

Мир-Салим-заде М. В.

## ЗАРОЖДЕНИЕ ТРЕЩИНЫ В ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ, УСИЛЕННОЙ РЕГУЛЯРНОЙ СИСТЕМОЙ СТРИНГЕРОВ

(Институт математики и механики НАН Азербайджана)

*Рассмотрена задача механики разрушения о зарождении трещины в упругой изотропной среде с системой инородных поперечных прямолинейных включений. Такая среда может быть интерпретирована как неограниченная пластина, усиленная регулярной системой ребер, поперечные сечения которых представляют собой весьма узкие прямоугольники. Зародышевая трещина моделируется полосой предразрушения со связями между берегами, которая рассматривается как область ослабленных межчастичных связей материала. Краевая задача о равновесии полосы предразрушения в среде, усиленной поперечными стрингерами при действии внешних растягивающих нагрузок сводится к решению нелинейного сингулярного интегродифференциального уравнения с ядром типа Коши. Из решения этого уравнения найдены усилия в полосе зарождения трещины. Условие образования трещины формулируется с учетом критерия предельной вытяжки связей материала среды. Отдельно рассмотрен случай напряженного состояния, когда в среде имеется периодическая система полос предразрушения.*

**Введение.** Вопросам деформирования неограниченной пластины, усиленной регулярной системой ребер, поперечные сечения которых представляют собой весьма узкие прямоугольники, посвящена обширная литература [3, 5, 14, 15]. Многими исследователями значительное внимание уделялось изучению вопросов разрушения пластины, усиленной регулярной системой стрингеров [2, 7, 13, 16]. Во всех отмеченных работах авторы ограничивались рассмотрением изолированной (одной) трещины. Важное значение имеет исследование зарождения трещины.

**Постановки задачи.** Рассматривается упругая изотропная среда с системой инородных поперечных прямолинейных включений. Такая среда может быть интерпретирована как неограниченная пластина, усиленная регулярной системой ребер, поперечные сечения которых представляют собой узкие прямоугольники. На бесконечности усиленная пластина подвергается однородному растяжению вдоль стрингера напряжением  $S_y^\infty = S_0$ . Относительно стрингера принимается гипотеза об одномерном континууме, заключающая в том, что при деформации толщина стрингера считается неизменяемой, а напряженное состояние – одноосным. Стрингеры изгибу не сопротивляются и работают лишь на растяжение.

Принимаются следующие допущения:

а) в тонкостенном листовом элементе конструкции (пластине) реализуется плоское напряженное состояние;

б) подкрепляющая система стрингеров ферменного типа, ослабление их за счет постановки точек крепления не учитывается;

в) листовый элемент и подкрепляющие элементы взаимодействуют друг с другом в одной плоскости и только в точках крепления;

г) все точки крепления одинаковы, их радиус (площадка сцепления) мал по сравнению с их шагом и другими характерными размерами;

д) действие точки крепления моделируем в стрингере – действием в сплошном ребре сосредоточенной силы, приложенной в точке, соответствующей центру точки крепления, в пластине – действием сосредоточенной силы.

Считается, что точки крепления стрингеров расположены в дискретных точках  $z = \pm(2m+1)L \pm iny_0$  ( $m = 0, 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots$ ) с постоянным шагом по всей длине стрингера, симметрично относительно поверхности пластины.

Действие стрингеров в расчетной схеме заменяется неизвестными эквивалентными сосредоточенными силами, приложенными в точках соединения ребер со средой. По мере нагружения изотропной среды силовой нагрузкой в среде будут возникать зоны предразрушения, которые моделируем как области ослабленных межчастичных связей материала. Принято, что полоса предразрушения ориентирована в направлении максимальных растягивающих напряжений, возникающих в усиленной среде. Взаимодействие берегов зоны предразрушения моделируется путем введения между берегами полосы предразрушения связей, имеющих заданную диаграмму деформирования. Физическая природа таких связей и размеры области предразрушения зависят от вида материала. В общем случае он представляет собой нелинейный закон деформирования [17-19].

Задачу о напряженно-деформированном состоянии твердого деформированного тела, когда в теле имеются прослойки «перенапряженного» материала, можно свести к задаче о напряженно-деформированном состоянии в упругом теле, ослабленном разрезом, поверхности которых взаимодействуют между собой по некоторому закону. При таком подходе к решению задачи о зарождении трещины прежде всего необходимо выяснить зависимость между усилиями и перемещениями в той части деформируемого материала, где имеют место силы межчастичного взаимодействия (притяжения между берегами). В общем случае решение такой задачи наталкивается на большие трудности.

В исследуемом случае возникновение трещины представляет собой процесс перехода области предразрушения в область разорванных связей между поверхностями материала. Поскольку зона предразрушения мала по сравнению с остальной частью усиленной среды, ее можно мысленно удалить, заменив разрезом, поверхности которой взаимодействуют между собой по некоторому закону, соответствующему действию удаленного материала. При этом размер зоны предразрушения заранее неизвестен и должен быть определен в процессе решения задачи.

Исследования [12] возникновения областей с нарушенной структурой материала показывают, что в начальной стадии зоны предразрушения представляют собой узкий вытянутый слой, а затем с ростом нагрузки внезапно появляется вторичная система зон, содержащих материал с частично нарушенными связями.

Рассмотрим полосу предразрушения длиной  $2\mathbf{1}$ , расположенную на отрезке оси абсцисс  $y = 0, |x| \leq \mathbf{1}$  (рис. 1). Берега полосы предразрушения взаимодействуют, так что это взаимодействие (связи между берегами) сдерживает зарождение дефекта (трещины). Для математического описания взаимодействия берегов полосы предразрушения считаем, что между берегами имеются связи (силы сцепления), закон деформирования которых задан. При действии внешних нагрузок на пластину в связях, соединяющих берега полосы предразрушения, будут возникать усилия  $q(x)$ , имеющие, из-за симметрии задачи относительно оси абсцисс, только нормальную составляющую. Величина этих напряжений  $q(x)$  и размер  $\mathbf{1}$  полосы предразрушения заранее неизвестны и подлежат определению в процессе решения краевой задачи механики разрушения.

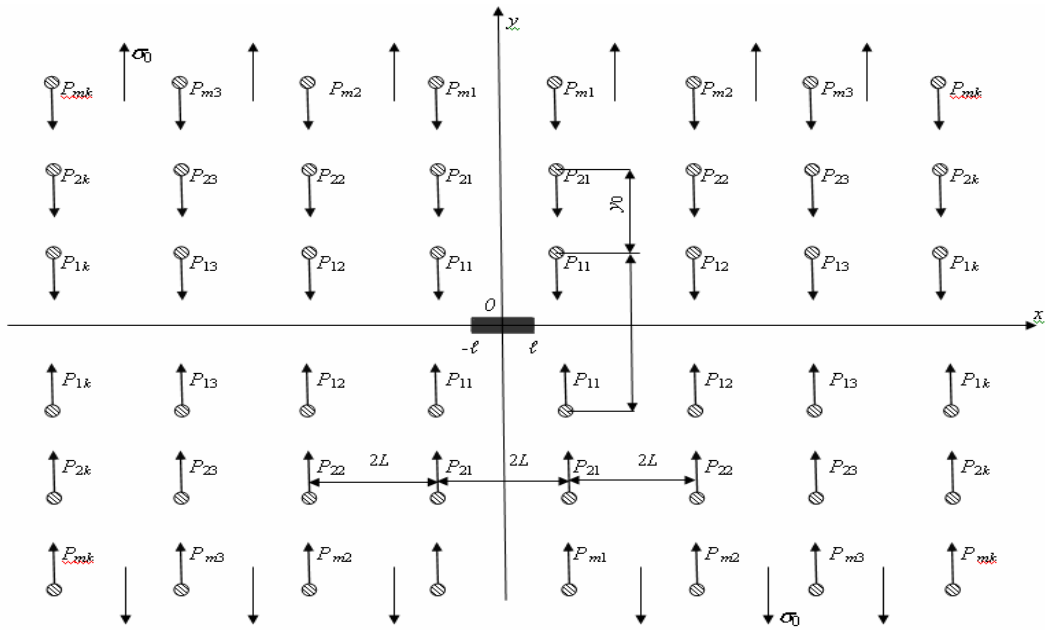


Рис. 1. Расчетная схема задачи механики разрушения о зарождении трещины

Краевые условия на берегах полосы предразрушения в рассматриваемой задаче имеют вид:

$$s_y - it_{xy} = q(x) \text{ при } y = 0, |x| \leq \mathbf{1}. \quad (1)$$

Основные соотношения поставленной задачи должны быть дополнены уравнением, связывающим перемещения раскрытия берегов полосы предразрушения и усилия в связях.

Это уравнение, без потери общности, в рассматриваемой задаче можно представить [4] в виде

$$u^+(x,0) - u^-(x,0) = C(x,q)q(x), \quad (2)$$

где  $(u^+ - u^-)$  – нормальная составляющая раскрытия берегов полосы предразрушения,  $x$  – абсциссы точек полосы предразрушения; функцию  $C(x, q)$  можно рассматривать как эффективную податливость связей, зависящую от их натяжения.

На основании формул Колосова–Мухелишвили [11] и краевых условий на берегах полосы предразрушения задача сводится к определению двух аналитических функций  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  из граничных условий

$$\Phi(x) + \overline{\Phi(x)} + x\Phi'(x) + \Psi(x) = q(x) \text{ при } y = 0, |x| \leq 1. \quad (3)$$

Для определения значений внешней нагрузки, при которой происходит зарождение трещины, нужно постановку задачи дополнить условием (критерием) появления трещины (разрыва межчастичных связей материала). В качестве такого условия принимаем критерий критического раскрытия берегов полосы предразрушения:

$$u^+ - u^- = d_c, \quad (4)$$

где  $d_c$  – характеристика сопротивления материала трещинообразованию.

Это дополнительное условие позволяет определить параметры среды, при которых происходит появление трещины.

**Решение краевой задачи.** Решение краевой задачи (3) ищем в виде

$$j(z) = j_0(z) + j_1(z), \quad y(z) = y_0(z) + y_1(z), \quad (5)$$

где

$$\Phi(z) = j'(z), \quad \Psi(z) = y'(z),$$

функции  $j_0(z)$ ,  $y_0(z)$  определяют поле напряжений и деформаций в сплошной усиленной среде без полосы предразрушения.

В рассматриваемом случае, в качестве  $j_0(z)$  и  $y_0(z)$  следует взять

$$\begin{aligned} j_0(z) &= \frac{1}{4} S_0 z - \frac{i}{2p(1+\kappa_0)h} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_{mn} \ln \frac{z - m_*L + iy_0n}{z - m_*L - iy_0n}, \\ y_0(z) &= \frac{1}{2} S_0 z - \frac{i\kappa_0}{2p(1+\kappa_0)h} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_{mn} \ln \frac{z - m_*L + iy_0n}{z - m_*L - iy_0n} - \\ &\quad - \frac{i}{2p(1+\kappa_0)h} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_{mn} \left( \frac{m_*L - iy_0n}{z - m_*L - iy_0n} - \frac{m_*L + iy_0n}{z - m_*L + iy_0n} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Штрих у знака суммы указывает на то, что при суммировании исключается индекс  $n = m = 0$ ,  $h$  – толщина пластины;  $y_0$  – шаг точек крепления,  $L$  – половина расстояния между стрингерами,  $\kappa_0$  – упругая постоянная Мухелишвили,  $m_* = 2m + 1$ ,  $P_{mn}$  – сосредоточенные силы, подлежат определению.

Комплексные потенциалы  $\Phi_1(z)$  и  $\Psi_1(z)$  ищем в явной форме, соответствующим неизвестным нормальным смещениям вдоль полосы предразрушения

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2p} \int_{-1}^1 \frac{g(t)dt}{t-z}, \quad \Psi_1(z) = \frac{1}{2p} \int_{-1}^1 \left[ \frac{g(t)}{t-z} - \frac{tg(t)}{(t-z)^2} \right] dt, \quad (7)$$

где искомая функция  $g(x)$  описывает производную раскрытия смещений на берегах полосы предразрушения

$$\frac{1+\kappa_0}{2m} g(x) = \frac{\partial}{\partial x} [u^+(x,0) - u^-(x,0)],$$

$m$  – модуль сдвига материала среды,  $\kappa_0 = (3-\nu)(1+\nu)$ ,  $\nu$  – коэффициент Пуассона материала.

К соотношениям (5) - (7) следует добавить дополнительное условие, вытекающее из физического смысла задачи

$$\int_{-1}^1 g(x) dx = 0, \quad (8)$$

которое обеспечивает однозначность смещений при обходе полосы предразрушения.

Требую, чтобы функции (5) - (7) удовлетворяли краевому условию (3) на берегах полосы предразрушения, после некоторых преобразований получим сингулярное интегральное уравнение относительно функции  $g(x)$ :

$$\frac{1}{p} \int_{-1}^1 \frac{g(t) dt}{t-x} = q(x) + f(x), \quad (9)$$

где

$$f(x) = -\left[ \Phi_0(x) + \overline{\Phi_0(x)} + x\overline{\Phi_0'(x)} + \overline{\Psi_0(x)} \right].$$

С помощью комплексных потенциалов  $\Phi_0(z)$  и  $\Psi_0(z)$  для функции  $f(x)$  получим следующее выражение

$$f(x) = -s_0 + \frac{(2+\kappa_0)}{ph(1+\kappa_0)} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn} \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) ny_0 - \frac{1}{ph(1+\kappa_0)} \times \\ \times \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn} \left[ \frac{(x-mL)^2 - n^2 y_0^2 - (x^2 - m^2 L^2)}{C_1} + \frac{(x+mL)^2 - n^2 y_0^2 - (x^2 - m^2 L^2)}{C_2} \right] ny_0,$$

где  $C_1 = (x-mL)^2 + n^2 y_0^2$ ;  $C_2 = (x+mL)^2 + n^2 y_0^2$ .

В полученное сингулярное интегральное уравнение (9) входят неизвестные величины сосредоточенных сил  $P_{mn}$  ( $m = 1, 2, \dots$ ;  $n = 1, 2, \dots$ ) и усилия в связях между берегами полосы предразрушения.

Согласно закону Гука величина сосредоточенной силы  $P_{mn}$ , действующей на каждую точку крепления со стороны  $m$ -го ребра жесткости, равна

$$P_{mn} = \frac{E_s F}{2ny_0} \Delta u_{mn}, \quad (m = 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots), \quad (10)$$

где  $E_s$  — модуль Юнга материала ребра жесткости;  $F$  - площадь поперечного сечения стрингера;  $2ny_0$  — расстояние между рассматриваемыми точками крепления;  $\Delta u_{mn}$  - взаимное смещение рассматриваемых точек крепления, равное удлинению соответствующего участка стрингера.

Обозначим через  $a$  – радиус точки крепления (площадки сцепления). Примем [9] естественное допущение о том, что взаимное упругое смещение точек  $z = mL + i(ny_0 - a)$  и  $z = mL - i(ny_0 - a)$  в рассматриваемой задаче теории упругости равно отмеченному вы-

ше взаимному смещению точек крепления  $\Delta u_{mn}$ . Это дополнительное условие совместности перемещений позволяет эффективно отыскать решение поставленной задачи. С помощью комплексных потенциалов (5) – (7) и формул Колосова-Мухелишвили [11], взаимное смещение  $\Delta u_{kr}$ , указанных точек найдем в виде

$$\begin{aligned}\Delta u_{kr} &= \Delta u_{kr}^0 + \Delta u_{kr}^1, \\ \Delta u_{kr}^0 &= \frac{1}{2ph(1+\kappa_0)m} \sum_{m,n} P_{mn} \left[ \kappa_0 \ln \frac{C_4}{C_3} + \frac{2(r-n)y_0 b(2k(k-m)L^2 + ab)}{C_3 C_4} \right] + \\ &+ \frac{s_0}{4m} (1+\kappa_0) b_1, \quad \Delta u_{kr}^1 = \frac{1+\kappa_0}{2pm} \int_{-1}^1 w(t) g(t) dt - \frac{b_1}{pm} \int_{-1}^1 \frac{(t-kL)g(t)}{A} dt, \\ C_3 &= (k-m)^2 L^2 + b^2, \quad b = (r-n)y_0 - a; \quad C_4 = (k-m)^2 L^2 + a^2, \\ b_1 &= (ry_0 - a), \quad A = (t-kL)^2 + b_1^2, \quad w(t) = \arctg \frac{b_1}{t-kL}.\end{aligned}$$

Таким образом, искомые величины сосредоточенных сил определяются из решения бесконечной системы уравнений (10).

Так как напряжения в изотропной среде, усиленной регулярной системой стрингеров ограничены, то решение сингулярного интегрального уравнения (9) следует искать в классе всюду ограниченных функций.

Для построения решения сингулярного интегрального уравнения воспользуемся методом прямого решения сингулярных уравнений [10].

Переходя к безразмерным переменным  $t = t/\mathbf{1}$ ;  $h = x/\mathbf{1}$ , представим решение в виде

$$g(h) = \sqrt{1-h^2} g_0(h),$$

где  $g_0(h)$  – ограниченная функция.

Использование квадратурных формул [10] позволяет интегральное уравнение (9) свести к системе  $M+1$  алгебраических уравнений

$$\sum_{m=1}^M \frac{g_0(t_m)}{M+1} \sin^2 \frac{pm}{M+1} \left[ \frac{1}{t_m - h_r} \right] = p [q(h_r) + f(h_r)], (r = 1, 2, \dots, M+1), \quad (11)$$

здесь  $t_m = \cos \frac{pm}{M+1}$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ),  $h_r = \cos \frac{2r-1}{2(M+1)}$ , ( $r = 1, 2, \dots, M+1$ ).

В рассматриваемом случае, когда решение интегрального уравнения (9) ищется в классе всюду ограниченных функций, оно существует при дополнительном условии [10, 18]. Полученная алгебраическая система из  $M+1$  уравнений (11), служащая для определения неизвестных  $g_0(t_1), \dots, g_0(t_M)$  и  $\mathbf{1}$ , обеспечивает удовлетворение дополнительного условия (условия разрешимости краевой задачи).

В правую часть системы (11) входят неизвестные значения напряжений  $q(h_r)$  в узловых точках, принадлежащих полосе предразрушения. Условием, служащим для определения неизвестного напряжения в связях, соединяющих берега полосы предразрушения, является соотношение (2), связывающее перемещения раскрытия берегов полосы предразрушения и усилия в связях. Используя полученное решение, соотношение (2) можно записать

$$g(x) = \frac{2m}{1 + \kappa_0} \frac{d}{dx} [C(x, q)q(x)]. \quad (12)$$

Это уравнение служит для определения усилий  $q(x)$  в связях.

Для построения недостающих алгебраических уравнений потребуем выполнения условий (12) в узловых точках  $h_m$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ), принадлежащих полосе предразрушения. При этом используем метод конечных разностей

$$C(\mathbf{1}h_{i+1}, q(\mathbf{1}h_{i+1}))q(\mathbf{1}h_{i+1}) - C(\mathbf{1}h_{i-1}, q(\mathbf{1}h_{i-1}))q(\mathbf{1}h_{i-1}) = \frac{1 + \kappa_0}{m} h_0 g_0(h_i) \quad (13)$$

$$(i = 1, 2, \dots, M - 1), h_0 = \frac{2}{M}.$$

Для узловой точки  $h_M$  имеем алгебраическое уравнение

$$3C(\mathbf{1}h_M, q(\mathbf{1}h_M))q(\mathbf{1}h_M) - 4C(\mathbf{1}h_{M-1}, q(\mathbf{1}h_{M-1}))q(\mathbf{1}h_{M-1}) + C(\mathbf{1}h_{M-2}, q(\mathbf{1}h_{M-2}))q(\mathbf{1}h_{M-2}) = \frac{1 + \kappa_0}{m} h_0 g_0(h_M).$$

Кроме того, следует учесть граничное условие  $h_0 = \pm 1$   $q(\mathbf{1}h_0) = 0$  (это соответствует условию  $u^+(\pm 1, 0) - u^-(\pm 1, 0) = 0$ ). В результате получим алгебраическую систему из  $M+1$  уравнений для определения приближенных значений  $q(h_r)$  ( $m = 1, 2, \dots, M+1$ ).

Алгебраические системы (10), (11), (13) связаны между собой и должны решаться совместно. Решение этой системы (10), (11), (13) позволяет определить значения искомой функции  $g(x)$  в узловых точках, значения усилий  $q(x)$  в связях, величины сосредоточенных сил, а также размер полосы предразрушения. Даже в частном случае линейно-упругих связей система (10), (11), (13) оказывается нелинейной из-за неизвестного размера полосы предразрушения. В связи с этим для решения полученной системы (10), (11), (13) использовался метод последовательных приближений [8].

В случае нелинейного закона деформирования связей для определения усилий в полосе предразрушения использовался также алгоритм, подобный методу упругих решений [6]. Полагаем, что закон деформирования межчастичных связей (сил сцепления) является линейным при  $(u^+ - u^-) \leq u_*$ .

Первый шаг итерационного процесса вычислений состоит в решении системы уравнений (10), (11) и (13) для линейно-упругих межчастичных связей. Последующие итерации выполняются только в тех случаях, если на части полосы предразрушения имеет место  $(u^+ - u^-) > u_*$ . Для таких итераций система решается в каждом приближении для квазиупругих связей с эффективной податливостью, переменной вдоль полосы предразрушения и зависящей от усилий в связях полученного на предыдущем шаге расчета. Расчет эффективной податливости проводится подобно определению секущего модуля в методе переменных параметров упругости [1]. Процесс последовательных приближений заканчивается, как только усилия вдоль полосы предразрушения, полученные на двух последовательных итерациях, мало отличаются друг от друга.

Нелинейная часть кривой деформирования представлялась в форме билинейной зависимости [4], восходящей участок которой соответствовал упругому деформированию связей  $(0 < (u^+ - u^-) \leq u_*)$  с их максимальным натяжением. При  $(u^+ - u^-) > u_*$  закон де-

формирования описывается нелинейной зависимостью, определяемой точками  $(u_*, s_*)$  и  $(d_c, s_c)$  (рис. 2). Причем при  $s_c \geq s_*$  имеем возрастающую линейную зависимость (линейное упрочнение, соответствующее упругопластической деформации связей).

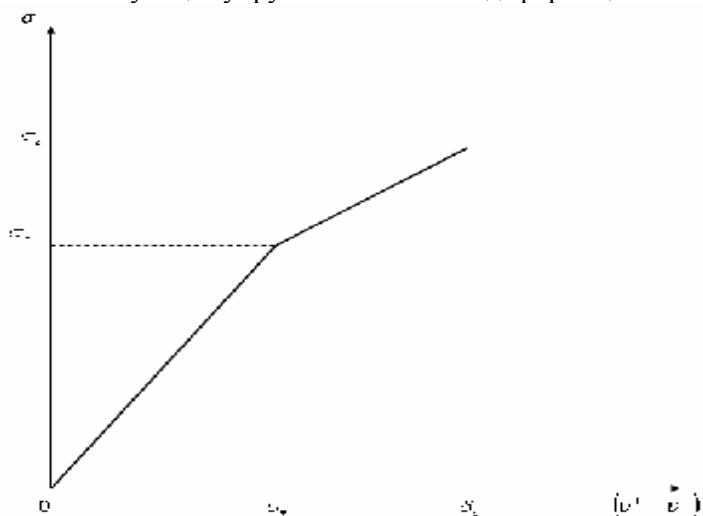


Рис. 2. Зависимость между натяжением связи  $S(x)$  и ее вытяжкой  $(u^+(x) - u^-(x))$

На рис. 3 представлены графики зависимости длины полосы предразрушения  $d = \mathbf{l}/L$  от безразмерного значения внешней нагрузки  $s_0/q_{\max}$  для различных значений параметров задачи:

$$e_1 = a/L = 0,01, \quad e = y_0/L = 0,25, \quad \nu = 0,3, \quad E = 7,1 \cdot 10^4 \text{ МПа (сплав В95)},$$

$$E_s = 11,5 \cdot 10^4 \text{ МПа (композит АІ-сталь)}, \quad N_1 = N_2 = 14, \quad F/y_0 h = 1, \quad M = 30.$$

$$u_* = 10^{-6} \text{ м}, \quad s_* = 130 \text{ МПа}, \quad s_{cr}/s_* = 2, \quad d_c = 2 \cdot 10^{-6} \text{ м}.$$

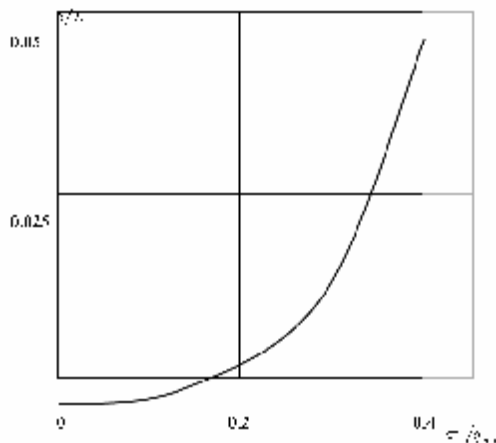
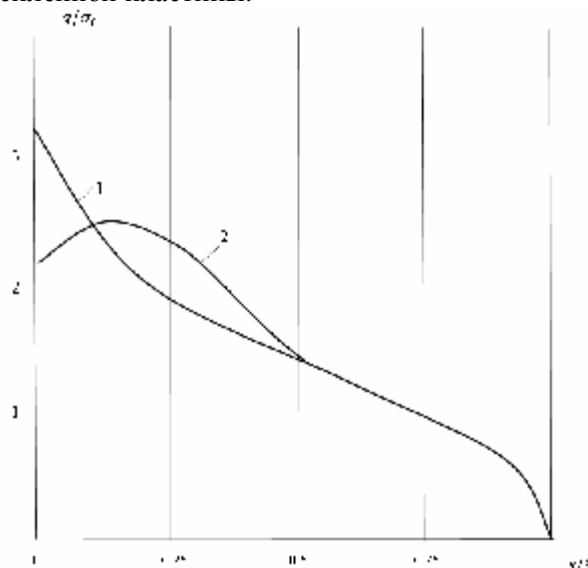


Рис. 3. Зависимость длины полосы предразрушения  $d = \mathbf{l}/L$  от безразмерного значения внешней нагрузки  $s_0/q_{\max}$



На рис. 4 представлены графики распределения усилий в связях между берегами полосы предразрушения  $q/s_0$  от безразмерной координаты  $x/l$  для тех же значений свободных параметров усиленной пластины.



**Рис. 4.** Зависимость распределения нормальных усилий  $q/s_0$  в связях между берегами полосы предразрушения: кривая 1 соответствует линейной связи, 2 – билинейной зависимости

Для определения предельного состояния, при котором происходит появление трещины, используем критическое условие (4).

Таким образом, условием, определяющим предельное значение внешней нагрузки, будет

$$C(x_0, q)q(x_0) = d_c. \quad (14)$$

В рассматриваемом случае следует ожидать, что разрыв связей будет происходить в середине полосы предразрушения.

Совместное решение алгебраических систем (10), (11), (13) и (14) дает возможность (при заданных характеристиках сопротивления материала трещинообразованию) определить критическую величину внешней нагрузки, размер полосы предразрушения  $l_c$  для состояния предельного равновесия, при котором происходит появление трещины.

На рис. 5 представлен график зависимости критической нагрузки  $s_0^*/s_*$  от относительного раскрытия  $d_*/l$  ( $d_* = pd_c m / (1 + \kappa_0) s_*$ ) в центре полосы предразрушения.

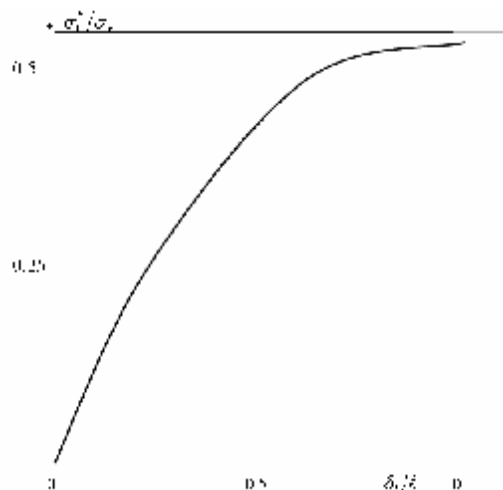


Рис. 5. Зависимость критической нагрузки  $\sigma_0^*/\sigma_*$  от относительного раскрытия  $d_*/l$  в центре полосы предразрушения

**Периодическая система полос предразрушения.** Пусть теперь в усиленной среде в процессе нагружения имеется периодическая система прямолинейных полос предразрушения длиной  $2\ell$  с периодом  $w$ , расположенных на оси абсцисс (рис. 6). Размер зон предразрушения заранее неизвестен и должен быть определен в процессе решения задачи.

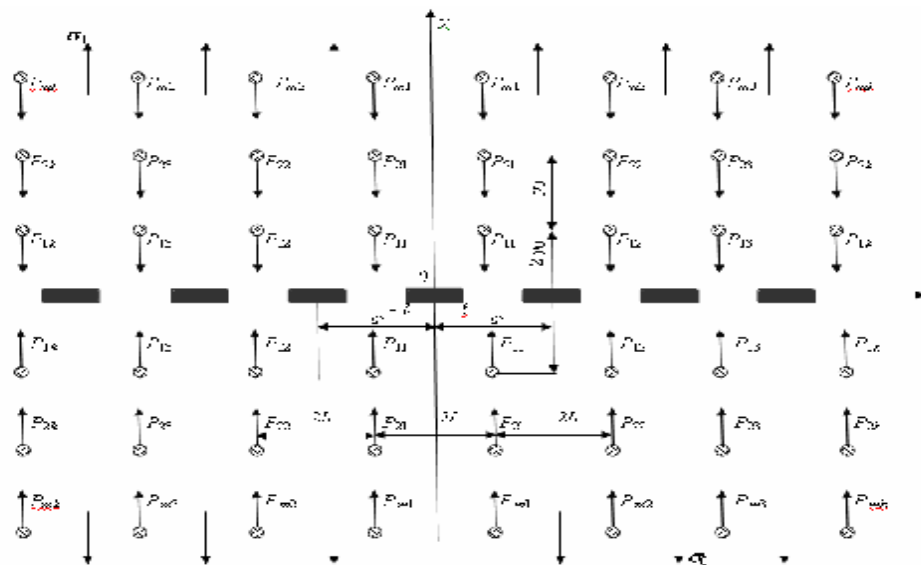


Рис. 6 Расчетная схема задачи механики разрушения для периодической системы полос предразрушения

Краевое условие на берегах периодической системы полос предразрушения имеет вид

$$s_y - it_{xy} = q(x) \text{ при } y = 0, |x - mw| \leq l. \quad (15)$$

Решается задача для этого случая аналогично одной полосе предразрушения. Комплексные потенциалы  $\Phi_1(z)$  и  $\Psi_1(z)$  ищем в виде

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2w} \int_{-1}^1 g(t) \operatorname{ctg} \frac{p}{w}(t-z) dt, \quad \Psi_1(z) = -\frac{pz}{2w^2} \int_{-1}^1 g(t) \sin^{-2} \frac{p}{w}(t-z) dt. \quad (16)$$

Требую, чтобы функции (5), (6), (16) удовлетворяли краевому условию (15), после некоторых преобразований получим сингулярное интегральное уравнение относительно функции  $g(x)$ :

$$\frac{1}{w} \int_{-1}^1 g(t) \operatorname{ctg} \frac{p}{w}(t-x) dt = q(x) + f(x). \quad (17)$$

Искомые величины сосредоточенных сил определяются из решения бесконечной системы уравнений (10). Из-за периодичности задачи она вырождается в одну бесконечную алгебраическую систему относительно  $P_{m1}$  ( $m=1, 2, \dots$ ). Соответственно по этой причине изменяться формулы для  $\Delta u_{mm}$ . Ввиду громоздкости их выражений они не приводятся.

Если воспользоваться разложением

$$\frac{p}{w} \operatorname{tg} \frac{p}{w}(t-x) = \frac{1}{t-x} - \sum_{j=0}^{\infty} g_{j+1} \frac{(t-x)^{2j+1}}{w^{2j+2}}$$

уравнение (17) можно привести к обычной форме

$$\frac{1}{p} \int_{-1}^1 \frac{g(t)}{t-x} + \frac{1}{p} \int_{-1}^1 g(t) K(t-x) dt = q(x) + f(x), \quad |x| \leq 1, \quad (18)$$

$$K(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} g_{j+1} \frac{t^{2j+1}}{w^{2j+1}}.$$

Так как напряжения в усиленной среде ограничены, то решение интегрального уравнения ищем в классе всюду ограниченных функций.

С помощью замены переменных  $t = \mathbf{1}t$ ;  $x = \mathbf{1}h$  и процедуры алгебраизации [10] сингулярное интегральное уравнение (18) при дополнительном условии (8) сведем к системе  $M$  алгебраических уравнений для определения  $M$  неизвестных  $g_r^0 = g(t_r)$  ( $r = 1, 2, \dots, M$ )

$$\frac{1}{M} \sum_{r=1}^M g(t_r) \left[ \frac{1}{t_r - h_m} + B(t_r, h_m) \right] = q(\mathbf{1}h_m) + f(\mathbf{1}h_m) \quad (m = 1, 2, \dots, M-1), \quad (19)$$

$$\sum_{r=1}^M g(t_r) = 0,$$

где

$$h_m = \cos \frac{pm}{M} \quad (m = 1, 2, \dots, M-1).$$

$$t_r = \cos \frac{2r-1}{2M} p, \quad (r = 1, 2, \dots, M),$$

$$B(t_r, h_m) = - \sum_{j=0}^{\infty} g_{j+1} \frac{1^{2j+2}}{w^{2j+2}} (t_r - h_m)^{2j+1}.$$

К системе (19) необходимо добавить условие конечности напряжений в окрестности вершин полос предразрушения (условие разрешимости краевой задачи), которое имеет вид

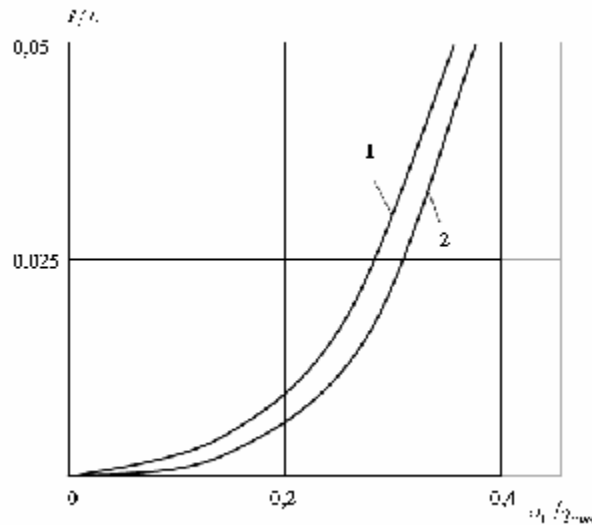
$$\sum_{m=1}^M (-1)^m g(t_m) c t g \frac{2m-1}{4M} p = 0. \quad (20)$$

Это условие служит для определения размера  $\ell$  полос предразрушения.

В правую часть системы (19) входят неизвестные значения напряжений  $q(h_m)$  в узловых точках, принадлежащих полосам предразрушения. Для их определения используем соотношение (12). Алгебраизацию уравнения (12) проводим аналогично случаю одной полосы предразрушения. В результате получим алгебраическую систему для определения приближенных значений  $q(h_m)$ . Дальнейший расчет объединенной нелинейной алгебраической системы (10), (19), (20) и аналога (13) проводится аналогично случаю одной полосы предразрушения.

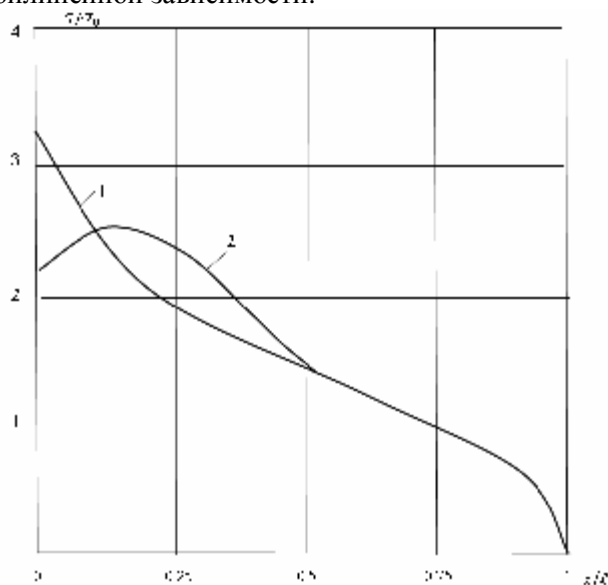
Условие, определяющее предельное значение внешней нагрузки, при которой происходит появление трещин, будет иметь вид (14).

На рис. 7 представлены графики зависимости длины полосы предразрушения  $d = \mathbf{l}/L$  от безразмерного значения внешней нагрузки  $S_0/q_{\max}$  для тех значений свободных параметров армированной среды. Здесь кривая 1 соответствует  $e = 0,15$ , а 2 – при  $e = 0,25$ .



**Рис. 7.** Зависимости длины полосы предразрушения  $d = \mathbf{l}/L$  от безразмерного значения внешней нагрузки  $S_0/q_{\max}$ : кривая 1 соответствует  $e = 0,15$ , 2 – при  $e = 0,25$ .

На рис. 8 представлены графики распределения усилий в связях между берегами полосы предразрушения  $q/S_0$  от безразмерной координаты  $x/L$ : кривая 1 – соответствует линейной связи; 2 – билинейной зависимости.



**Рис. 8.** Зависимость распределения нормальных усилий  $q/S_0$  в связях между берегами полосы предразрушения: кривая 1 соответствует линейной связи, 2 – билинейной зависимости

Взаимодействие полос предразрушения приводит к уменьшению предельных размеров полос предразрушения, допустимых значений внешней нагрузки, при которых не происходит появления трещины в армированной среде.

При достаточно малых значениях  $y_0/L$  (часто поставленные точки крепежа) предельная нагрузка, при которой происходит появление трещины, возрастает. В этом случае действие стрингеров сводится также к увеличению предельного размера полосы предразрушения, снижению усилий в связях и раскрытия берегов полосы предразрушения. Степень уменьшения, тем больше, чем выше жесткость подкрепляющего элемента и чем ближе расположены точки крепления между собой. При некоторых значениях геометрических параметров раскрытие берегов полосы предразрушения отсутствуют. Это имеет место, когда полоса предразрушения непосредственно пересекает линию стрингера.

На основе полученных результатов можно считать, что усиление упругой среды регулярной системой стрингеров может служить весьма эффективным средством, задерживающим зарождение трещины и позволяющим значительно продлить срок эксплуатации конструкции.

**Заключение.** Анализ модели зарождения дефекта типа трещины в усиленной среде в процессе нагружения сводится к параметрическому совместному исследованию разрешающей алгебраической системы (10), (11), (13) и критерия появления трещины (14) при различных значениях свободных параметров усиленной пластины.

Модель полосы предразрушения со связями между берегами позволяет исследовать основные закономерности распределения усилий в связях, раскрытие берегов полосы

предразрушения при разных законах их деформирования, оценить эффекты упрочнения среды усиленной регулярной системой стрингеров, провести анализ предельного равновесия, при котором происходит появление трещины, с помощью деформационного критерия. Такой анализ позволил определить предельный размер полосы предразрушения, допустимую внешнюю нагрузку, при которой не произойдет появления трещины в среде, усиленной регулярной системой стрингеров.

г. Баку

Поступила: 11.02.2008

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Биргер, И. А.* Общие алгоритмы решения задач теории упругости, пластичности и ползучести / И. А. Биргер // *Успехи механики деформируемых сред*. – М. : Наука, 1975. – С. 51-73.
2. *Брок, Д.* Основы механики разрушения / Д. Брок. – М. : Высшая школа, 1980. – 368 с.
3. *Ванин, Г. А.* Микромеханика композиционных материалов / Г. А. Ванин. – Киев : Наук. думка, 1985. – 302 с.
4. *Гольдштейн, Р. В.* Рост трещины по границе соединения материалов / Р. В. Гольдштейн, М. Н. Перельмутер // *Проблемы механики: Сб. статей к 90-летию со дня рождения А.Ю. Ишлинского*. – М. : Физматлит, 2003. – С. 221-238.
5. *Долгих, В. Н.* Об одной модели регулярной кусочно-однородной среды / В. Н. Долгих, Л. А. Фильшинский // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*. – 1976. – №2. – С. 158-164.
6. *Ильюшин, А. А.* Пластичность / А. А. Ильюшин. – М. : Л. : ГИТТЛ, 1948. – 376 с.
7. *Максименко, В. Н.* Влияние приклепанных ребер жесткости на развитие трещин возле отверстия / В. Н. Максименко // *Журн. прикл. механики и техн. физики*. – 1988. – №2. – С. 133-140.
8. *Мир-Салим-заде, М. В.* Трещина со связями между берегами в изотропной среде, усиленной регулярной системой стрингеров / М. В. Мир-Салим-заде // *Механика композитных материалов*. – 2005. – Т.41, №6. – С.773-782.
9. *Мирсалимов, В. М.* Некоторые задачи конструкционного торможения трещины / В. М. Мирсалимов // *ФХММ*. – 1986. – Т.22, №1. – С. 84-88.
10. *Мирсалимов, В. М.* Неоднородные упругопластические задачи / В. М. Мирсалимов. – М. : Наука, 1987. – 256 с.
11. *Мусхелишвили, Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. / Н. И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.
12. *Панасюк, В. В.* Механика квазихрупкого разрушения материалов / В. В. Панасюк. – Киев : Наук. думка, 1991. – 416 с.
13. *Партон, В. З.* Механика упругопластического разрушения. / В. З. Партон, Е. М. Морозов. – М. : Наука, 1985. – 504 с.
14. *Толкачев, В. М.* Передача нагрузки от стрингера конечной длины к бесконечной и полубесконечной пластине / В. М. Толкачев // *Докл. АН СССР*. – 1964, Т.154, №4. – С.86-88.
15. *Черепанов, Г. П.* Механика разрушения композиционных материалов / Г. П. Черепанов. – М. : Наука, 1983. – 296 с.
16. *Черепанов, Г. П.* Механика хрупкого разрушения. / Г. П. Черепанов – М. : Наука, 1974. – 640 с.
17. *Budiansky, B.* Fiber-matrix de bonding effects on cracking in aligned fiber ceramic composites / B. Budiansky, A. G. Evans, J. W. Hutchinson // *Int. J. Solid Structures*. –1995, Vol.32. №3-4. – P. 315-328.
18. *Goldstein, R. V.* Modeling of the adhesion strength and fracture kinetics of the microelectronic package polymer-polymer joints / R. V. Goldstein, V. F. Bakirov, M. N. Perelmuter // *In: Proc. Inst. Phys. Technol. Russian Ac. of Sci. V. 13. Modeling and Simulation of Submicron Technology and Defices*. – 1997. – P. 115-125.
19. *Ji, H.* Adhesion via Connector Molecules: The Many-stitch Problem / H. Ji, P. G. de Gennes // *Macromolecules*. – 1993. Vol. 26. – P. 520-525.