A_k \sum_j \tfrac{a_k'-a_j'}{a_k-a_j} - \\ -3\sum_j A_j \tfrac{a_k'-a_j'}{a_k-a_j} + \tfrac{3}{2} A_k \sum_{i=1}^{6} a_i' A_i, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} -\left(2A_k + \sum_j \tfrac{1}{a_k-a_j}\right) c_k + \sum_j c_j \tfrac{1}{a_k-a_j} = B_k^2 - B_k' - B_k \sum_j \tfrac{a_k'-a_j'}{a_k-a_j} - \\ -\sum_j \tfrac{3A_j(a_k'-a_j')^2 + 2B_j(a_k'-a_j')}{a_k-a_j} + B_k D - E - \sum_j \tfrac{a_k''-a_j''}{a_k-a_j}, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} -a_k''' - B_k c_k + c_k' + \sum_j \tfrac{(a_k'-a_j')(a_k''-a_j''-c_k) + A_j(a_k'-a_j')^3}{a_k-a_j} + \\ + \sum_j \tfrac{B_j(a_k'-a_j')^2 + c_j(a_j'-a_k')}{a_k-a_j} + E a_k' + D(a_k'' - c_k) + F_k \prod_j (a_k - a_j) = 0, \end{aligned} \tag{10}$$

где $k, j = \overline{1,6}$; $j \neq k$, которую он определил как необходимые и достаточные условия отсутствия подвижных критических особых точек у решений уравнения (4) [3].

Отметим, что большой интерес здесь может представлять исследование различных классов уравнения (4)–(10) с использованием метода приближенного решения В. Н. Орлова [4], [5], основанного на разделении области поиска решений в регулярной области и окрестности подвижных особых точек, и в построении последовательности аналитических продолжений.

Материал и методика исследований. Исследуя уравнение (4), Шази построил эквивалентные ему системы. Так, например, в окрестности точки голоморфности функции $w(z)$ решения уравнения (4) им была построена система вида

$$\begin{cases} \frac{w'}{2} + P_3 w' + Q_3 + Pv - Qu = 0, \\ w'' + P_2 w' + Q_2 + \frac{\partial P}{\partial w} v - \frac{\partial Q}{\partial w} u = 0, \end{cases}$$

где P_3, Q_3, P_2, Q_2 – полиномы от w, степень которых равна нижнему индексу, и коэффициенты которых голоморфны в каждой точке, где голоморфны коэффициенты уравнения (4). Другие эквивалентные системы были построены Н. А. Лукашевичем в работе [6], где доказано, что решение шести неприводимых уравнений Пенлеве выражается через решения систем вида

$$\left\{ \begin{array}{l} uu'' - u'^2 = a_0uu' + a_1uv' + a_2u'v + a_3vv' + a_4u^2 + a_5uv + a_6v^2, \\ vv'' - v'^2 = b_0uu' + b_1uv' + b_2u'v + b_3vv' + b_4u^2 + b_5uv + b_6v^2 \end{array} \right. \tag{11}$$

с аналитическими коэффициентами a_i, b_i $(i = \overline{0,6})$ по z. Там же [6] было доказано, что если $w(z)$ — решение уравнения Пенлеве, то это решение можно представить в виде

$$w(z) = \frac{u(z)}{v(z)}, \tag{12}$$

где $u(z)$ и $v(z)$ – целые функции, удовлетворяющие системе (11). Подстановка (12) сводит систему (11) к дифференциальному уравнению третьего порядка, которое можно записать в виде (4). Изучение системы (11) было проведено В. И. Ляликовой [7].

Шази не удалось найти решения системы (5)–(10), но он показал, что некоторые случаи вырождения уравнения (4) являются уравнениями Пенлеве и, следовательно, решение уравнения (4) может быть рассмотрено как существенно новое по сравнению с трансцендентными функциями Пенлеве [1], [6].

Необходимые и достаточные условия того, чтобы система (11) принадлежала к P-типу были получены Н. А. Лукашевичем в [8].

Шази не исследовал систему (5)–(10), а потому он явно не выделил классы уравнений вида (4), решения которых не имеют подвижных критических особых точек [1]. Изучение свойств решений системы (5) — (6) было проведено Н. А. Лукашевичем в работе [6]. Решение систем (5), (6) имеет вид [9], [10]

$$A_k = \frac{-6a_k^4 + 4\sigma_1 a_k^3 + 3(\alpha_2 - \sigma_2)a_k^2 - 3\beta_2 a_k + 3\beta_3 - \sigma_4}{6a_k^5 - 5\sigma_1 a_k^4 + 4\sigma_2 a_k^3 - 3\sigma_3 a_k^2 + 2\sigma_4 a_k - \sigma_5} \ (k = \overline{1,6}), \tag{13}$$

где основные симметрические многочлены σ_k, составленные из элементов a_k $(k = \overline{1,6})$, связаны с величинами α_2, β_2, β_3 соотношениями

$$\begin{array}{r} \beta_2 = \frac{(3\alpha_2-\sigma_2)(2\alpha_2\sigma_1-3\sigma_3)-2\sigma_1\sigma_4+6\sigma_5}{18\alpha_2+\sigma_1^2-6\sigma_2}, \\ \beta_3 = \frac{2\sigma_1\sigma_5-(3\alpha_2-\sigma_2)(12\alpha_2^2-4\alpha_2\sigma_2+\sigma_1\sigma_3-4\sigma_4)-2\sigma_1\sigma_4+6\sigma_5}{2(18\alpha_2+\sigma_1^2-6\sigma_2)}, \end{array} \tag{14}$$

а функция α_2 удовлетворяет уравнению пятой степени

$$\begin{array}{c} 1296\alpha_2^5 - 1296\sigma_2\alpha_2^4 - 3\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3^2 + (432\sigma_2^2 + 216\sigma_1\sigma_3 - 432\sigma_4)\alpha_2^3 + 2\sigma_1^3\sigma_3\sigma_4 + \\ +12\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4 - 8\sigma_1^2\sigma_4^2 - 6\sigma_1^2\sigma_3\sigma_5 - 36\sigma_2\sigma_3\sigma_5 + 48\sigma_1\sigma_4\sigma_5 - 72\sigma_5^2 + 4\sigma_1^4\sigma_6 - \\ -48\sigma_1^2\sigma_2\sigma_6 + 144\sigma_2^2\sigma_6 + \alpha_2^2(-48\sigma_2^3 - 144\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 24\sigma_1^2\sigma_4 + 288\sigma_2\sigma_4 - \\ -216\sigma_1\sigma_5 + 1296\sigma_6) + \alpha_2(24\sigma_1\sigma_2^2\sigma_3 + 9\sigma_1^2\sigma_3^2 - 8\sigma_1^2\sigma_2\sigma_4 - 48\sigma_2^2\sigma_4 - \\ -36\sigma_1\sigma_3\sigma_4 - 4\sigma_1^3\sigma_5 + 72\sigma_1\sigma_2\sigma_5 + 108\sigma_3\sigma_5 + 144\sigma_1^2\sigma_6 - 864\sigma_2\sigma_6) = 0. \end{array}$$

Если же выполняются условия $18\alpha_2 + \sigma_1^2 - 6\sigma_2 = 0$, то величины A_k имеют вид

$$A_k = \frac{(\sigma_1 - 6a_k)\left(108a_k^3 - 108\alpha_3 - 54\sigma_1 a_k^2 - \sigma_1^3 - 6(\sigma_1^2 - 6\sigma_2)a_k + 6\sigma_1\sigma_2 - 27\sigma_3\right)}{108\left(6a_k^5 - 5\sigma_1 a_k^4 + 4\sigma_2 a_k^3 - 3\sigma_3 a_k^2 + 2\sigma_4 a_k - \sigma_5\right)} \quad (k = \overline{1,6}),$$

$$\alpha_1 = -\frac{\sigma_1}{2},\ \beta_1 = \frac{\sigma_1^2}{6},\ \beta_2 = -2\alpha_3 - \frac{\sigma_3}{2},\ \beta_3 = \frac{\sigma_4}{3} - \frac{\sigma_1}{324}\left(108\alpha_3 + \sigma_1^3 - 6\sigma_1\sigma_2 + 27\sigma_3\right),$$

$$\sigma_1^5 + 27\sigma_3\sigma_1^2 + 324\sigma_5 = 6\sigma_2\sigma_1^3 + 108\sigma_1\sigma_2.$$

Параметр α_3 определяется как решение уравнения второй степени

$$\frac{1}{2}\alpha_3\left(4\alpha_3 + \sigma_3\right) + \frac{1}{5832}\left(\sigma_1^2 - 6\sigma_2\right)\left(\sigma_1\left(108\alpha_3 + \sigma_1^3 - 6\sigma_1\sigma_2 + 27\sigma_3\right) - 108\sigma_4\right) - \sigma_6 = 0.$$

Замечание 1. Подробный вывод условий, который отсутствует в работе Шази [3], приведен в работах [9], [11]. Решение уравнения (4) с постоянными коэффициентами $a_k(k=\overline{1,6})$ приведено в работе [10].

Результаты исследований и их обсуждение. Построим новую эквивалентную систему для дифференциального уравнения (4) при условии, что его коэффициенты a_k $(k=\overline{1,6})$ являются постоянными величинами [12], [13]. Уравнения (8) при таком предположении примут вид

$$\left(\frac{5}{2}A_k-\sum_j\frac{1}{a_k-a_j}\right)B_k+\sum_j\left(\frac{1}{2}A_k+\frac{1}{a_k-a_j}\right)B_j=0 \quad (k,j=\overline{1,6};j\neq k).$$

Последняя система относительно неизвестных B_k $(k=\overline{1,\ 6})$ является линейной однородной, главный определитель которой не равен нулю, а, следовательно, $B_k=0$ $(k=\overline{1,\ 6})$. Из первого уравнения системы (6) следует, что в этом случае функция $D=0$. Так как $a_k(k=\overline{1,6})$ – постоянные величины, то система (10) примет вид

$$F_k\prod_j(a_k-a_j)=0 \quad (k,j=\overline{1,6};j\neq k).$$

Откуда получаем, что $F_k=0$ $(k=\overline{1,\ 6})$. В результате уравнение (4) запишется в виде

$$w'''=\sum_{k=1}^{6}\frac{w'w''+A_k(w')^3+\mathrm{c}_kw'}{w-a_k}+E\ w'. \tag{15}$$

Пусть коэффициенты уравнения (15) связаны соотношением $\sum\limits_{k=1}^{6}a_k=0$ и точки, соответствующие величинам a_k $(k=\overline{1,6})$, расположены на комплексной плоскости симметрично относительно начала координат. Рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} w''=f_1(z,w)w'^2+f_2(z,w)v+f_3(w),\\ v'=-2f_1(z,w)w'v, \end{cases} \tag{16}$$

где $f_i(i=\overline{1,3})$– функции по z и w. Из сделанного предположения о симметричности коэффициентов a_k $(k=\overline{1,6})$ и из определения основных симметрических многочленов σ_k $(k=\overline{1,6})$ получаем, что

$$\sigma_1=\sigma_3=\sigma_5=0. \tag{17}$$

Продифференцируем первое уравнение системы (16) по z и подставим его правую часть уравнения (15) вместо w'''. Подставим также правые части уравнений системы (16) в уравнение (15) вместо w''и v'. Приравняем нулю коэффициенты при одинаковых степенях функций w и v. В результате получим систему дифференциальных уравнений для отыскания коэффициентов $f_i(i=\overline{1,3})$ системы (16)

$$\begin{gathered} f_2\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{w-a_k}-\frac{\partial f_2}{\partial w}=0,\quad \frac{\partial f_2}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial f_1}{\partial z}=0,\\ -2f_1^2+f_1\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{w-a_k}+\sum_{k=1}^{6}\frac{A_k}{w-a_k}-\frac{\partial f_1}{\partial w}=0,\\ \mathrm{e}-2f_3f_1^{+}f_3\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{w-a_k}+\sum_{k=1}^{6}\frac{C_k}{w-a_k}+\frac{\partial f_3}{\partial w}=0. \end{gathered} \tag{18}$$

Из первых двух уравнений системы (18) находим функцию $f_2^{(}z,w)$

$$f_2^{(}z,w) = \prod_{k=1}^{6} (w - a_k) \cdot C_2, \tag{19}$$

где C_2 – произвольная постоянная. Из третьего уравнения системы (18) находим функцию $f_1 = f_1(w)$, которую подставим в четвертое уравнение системы (18). В результате получим уравнение Риккати, для которого найдем шесть частных решений вида

$$T(w) = \frac{b_0 w^5 + b_1 w^4 + b_2 w^3 + b_3 w^2 + b_4 w + b_5}{w^6 - w^5\sigma_1 + w^4\sigma_2 - w^3\sigma_3 + w^2\sigma_4 - w\sigma_5 + \sigma_6}, \tag{20}$$

соответствующих шести наборам значений a_k $(k = \overline{1,6})$. Приведем ниже значения параметров σ_k $(k = \overline{1,6})$ и b_j $(j = \overline{0,5})$ и вид функции $f_1^{(}z,w)$ для соответствующего частного решения (20):

1) $b_2 = \frac{6}{17}\left(16 \pm \sqrt{154}\right)\alpha_2$, $b_3 = b_5 = 0$, $b_4 = \frac{2}{17}\left(1 \pm \sqrt{154}\right)\alpha_2^2$, $\sigma_6 = -\frac{1}{289}\left(155 \mp 2\sqrt{154}\right)\alpha_2^3, \sigma_2 = \frac{\alpha_2}{17}\left(49 \pm 2\sqrt{154}\right)$, $\sigma_4 = -\frac{\alpha_2^2}{2023}\left(49 \pm 2\sqrt{154}\right)^2$;

$$f_1(z,w) = \frac{34w}{17w^2 + \alpha_2(1 \mp \sqrt{154})} + \frac{e^{\nu_1(w)}}{c + 2\int e^{\nu_1(w)}}, \tag{21}$$

где c — произвольная постоянная и

$$\begin{aligned}\nu_1(w) = \textstyle\int &\left(-9826w^7 - 578(95 \pm 7\sqrt{154})w^5\alpha_2 + 170(155 \mp 2\sqrt{154})w^3\alpha_2^2 + \right.\\ &\left.+6(4807 \pm 89\sqrt{154})w\alpha_2^3\right)/\left(17w^2 + \alpha_2 \mp \sqrt{154}\alpha_2\right)\left(289w^6 + 17(49 \pm \right.\\ &\left.\pm 2\sqrt{154})w^4\alpha_2 - (431 \pm 28\sqrt{154})w^2\alpha_2^2 - (2\sqrt{154} \mp 155)\alpha_2^3\right) dw;\end{aligned}$$

2) $\sigma_4 = \frac{1}{4}\left(14\alpha_2\sigma_2 - 3\sigma_2^2 - 15\alpha_2^2\right)$; $b_2 = 3\left(\sigma_2 - \alpha_2\right)$, $b_3 = b_5 = 0$, $b_4 = \alpha_2\left(\sigma_2 - 3\alpha_2\right)$, $\sigma_6 = -\frac{\alpha_2}{4}\left(\sigma_2 - 3\alpha_2\right)^2$.

$$f_1(z,w) = \frac{2w(6\alpha_2 c + w(4cw - 3)) - 2\alpha_2 - 4c\sigma_2 w}{9\alpha_2^2 c + 4w^3(cw - 1) + c\sigma_2(\sigma_2 - 6\alpha_2 - 4w^2) + 4\alpha_2 w(3cw - 1)}, \tag{22}$$

где c — произвольная постоянная;

3) $\sigma_2 = \frac{\alpha_2}{4}\left(7 \pm i\sqrt{11}\right)$, $\sigma_4 = -\frac{\alpha_2^2}{64}\left(7 \pm i\sqrt{11}\right)^2$; $b_2 = \frac{3}{4}\left(3 \pm i\sqrt{11}\right)\alpha_2$, $b_3 = b_5 = 0$, $b_4 = \frac{1}{4}\left(-5 \pm i\sqrt{11}\right)\alpha_2^2, \sigma_6 = \frac{1}{32}\left(-7 \pm 5i\sqrt{154}\right)\alpha_2^3$.

$$f_1(z,w) = \frac{16w}{8w^2 + \alpha_2(5 \mp i\sqrt{11})} + \frac{e^{-8\nu_2(w)}}{c + 2\int e^{-8\nu_2(w)}}, \tag{23}$$

где c — произвольная постоянная и

$$\begin{aligned}\nu_2(w) = \textstyle\int w &\left(64w^6 + 8(13 \pm 7i\sqrt{11})w^4\alpha_2 + 10(-7 \pm 5i\sqrt{11})w^2\alpha_2^2 + \right.\\ &\left.+9(-11 \pm 4i\sqrt{11})\alpha_2^3\right)/\left(8w^2 + 5\alpha_2 \mp i\sqrt{11}\alpha_2\right)\left(32w^6 + 8(7 \pm \right.\\ &\left.\pm i\sqrt{11})w^4\alpha_2 + (19 \pm 7i\sqrt{11})w^2\alpha_2^2 - (7 \mp 5i\sqrt{11})\alpha_2^3\right) dw;\end{aligned}$$

4) $\sigma_2 = 2\alpha_2$, $\sigma_4 = \alpha_2^2$;

$$f_1(z,w) = \frac{1}{w}\left(1 + \frac{1}{cw - 2} + \frac{w^2}{w^2 + \alpha_2}\right), \tag{24}$$

где c — произвольная постоянная;

5) $b_2 = \alpha_2 + \sigma_2$, $b_3 = 2\alpha_2\sqrt{2\alpha_2 - \sigma_2}$, $b_4 = \alpha_2\left(\sigma_2 - \alpha_2\right)$, $b_5 = \alpha_2^2\sqrt{2\alpha_2 - \sigma_2}$,
$\sigma_4 = \alpha_2\left(2\sigma_2 - 3\alpha_2\right)$, $\sigma_6 = \alpha_2^2\left(\sigma_2 - 2\alpha_2\right)$.

$$f_1(z,w) = \frac{2c\sigma_2 - 4c\alpha_2 + \sqrt{2\alpha_2 - \sigma_2}e^{\nu_2(w)}}{(w^2 - 2\alpha_2 + \sigma_2)(2c\sqrt{2\alpha_2 - \sigma_2} + e^{\nu_2(w)})} + w\left(\frac{1}{w^2 + \alpha_2} + \frac{1}{w^2 - 2\alpha_2 + \sigma_2}\right), \tag{25}$$

где c — произвольная постоянная и

$$\nu_1(w) = \frac{4\sqrt{2\alpha_2 - \sigma_2} arctg\left(w/\sqrt{\sigma_2 - 2\alpha_2}\right)}{\sqrt{\sigma_2 - 2\alpha_2}};$$

6) $b_2 = -\alpha_2 + \sigma_2,\ b_3 = -2\alpha_2\sqrt{\alpha_2 - \sigma_2},\ b_4 = -\alpha_2\left(\sigma_2 + \alpha_2\right),\ b_5 = \alpha_2^2\sqrt{\alpha_2 - \sigma_2},$

$$\sigma_4 = -\alpha_2\sigma_2,\ \sigma_6 = -\alpha_2^3.$$

$$\begin{aligned} f_1(z,w) = \tfrac{1}{w^4 + w^2\alpha_2 + \alpha_2^2 + w^2\sigma_2}(2w^3 + w\alpha_2 - w^2\sqrt{\alpha_2 - \sigma_2} + \alpha_2\sqrt{\alpha_2 - \sigma_2} + w\sigma_2 - \\ - \tfrac{2(\alpha_2 - w^2)\sqrt{\alpha_2 - \sigma_2}}{1 + 8c_1 e^{\nu_3(w)}\sqrt{\alpha_2 - \sigma_2}}, \end{aligned} \tag{26}$$

где c — произвольная постоянная и

$$\nu_3(w) = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{\alpha_2 - \sigma_2}}{\xi}\left(\frac{arctg\left(\frac{\sqrt{2}w}{\sqrt{\alpha_2 + \sigma_2 - \xi}}\right)(3\alpha_2 + \sigma_2 - \xi)}{\sqrt{\alpha_2 + \sigma_2 - \xi}} - \frac{arctg\left(\frac{\sqrt{2}w}{\sqrt{\alpha_2 + \sigma_2 + \xi}}\right)}{\sqrt{\alpha_2 + \sigma_2 + \xi}\ (3\alpha_2 + \sigma_2 + \xi)}\right),$$

$$\xi = \sqrt{-3\alpha_2^2 + 2\alpha_2\sigma_2 + \sigma_2^2}.$$

Зная вид функции $f_1(z,\, w)$ из формул (21)–(26), определим функцию $f_3(w)$ из пятого уравнения системы (18) как решение линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка. Подставив затем найденные функции $f_i(z,w)$ $(i = \overline{1,\, 3})$ в систему (16), найдем ее явный вид.

Замечание 2. Построенная система (16) будет эквивалентной дифференциальному уравнению (15) в следующем смысле: если продифференцировать первое уравнение системы (16) и затем подставить вместо w''', w'' и v' их значения в уравнение (15), то мы получим тождество.

Проверим выполнение этого условия эквивалентности системы (16) уравнению (15). Продифференцируем первое уравнение системы (16) по z и подставим правые части равенств системы (16) в уравнение (15). Сгруппируем слагаемые относительно выражений $w'', w'v, (w')^2, (w')^3, w', v$. После упрощений получим, что коэффициенты при выражениях $w'v,\ v,\ (w')^2, (w')^3, w'$ равны левым частям системы (18). Что и требовалось доказать.

Теорема. Пусть коэффициенты уравнения (15) удовлетворяют условию $\sum\limits_{k=1}^{6} a_k = 0$ и точки, соответствующие $a_k (k = \overline{1, 6})$, расположены симметрично относительно начала координат. Если для параметров $\sigma_2,\ \sigma_4,\ \alpha_2$ имеет место одно из соотношений

$$\sigma_2 = \frac{\alpha_2}{17}\left(49 \pm 2\sqrt{154}\right),\ \ \sigma_4 = -\frac{\alpha_2^2}{2023}\left(49 \pm 2\sqrt{154}\right)^2;$$

$$\sigma_2 = \frac{\alpha_2}{4}\left(7 \pm i\sqrt{11}\right),\ \ \sigma_4 = -\frac{\alpha_2^2}{64}\left(7 \pm i\sqrt{11}\right)^2;$$

$$\sigma_4 = \frac{1}{4}\left(14\alpha_2\sigma_2 - 3\sigma_2^2 - 15\alpha_2^2\right);$$

$$\sigma_2 = 2\alpha_2,\ \ \sigma_4 = \alpha_2^2;$$

$$\sigma_4 = \alpha_2\left(2\sigma_2 - 3\alpha_2\right);$$

$$\sigma_4 = -\alpha_2\sigma_2,$$

то уравнение (15) эквивалентно системе вида (16), где функция $f_2(z,w)$имеет вид (19), $f_1(z,w)$ определяются соответственно одной из формул (20)–(25), $f_3(z,w)$— решение линейного дифференциального уравнения $(18)_5$.

Замечание 3. Построение эквивалентной системы для коэффициентного соотношения $\sigma_4 = -\alpha_2\sigma_2$ проведено в работе [12]. Для остальных пяти случаев (21)–(25) применим аналогичный метод.

С помощью так построенной системы (16) можно свести интегрирование дифференциального уравнения (15) к интегрированию линейного дифференциального уравнения первого порядка. Действительно, поскольку получившаяся система (16) является автономной, то из второго уравнения этой системы найдем

$$v = c_1 exp\left(-2\int f_1(w)dw\right),$$

где c_1 – произвольная постоянная. Подставим найденное выражение в первое уравнение системы (16), введем замену

$$(w'(z))^2 = y(w), \quad w''(z) = \frac{1}{2}y'(w). \tag{27}$$

В результате получим линейное дифференциальное уравнение вида

$$y'(w) = 2\left(f_1(w)y(w) + f_2(w)exp\left(-2\int f_1(w)dw\right) + f_3(w)\right),$$

которое интегрируется и его общее решение имеет вид

$$y(w) = c_2 \cdot exp\left(-2\int f_1(w)dw\right) \cdot \int\left(\mathrm{c}_1 f_2(w) + f_3(w)exp\left(2\int f_1(w)dw\right)\right)dw,$$

где $c_1,\ c_2$ – произвольные постоянные. Используя замену (27), найдем функцию $w(z)$ в квадратурах в замкнутой форме, которая является решением системы (16) и уравнения (15).

Пример. Зададим некоторый набор значений полюсов $a_k,\ (k = \overline{1,6})$

$$a_1 = 3, a_2 = 1, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = -\frac{1}{3}, a_5 = -1, a_6 = -3. \tag{28}$$

Для значений $a_k,\ (k = \overline{1,6})$ (28) выполняется соотношение $\sigma_4 = -\alpha_2\sigma_2$ и, следовательно, уравнению (15) с такими $a_k, (k = \overline{1,6})$ соответствует система дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}
w'' = \tfrac{18w^3+93w^2+118w+31}{9w^4+62w^3+118w^2+62w+9}w'^2 + v(w-3)(w-1)\left(w-\tfrac{1}{3}\right)\times \\
\times\left(w+\tfrac{1}{3}\right)(w+1)(w+3) - \Big((w-1)\big(2(3w-1)\big(12(3E+4)w^3 + (163E-312)w^2 + \\
+2(85E-216)w + 40E + 36w^4 - 108\big) - 15c_2\left(27w^3+133w^2+158w+40\right)\big) + \\
+c_1(3w-1)\left(81w^3+393w^2+454w+112\right)\Big)\left(24\left(\left(3w^2+10w+3\right)^2 + 2\left(w^3+w\right)\right)\right)^{-1},
\end{gathered}$$

$$v' = -2\frac{18w^3+93w^2+118w+31}{9w^4+62w^3+118w^2+62w+9}w'v, \tag{29}$$

где c_1, c_2, E– коэффициенты уравнения (15).

Проинтегрируем систему (29), например, для значений параметров $c_1 = 1,\ c_2 = -1,\ E = 1$. Решая второе уравнение системы, находим

$$v = \frac{C_1}{9w^4+62w^3+118w^2+62w+9}, \tag{30}$$

где C_1 – произвольная постоянная. Подставим затем соотношение (30) в первое уравнение системы (29), которое после упрощений примет вид

$$\begin{gathered}
w'' = \tfrac{w^2}{72}\left(728C_1 + 6696w'^2 + 5676\right) + (72C_1 - 648)w^6 + (7884C_1 - 728)w^4 - 72\mathrm{C}_1 + \\
+w^3\left(1296w'^2 - 15288\right) + w\left(8496w'^2 - 6432\right) + 2232w'^2 - 648w^5 - \\
-2400)\big/\left(9w^4+62w^3+118w^2+62w+9\right).
\end{gathered} \tag{31}$$

Применим замену вида (27) для уравнение (31). В результате получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции $y(w)$. После интегрирования этого линейного уравнения и возвращения к исходной функции $w(z)$ получим уравнение

$$w'^2 = 9\mathrm{C}_2 w^4 + \left(62\mathrm{C}_2 - \frac{2}{9}(\mathrm{C}_1 - 9)\right) w^3 + (118\mathrm{C}_2 + 1) w^2 - \left(\frac{5}{3} + \frac{2\mathrm{C}_1}{9} - 62\mathrm{C}_2\right) w + \frac{5}{6} + 9\mathrm{C}_2, \quad (32)$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Общий интеграл уравнения (32) примет вид

$$\begin{aligned} &6\sqrt{2}\Bigg((r_1 - r_2) F\left[Arc\sin\sqrt{\tfrac{(r_2-r_4)(w-r_1)}{(r_1-r_4)(w-r_2)}}\ \middle|\ \tfrac{(r_2-r_3)(r_1-r_4)}{(r_1-r_3)(r_2-r_4)}\right]\ \sqrt{\tfrac{(w-r_1)(w-r_2)}{(r_1-r_3)}}\times \\ &\times\sqrt{(w-r_3)(w-r_4)}\Bigg)\cdot\big(3\,(54C_2+5) - 2\,(2C_1 - 558C_2 + 15)\,w + \\ &+18\,(118C_2+1)\,w^2 - 4\,(C_1 - 279C_2 - 9)\,w^3 + 162C_2 w^4\big)^{-1/2} = \\ &= (r_2 - r_1)\,(r_2 - r_4)\,(\pm z + C_3)\,, \end{aligned} \quad (33)$$

где $F[\phi|m]$ – неполный эллиптический интеграл первого рода [14], а именно:

$$F[\phi|m] = \int_0^{\phi} \left(1 - m\,\sin^2(\theta)\right)^{-1/2} d\theta, \quad -\pi/2 < \phi < \pi/2,$$

$$\begin{aligned} &r_i = Root[15 + 162C_2 - (30 + 4C_1 - 1116C_2)\,\#1 + (18 + 2124C_2)\,\#1^2 + \\ &+ (36 - 4C_1 + 1116C_2)\,\#1^3 + 162C_2\#1^4, i] \;\; (i = 1, 2, 3, 4). \end{aligned}$$

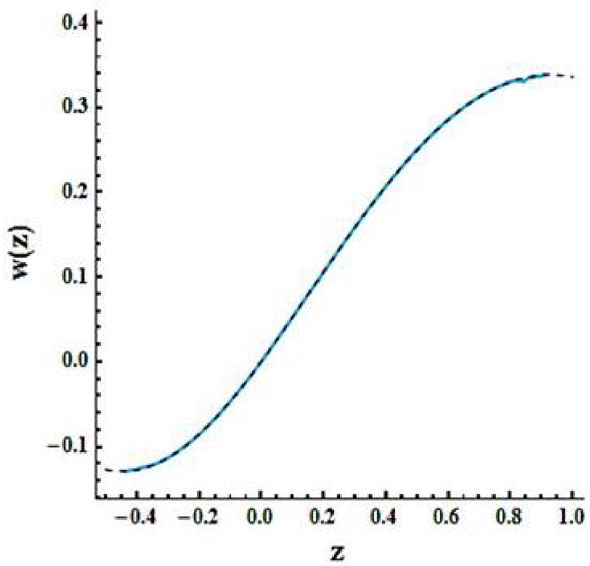

Рис. 1. График функции $w(z)$

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (15) с начальными условиями

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0.5, \quad w''(0) = 0.5. \quad (34)$$

Для системы (29) начальные условия (34) примут вид

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0.5, \quad v(0) = -\frac{361}{108}.$$

Найдем соответствующие значения произвольных постоянных C_1, C_2, C_3

$$C_1 = -\frac{361}{12},\ C_2 = -\frac{7}{108},\ \mathrm{C}_3 \approx 2,96809270936 \times 10^{-9}.$$

Замечание 4. Точное значение C_3 выражается через Root-объекты [15], здесь приведено лишь его приближенное значение. Вид полученного частного решения изображен на рис. 1.

Резюме. В данной работе построены системы дифференциальных уравнений третьего порядка, эквивалентные дифференциальному уравнению Шази с шестью полюсами при условии, что все его коэффициенты являются постоянными. Приведены коэффициентные соотношения, которые устанавливают эквивалентность построенных систем и исходного дифференциального уравнения. Интегрируя найденные системы для заданного набора постоянных полюсов, удается проинтегрировать нелинейное уравнение третьего порядка (15) в квадратурах в замкнутой форме.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Добровольский, В. А.* Очерки развития аналитической теории дифференциальных уравнений / В. А. Добровольский. – Киев : Вища школа, 1974. – 456 с.

[2] *Голубев, В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / В. В. Голубев. – М. ; Л. : ГИТТЛ, 1950. – 436 с.

[3] *Chazy, J.* Sur les equations differentielles du troisieme order et d'ordre superieur, don't l'integrale generale a ses points critiques fixes / J. Chazy // Acta Math. – 1911. – Vol. 34. – P. 317–385.

[4] *Орлов, В. Н.* Метод приближенного решения первого, второго дифференциальных уравнений Пенлеве и Абеля / В. Н. Орлов. – М. : МГПУ, 2013 – 174 с.

[5] *Орлов, В. Н.* Метод приближенного решения скалярного и матричного дифференциальных уравнений Риккати / В. Н. Орлов. – Чебоксары : Перфектум, 2012. – 110 с.

[6] *Лукашевич Н. А.* К теории уравнения Шази / Н. А. Лукашевич // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29. – № 2. – С. 353–357.

[7] *Ляликова, В. И.* Специальное дифференциальное уравнение третьего порядка с неподвижными критическими особыми точками / В. И. Ляликова // Дифференц. уравнения. – 1984. – Т. 20. – № 6. – С. 1090–1092.

[8] *Лукашевич Н. А.* Уравнения третьего порядка без подвижных критических точек (п.к.т.)// Дифференц. уравнения. – 1982. –Т. 18. – № 5. – С. 778–785.

[9] *Мартынов, И. П.* О решении системы уравнений Шази / И. П. Мартынов, А. В. Чичурин // Нелінійні коливання. – 2009. – Т. 12. – № 1. – С. 92–98.

[10] *Чичурин, А. В.* О точных решениях нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка с шестью особыми точками / А. В. Чичурин // Динамика неоднородных систем : тр. ИСА РАН ; ред. Ю. С. Попков. – Москва, 2010. – Т. 56. – № 1. – С. 20–29.

[11] *Чичурін, О.* Про дослідження одного класу рівнянь Шазі / О. Чичурін // Вісник КНУ ім. Т. Шевченка. Сер. Математика. Механика. – 2010. – № 24. – С. 14–20.

[12] *Швычкина, Е. Н.* О представлении дифференциального уравнения Шази с шестью постоянными полюсами в виде системы двух дифференциальных уравнений с помощью системы Mathematica / Е. Н. Швычкина // Динамика неоднородных систем : тр. ИСА РАН ; ред. Ю. С. Попков. – Москва, 2010. – Т. 53. – № 1. – С. 250–258.

[13] *Shvychkina, H.* Building the third order differential system with Mathematica / H. Shvychkina // Computer Algebra Systems in Teaching and Research. Differential Equations, Dynamical Systems and Celestial Mechanics; Eds. : L. Gadomski [and others]. – Siedlce, 2011. – P. 136–140.

[14] *Янке, Э.* Специальные функции. Формулы, графики, таблицы / Э. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1968. – 344 с.
http://reference.wolfram.com/mathematica/ref/Root.html.

Чичурин Александр Вячеславович,

доктор физико-математических наук, профессор, Европейский университет информатики и экономики, г. Варшава

`e-mail:` achichurin@gmail.com

Швычкина Елена Николаевна,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Брестский государственный технический университет, г. Брест

`e-mail:` shvychkina@yandex.ru

A. V. Chichurin, A. N. Shvychkina

ON INTEGRABLE SYSTEMS OF THE THIRD ORDER WHICH ARE EQUIVALENT OF THE CHAZY EQUATION WITH SIX FIXED POLES

European University of Information Technology and Economics

Brest State Technical University

Abstract. In the paper we construct a system of two differential equations that is equivalent of the Chazy differential equation of the third order with six fixed poles. Coefficients of the constructed systems are found by the analytical method. Example of the equivalent system for the given set of six fixed poles is considered.

Keywords: Chazy differential equation, equivalent systems of the third order, movable critical singularities.

REFERENCES

[1] *Dobrovolsky, V. A.* Sketches of development of the analytical theory of the differential equations / V. A. Dobrovolsky. – Kiev : Vishcha school, 1974. – 456 p.

[2] *Golubev, V. V.* Lectures on the analytical theory of the differential equations / V. V. Golubev. – M. ; L. : GITTL, 1950. – 436 p.

[3] *Chazy, J.* Sur les equations differentielles du troisieme order et d'ordre superieur, don't l'integrale generale a ses points critiques fixes / J. Chazy // Acta Math. – 1911. – Vol. 34. – P. 317–385.

[4] *Orlov, V. N.* Method of the approximate solution of the first, second differential equations of Painleve and Abel / V. N. Orlov. – M. : МГПУ, 2013 – 174 p.

[5] *Orlov, V. N.* Method of the approximate solution of the scalar and matrix differential equations of Rikkati / V. N. Orlov. – Cheboksary : Perfektum, 2012. – 110 p.

[6] *Lukashevich, N. A.* To the theory of the equation of Shazi / N. A. Lukashevich // Differents. equations. – 1993. – Vol. 29. – № 2. – P. 353–357.

[7] *Lyalikova, V. I.* The special differential equation of the third order with motionless critical special points / V. I. Lyalikova // Differents. equations. – 1984. – Vol. 20. – № 6. – P. 1090–1092.

[8] *Lukashevich, N. A.* The equations of the third order without mobile critical points / N. A. Lukashevich // Differents. equations. – 1982. – Vol. 18. – № 5. – P. 778–785.

[9] *Martynov, I. P.* About the decision of system of the equations of Shazi / I. P. Martynov, A. V. Chichurin // Neliniyni коливання. – 2009. – Vol. 12. – № 1. – P. 92–98.

[10] *Chichurin, A. V.* About exact solutions of the nonlinear differential equation of the third order with six special points / A. V. Chichurin // Dynamics of non-uniform systems : work IZA of the Russian Academy of Sciences; edition Yu. S. Popkov. – M., 2010. – Vol. 56. – № 1. – P. 20–29.

[11] *Chichurin, O.* About doslidzhennya to one class rivnyan Shazi / O. Chichurin // Visnik KNU of T. Shevchenk. Mathematics series. Mechanics. – 2010. – № 24. – P. 14–20.

[12] *Shvychkina, E. N.* About representation of the differential equation of Shazi with six constant poles in the form of system of two differential equations by means of Mathematica system / E. N. Shvychkina // Dynamics of non-uniform systems : work IZA of the Russian Academy of Sciences; edition Yu. S. Popkov. – M., 2010. – Vol. 53. – № 1. – P. 250–258.

[13] *Shvychkina, H.* Building the third order differential system with Mathematica / H. Shvychkina // Computer Algebra Systems in Teaching and Research. Differential Equations, Dynamical Systems and Celestial Mechanics; Eds. : L. Gadomski [and others]. – Siedlce, 2011. – P. 136–140.

[14] *Janka, E.* Special functions. Formulas, schedules, tables / E. Janka, F. Emde, F. Lesh. – M. : Nauka, 1968. – 344 p.

Chichurin, Alexander Vjacheslavovich

Doctor of Phys.&Math., Professor, European University of Information Technology and Economics, Warsaw, Poland

Shvychkina, Alena Nikolaevna

Candidate of Phys.&Math., Assoc. Professor, Department of Mathematics, Brest State Technical University, Brest