

Немировский Ю. В., Янковский А. П.

**ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОГО  
ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ИЗОТРОПНЫХ  
ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ОБОБЩЕННЫМ МЕТОДОМ  
РУНГЕ–КУТТЫ**

*(Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН)*

*Сформулирована задача вязкопластического динамического деформирования изотропных оболочек переменной толщины. На основе обобщения методов Рунге – Кутты разработан метод интегрирования поставленной начально-краевой задачи. Проведено сравнение результатов расчетов с аналитическим и с апробированным численным решениями; показано, что они хорошо согласуются. Эффективность разработанного метода подтверждена численными расчетами. Показано, что за счет рационального распределения толщин оболочек максимальную величину их остаточных прогибов можно уменьшить в несколько раз.*

**Ключевые слова:** *оболочки, взрывные нагрузки, неупругая динамика, вязкопластическое деформирование, жесткопластическое деформирование, рациональное профилирование*

В обзорах [5; 11; 13; 15; 17; 26] и в ряде других публикаций отмечалась важность учета вязкого пластического сопротивления при расчете конструкций, подвергающихся динамическим воздействиям высокой интенсивности. Общие определяющие соотношения для описания вязкопластического деформирования оболочек и пластин были получены в [3]. Основанные на них решения динамического деформирования тонкостенных конструкций были построены лишь для пластин [1; 18; 25]. В случае цилиндрических оболочек из идеальных жесткопластических материалов задачи динамики рассматривались либо на основе приближенных предельных соотношений [2; 14; 28; 30; 31; 32], либо точных предельных соотношений [20].

Целью настоящего исследования является разработка нового численного метода решения начально-краевой задачи динамического вязкопластического деформирования изотропных цилиндрических оболочек постоянной и переменной толщины с учетом эффекта вязкопластического упрочнения их материала и анализ влияния изменения толщины оболочек и их характерных размеров на величину их остаточных прогибов при действии нагрузок взрывного типа.

Рассмотрим вязкопластическое деформирование тонкой круговой цилиндрической оболочки переменной толщины  $2H$  и радиуса  $R$ , подчиняющейся гипотезам Кирхгофа – Лява. Свяжем с оболочкой сопряженную ортогональную криволинейную систему координат  $a_1, a_2, a_3$  так, чтобы отсчетная поверхность  $a_3 = 0$  совпадала с ее срединной поверхностью до начала деформирования. Координатные линии  $a_1, a_2$  совпадают с продольным и окружным направлениями, переменная  $a_3$  определяет расстояние от некоторой точки оболочки до этой поверхности.

Для формулировки задачи вязкопластической динамики тонких оболочек используем общеизвестные уравнения движения [24]

$$2HRr\mathbf{u}_{,tt} = R\mathbf{q} + \mathbf{L}(\mathbf{F}, \mathbf{M}, \mathbf{m}), \quad (1)$$

где

$$\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}, \quad \mathbf{q} = \{q_1, q_2, q_3\}, \quad \mathbf{L} = \{L_1, L_2, L_3\}, \quad (2)$$

$$\mathbf{F} = \{F_{11}, F_{12}, F_{22}\}, \quad \mathbf{M} = \{M_{11}, M_{12}, M_{22}\}, \quad \mathbf{m} = \{m_1, m_2\},$$

$$L_1(\mathbf{F}, \mathbf{M}, \mathbf{m}) = RF_{11,1} + F_{21,2}, \quad L_2(\mathbf{F}, \mathbf{M}, \mathbf{m}) = F_{22,2} + RF_{12,1} + (M_{22,2} + RM_{12,1} + Rm_2)/R, \quad (3)$$

$$L_3(\mathbf{F}, \mathbf{M}, \mathbf{m}) = RM_{11,1} + 2M_{12,1} + M_{22,2}/R - F_{22} + Rm_1 + m_{2,2},$$

связь между скоростями мембранных деформаций  $\mathcal{E}_{ij}$ , скоростями параметров искривления  $\mathcal{K}_{ij}$  срединной поверхности оболочки и скоростями смещений  $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$  точек этой поверхности

$$\mathcal{E}_{11} = v_{1,1}, \quad \mathcal{E}_{22} = (v_{2,2} + v_3)/R, \quad 2\mathcal{E}_{12} = 2\mathcal{E}_{21} = v_{1,2}/R + v_{2,1}, \quad \mathcal{K}_{11} = -v_{3,11}, \quad (4)$$

$$\mathcal{K}_{22} = -(v_{3,22} - v_{2,2})/R^2, \quad \mathcal{K}_{12} = \mathcal{K}_{21} = -(v_{3,12} - v_{2,1})/R, \quad v_i = u_{i,t} \quad (i = 1, 2, 3),$$

определяющие соотношения, связывающие мембранные усилия  $F_{ij}$  и моменты  $M_{ij}$  в оболочке с  $\mathcal{E}_{ml}$  и  $\mathcal{K}_{ml}$ .

$$F_{ij} = \sum_{m=1}^2 \sum_{l=1}^2 (A_{ijml} \mathcal{E}_{ml} + B_{ijml} \mathcal{K}_{ml}), \quad M_{ij} = \sum_{m=1}^2 \sum_{l=1}^2 (B_{ijml} \mathcal{E}_{ml} + C_{ijml} \mathcal{K}_{ml}), \quad i, j = 1, 2. \quad (5)$$

В уравнениях и соотношениях (1) – (5) приняты обозначения:  $q_i, m_j$  – приведенные внешние распределенные нагрузки и моменты в направлениях  $a_i, a_j$  ( $i = 1, 2, 3, j = 1, 2$ ) соответственно;  $u_i, v_i$  – перемещения и скорости смещений точек срединной поверхности оболочки в направлениях  $a_i$  ( $i = 1, 2, 3$ );  $\rho$  – объемная плотность материала оболочки; индекс после запятой означает частное дифференцирование по соответствующей переменной  $a_1, a_2$  или времени  $t$ . Уравнения движения (1) записаны для случая малых смещений  $\mathbf{u}$  точек срединной поверхности и в них не учитывается инерция вращения, которая для тонкостенных кирхгофовских конструкций вносит в решение пренебрежимо малый вклад [19].

Коэффициенты  $A_{ijml}, B_{ijml}, C_{ijml}$  в (5) нелинейно зависят от  $H$  и  $\mathcal{E}_{ml}, \mathcal{K}_{ml}$ . Эти зависимости определяются видом диаграммы  $\sigma : \mathcal{E}$ , так как согласно вязкопластической модели [9] напряжение  $\sigma$  при одноосном напряженном состоянии зависит от скорости деформации  $\mathcal{E}$  материала. Аппроксимируя зависимость  $\sigma : \mathcal{E}$  двухзвенной ломаной (могут

быть использованы и другие соотношения, например для многозвенной ломаной), получим

$$s = \begin{cases} E\epsilon & \text{при } |\epsilon| \leq \epsilon_s = S_s / E, \\ \text{sign}(\epsilon)S_s + E_s(\epsilon - \text{sign}(\epsilon)\epsilon_s) & \text{при } |\epsilon| > \epsilon_s, \end{cases} \quad (6)$$

где  $E, E_s$  – коэффициенты линейной вязкости и линейно-вязкого упрочнения материала;  $S_s$  – значение напряжения в точке перелома двухзвенной ломаной, аппроксимирующей зависимость  $s : \epsilon$  (можно трактовать как предел текучести материала). При  $E \rightarrow \infty$  получаем предельный переход к жестко-вязкопластической модели, а при  $E_s = 0, E \rightarrow \infty$  – к жесткопластической модели. В силу известного формального сходства определяющих уравнений теории упругоупругоупругих деформаций и теории вязкопластического течения [10] выражения для  $A_{ijml}, B_{ijml}, C_{ijml}$  в (5) с учетом (6) формально совпадают с аналогичными коэффициентами, полученными в [22] при аппроксимации диаграммы деформирования двухзвенной ломаной типа (6) (при этом в [22] следует принять  $n = 1/2, w_k = 0, 1 \leq k \leq N$ ); кроме того, в случае идеальной пластичности ( $E_s = 0$ , см. (6)) эти коэффициенты определены в [6]. Соответствующие выражения для  $A_{ijml}, B_{ijml}, C_{ijml}$  громоздки, поэтому не будем их здесь приводить.

Подставим соотношения (4) в определяющие уравнения (5), а последние в систему (1), тогда с учетом равенств (2), (3) получим систему разрешающих уравнений движения, записанную в операторной форме,

$$2HRr\mathbf{v}_{,t} = R\mathbf{q} + \mathbf{D}(\mathbf{v}, \mathbf{m}), \quad (7)$$

$$u_{i,t} = v_i(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, t), \quad i = 1, 2, 3, \quad (8)$$

где согласно (2) – (5)

$$\mathbf{D} = \{D_1, D_2, D_3\}, \quad D_i = L_i(\mathbf{F}(\mathbf{v}), \mathbf{M}(\mathbf{v}), \mathbf{m}), \quad i = 1, 2, 3. \quad (9)$$

В развернутом виде выражения для дифференциальных операторов  $D_i$  громоздки, поэтому не будем их здесь приводить, отметим лишь, что эти операторы совпадают с левыми частями уравнений равновесия (2.1) в [23], где нужно сделать замены  $u_i \rightarrow v_i$  ( $i = 1, 2$ ),  $w \rightarrow u_3$  и принять  $D_{ij} = E_{ij} = 0$ .

Для однозначного интегрирования системы (7), (8) необходимо использовать начальные

$$v_i(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, t_0) = v_{0i}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2), \quad i = 1, 2, 3 \quad (\mathbf{v}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, t_0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)), \quad (10)$$

$$u_i(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, t_0) = u_{0i}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2), \quad i = 1, 2, 3 \quad (\mathbf{u}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, t_0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)). \quad (11)$$

и общеизвестные граничные условия [24], которые могут быть весьма разнообразны, поэтому не будем их здесь приводить. (Если заданы кинематические граничные условия для перемещений  $u_i$ , то за счет (8) можно получить соответствующие условия для скоростей смещений  $v_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). А при задании на кромках силовых факторов следует использовать соотношения (2.2) из [23], в которых по-прежнему следует сделать замены  $u_i \rightarrow v_i$  ( $i = 1, 2$ ),  $w \rightarrow u_3$  и принять  $D_{ij} = E_{ij} = 0$ .)

Если скорости смещений  $v_i$  известны, то определение перемещений  $u_i$  из уравнений (8) при начальных условиях (11) не вызывает затруднений. Система же уравнений (7) с учетом равенств (9) является замкнутой относительно скоростей  $v_i$  системой квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа, содержащих производные от  $v_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) первого порядка по времени  $t$  и производные вплоть до 4-го порядка по переменным  $a_1, a_2$ .

Для численного интегрирования по времени  $t$  начально-краевой задачи, соответствующей системе уравнений (7), используем один из обобщенных методов Рунге – Кутты [21], а именно, двустадийный обобщенный метод Лобатто IIIA (метода трапеций), имеющий второй порядок точности по  $\tau$ , где  $\tau$  – шаг по времени  $t$ . Согласно этому методу,

$$\mathbf{v}^{n+1}(\mathbf{a}) = \mathbf{v}^n(\mathbf{a}) + t(4rHR)^{-1} \left[ R(\mathbf{q}^n(\mathbf{a}) + \mathbf{q}^{n+1}(\mathbf{a})) + \mathbf{D}(\mathbf{v}^n(\mathbf{a}), \mathbf{m}^n(\mathbf{a})) + \mathbf{D}(\mathbf{v}^{n+1}(\mathbf{a}), \mathbf{m}^{n+1}(\mathbf{a})) \right], \quad (12)$$

где

$$\mathbf{a} = \{a_1, a_2\}, \quad \mathbf{q}^n(\mathbf{a}) = \mathbf{q}(\mathbf{a}, t_n), \quad \mathbf{v}^n(\mathbf{a}) = \mathbf{v}(\mathbf{a}, t_n), \quad \mathbf{m}^n(\mathbf{a}) = \mathbf{m}(\mathbf{a}, t_n), \quad (13)$$

$$t_{n+1} = t_n + \tau, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (t_0 = 0);$$

шаг по времени  $\tau > 0$  может быть переменным ( $\tau = t_n$ ).

При соответствующих переобозначениях уравнение (12) формально совпадает с уравнением (11) из [18]. Преобразуя (12) аналогично тому, как это сделано в [18], получим систему разрешающих уравнений

$$-t\mathbf{D}(\mathbf{v}^{n+1}(\mathbf{a}), \mathbf{m}^{n+1}(\mathbf{a})) + 4rH(\mathbf{a})R\mathbf{v}^{n+1}(\mathbf{a}) = \mathbf{P}^{n+1}(\mathbf{a}), \quad n \geq 0, \quad (14)$$

где правая часть известна и определяется по рекуррентной формуле

$$\mathbf{P}^{n+1}(\mathbf{a}) = -\mathbf{P}^n(\mathbf{a}) + R \left[ 8rH(\mathbf{a})\mathbf{v}^n(\mathbf{a}) + t(\mathbf{q}^n(\mathbf{a}) + \mathbf{q}^{n+1}(\mathbf{a})) \right], \quad \mathbf{P}^n = \{P_1^n, P_2^n, P_3^n\}. \quad (15)$$

В начальный момент времени  $t_0$  имеем согласно [18]

$$\mathbf{P}^0(\mathbf{a}) = -t\mathbf{D}(\mathbf{v}_0(\mathbf{a}), \mathbf{m}^0(\mathbf{a})) + 4rH(\mathbf{a})R\mathbf{v}_0(\mathbf{a}). \quad (16)$$

Здесь правая часть – известная функция в силу заданных начальных условий (10).

При нулевых начальных условиях

$$\mathbf{v}^0(\mathbf{a}) = \mathbf{v}_0(\mathbf{a}) = \mathbf{0} \quad (17)$$

из (16) имеем

$$\mathbf{P}^0(\mathbf{a}) = \mathbf{0}, \quad (18)$$

а из (15), (17), (18) следует

$$\mathbf{P}^1(\mathbf{a}) = tR(\mathbf{q}^0(\mathbf{a}) + \mathbf{q}^1(\mathbf{a})). \quad (19)$$

Таким образом, для определения скоростей смещений точек срединной поверхности оболочки на  $(n+1)$ -м по времени слое необходимо проинтегрировать систему уравнений (14) с известной правой частью (15) – (19) при соответствующих граничных условиях, которые получаются из граничных условий для системы уравнений (7) формальной заменой  $\mathbf{v}$  на  $\mathbf{v}^{n+1}$ .

Система уравнений (14) с учетом выражений для операторов  $D_i$  (см. (9), (3) – (5)) является системой квазилинейных уравнений эллиптического типа и ее можно интерпретировать как систему уравнений равновесия установившейся ползучести изотропной оболочки переменной толщины на линейно-вязком основании, подчиняющемся гипотезам типа Винклера [4]. В силу известного [10] формального сходства уравнений установившейся ползучести (в рамках теории течения) и уравнений теории упругопластических деформаций равенство (14) формально совпадает с системой уравнений равновесия оболочки на линейно-упругом основании при ее упругопластическом деформировании (если под  $\mathbf{v}^{n+1}$  понимать перемещения точек срединной поверхности). Поэтому для интегрирования граничной задачи, соответствующей системе уравнений (14), можно использовать известные методы статики или установившейся ползучести.

Для линейризации системы уравнений (14) можно использовать итерационный метод, предложенный в [10] для решения задач установившейся ползучести и качественно аналогичный методу переменных параметров упругости, широко используемому при решении упругопластических задач статики [16]. Адаптация же метода переменных параметров упругости применительно к деформируемым тонкостенным конструкциям изложена в [22], поэтому не будем останавливаться на этом вопросе более подробно. После такой линейризации на каждой итерации систему уравнений (14) можно рассматривать как линейную эллиптическую систему уравнений деформирования изотропной неоднородной цилиндрической оболочки на линейно-упругом основании и использовать для ее интегрирования достаточно хорошо разработанные в теории оболочек численные, вариационные и др. методы [4] (сходимость метода переменных параметров упругости доказана [9; 16]).

В качестве начального приближения  $\mathbf{v}_{(0)}^{n+1}(\mathbf{a})$  для вектор-функции  $\mathbf{v}^{n+1}(\mathbf{a})$  можно выбрать решение на предыдущем по времени слое

$$\mathbf{v}_{(0)}^{n+1}(\mathbf{a}) = \mathbf{v}^n(\mathbf{a})$$

или функцию

$$\mathbf{v}_{(0)}^{n+1}(\mathbf{a}) = 3\mathbf{v}^n(\mathbf{a}) + (tR\mathbf{q}^n(\mathbf{a}) - \mathbf{P}^n(\mathbf{a})) / (2rRH(\mathbf{a})),$$

получающуюся по формуле Тейлора  $\mathbf{v}^{n+1}(\mathbf{a}) = \mathbf{v}^n(\mathbf{a}) + t\mathbf{v}_{,t}(\mathbf{a}, t_n) + O(t^2)$  с учетом выражения для производной  $\mathbf{v}_{,t}$  из (7) и оператора  $\mathbf{D}(\mathbf{v}^n, \mathbf{m}^n)$  из (14) (при замене  $n+1$  на  $n$ ) в предположении, что на предыдущем  $n$ -м по времени слое решение задачи уже известно.

В качестве модельной рассмотрим задачу об осесимметричной динамике замкнутой круговой цилиндрической оболочки длиной  $L > 0$ , которая может иметь переменную в осевом направлении  $x \equiv a_1$  толщину  $2H(x)$ . Предполагается, что нагрузка  $\mathbf{q}(\mathbf{a}, t)$ , закрепление оболочки и ее толщина не зависят от полярного угла  $a_2$  (распределенные внешние моменты отсутствуют  $\mathbf{m}(\mathbf{a}, t) \equiv \mathbf{0}$ ), поэтому перемещения  $\mathbf{u}$  и их скорости  $\mathbf{v}$  также не зависят от  $a_2$ . Кроме того, предполагается, что отсутствует нагружение оболочки в окружном направлении  $a_2$  ( $q_2 \equiv 0$ ), поэтому  $v_2 \equiv 0$ ,  $u_2 \equiv 0$  и в силу осевой симметрии задачи второе уравнение движения (7) при  $i = 2$  выполняется тождественно ( $0 \equiv 0$ ).

Аналогично, и в системе (14) второе уравнение также выполняется тождественно ( $0 \equiv 0$ ). Оставшиеся уравнения (14) с учетом выражений для операторов  $D_i$  согласно (3), (9) удобно записать в виде системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений относительно  $M_{11}^m(x)$ ,  $v_1^m(x)$  и  $v_3^m(x)$ :

$$\begin{aligned}
& -a_{11} \frac{d^2 v_1^m}{dx^2} - \frac{da_{11}}{dx} \frac{dv_1^m}{dx} + \frac{4rRH}{t} v_1^m - \frac{a_{12}}{R} \frac{dv_3^m}{dx} - \frac{1}{R} \frac{da_{12}}{dx} v_3^m - a_{13} \frac{dM_{11}^m}{dx} - \frac{da_{13}}{dx} M_{11}^m = \frac{P_1^m(x)}{t}, \\
& -t \frac{d^2 M_{11}^m}{dx^2} + \frac{ta_{21}}{R} M_{11}^m + \frac{ta_{12}}{R} \frac{dv_1^m}{dx} + \left( 4rRH + \frac{ta_{22}}{R} \right) v_3^m = P_3^m(x), \\
& B_{1111} \frac{dv_1^m}{dx} - C_{1111} \frac{d^2 v_3^m}{dx^2} + \frac{B_{1122}}{R} v_3^m - M_{11}^m = 0, \quad m = n+1, \quad 0 < x < L,
\end{aligned} \tag{20}$$

где

$$\begin{aligned}
a_{11} &= A_{1111} - B_{1111}^2 / C_{1111}, \quad a_{12} = A_{1122} - B_{1122} B_{1111} / C_{1111}, \quad a_{13} = B_{1111} / C_{1111}, \\
a_{21} &= B_{1122} / C_{1111}, \quad a_{22} = A_{2222} - B_{1122}^2 / C_{1111}, \quad C_{1111} > 0,
\end{aligned} \tag{21}$$

$A_{ijj}$ ,  $B_{ijj}$ ,  $C_{1111}$  – коэффициенты, входящие в соотношения (5);  $M_{11}^m$  – осевой момент в оболочке на  $m$ -м по времени слое;  $P_1^m(x)$ ,  $P_3^m(x)$  определяются по формуле (15) при замене  $\mathbf{a}$  на  $x$ .

Линеаризуем систему (20) указанным выше методом. Пусть  $v_1^{(k)}(x)$ ,  $v_3^{(k)}(x)$ ,  $M_{11}^{(k)}(x)$  – известные  $k$ -е приближения разыскиваемых функций  $v_1^m(x)$ ,  $v_3^m(x)$ ,  $M_{11}^m(x)$  соответственно, тогда следующие приближения этих функций определим из системы линейных уравнений

$$\begin{aligned}
& -ta_{11}^{(k)} \frac{d^2 v_1^{(l)}}{dx^2} - t \frac{da_{11}^{(k)}}{dx} \frac{dv_1^{(l)}}{dx} + 4rRH v_1^{(l)} - \frac{ta_{12}^{(k)}}{R} \frac{dv_3^{(l)}}{dx} - \frac{t}{R} \frac{da_{12}^{(k)}}{dx} v_3^{(l)} - \\
& -ta_{13}^{(k)} \frac{dM_{11}^{(l)}}{dx} - t \frac{da_{13}^{(k)}}{dx} M_{11}^{(l)} = P_1^m(x), \\
& -t \frac{d^2 M_{11}^{(l)}}{dx^2} + \frac{ta_{21}^{(k)}}{R} M_{11}^{(l)} + \frac{ta_{12}^{(k)}}{R} \frac{dv_1^{(l)}}{dx} + \left( 4rRH + \frac{t}{R} a_{22}^{(k)} \right) v_3^{(l)} = P_3^m(x), \\
& B_{1111}^{(k)} \frac{dv_1^{(l)}}{dx} - C_{1111}^{(k)} \frac{d^2 v_3^{(l)}}{dx^2} + \frac{B_{1122}^{(k)}}{R} v_3^{(l)} - M_{11}^{(l)} = 0, \quad m = n+1, \quad l = k+1, \quad 0 < x < L,
\end{aligned} \tag{22}$$

где коэффициенты  $a_{ij}^{(k)}$  известны и получаются по формулам (21) с использованием функций  $v_1^{(k)}(x)$ ,  $v_3^{(k)}(x)$  согласно [22].

К системе (22) нужно добавить граничные условия. Если кромки оболочки жестко заземлены, то

$$v_1^{(l)}(x) = 0, \quad v_3^{(l)}(x) = 0, \quad \frac{dv_3^{(l)}}{dx} = 0, \quad x = 0 \text{ и/или } x = L, \quad (23)$$

при шарнирном опирании кромок и отсутствии смещений в осевом направлении имеем

$$v_1^{(l)}(x) = 0, \quad v_3^{(l)}(x) = 0, \quad M_{11}^{(l)}(x) = 0, \quad x = 0 \text{ и/или } x = L, \quad (24)$$

а при шарнирном опирании кромок и свободном их смещении в осевом направлении вместо (24) следует использовать

$$F_{11}^{(l)}(x) \equiv a_{11}^{(k)} \frac{dv_1^{(l)}}{dx} + a_{12}^{(k)} \frac{v_3^{(l)}}{R} + a_{13}^{(k)} M_{11}^{(l)} = 0, \quad (25)$$

$$v_3^{(l)}(x) = 0, \quad M_{11}^{(l)}(x) = 0, \quad x = 0 \text{ и/или } x = L, \quad l = k + 1,$$

где из выражения для осевого усилия  $F_{11}^{(l)}$  исключена вторая производная  $d^2v_3^{(l)}/dx^2$  за счет третьего равенства (22).

Если все входные данные задачи обладают симметрией относительно центрального поперечного сечения цилиндрической оболочки ( $x = L/2$ ), то такой же симметрией будут обладать и неизвестные функции:  $v_i^m(x) = v_i^m(L-x)$ ,  $M_{11}^m(x) = M_{11}^m(L-x)$ ,  $0 \leq x \leq L/2$  ( $i = 1, 3$ ), поэтому вместо всей оболочки можно рассматривать лишь ее левую половину при  $0 \leq x \leq L/2$ . В этом случае на кромке  $x = 0$  выполняется один из типов граничных условий (23) – (25), а в точке  $x = L/2$  имеем

$$v_1^{(l)}(x) = 0, \quad \frac{dv_3^{(l)}}{dx} = 0, \quad \frac{dM_{11}^{(l)}}{dx} = 0, \quad x = L/2, \quad l = k + 1. \quad (26)$$

(Могут быть заданы и другие условия опирания оболочки, например, опора на вязкоупругом основании и т.п.)

Заменив в (22), (23), (25), (26) производные конечными разностями на равномерной сетке по  $x$  с шагом  $h$ , получим для трехточечного шаблона конечно-разностные аналоги уравнений (22) и граничных условий (23) – (26) со вторым порядком аппроксимации по  $h$ . Для решения соответствующей СЛАУ можно использовать матричную прогонку [8], которая устойчива.

Как показывают многочисленные расчеты, проведенные авторами, итерационный процесс (22) – (26) всегда сходится, поэтому предложенная схема численного интегрирования граничной задачи для системы (20) имеет точность порядка  $h^2$ .

Если скорости смещений  $\mathbf{v}$  известны на  $n$ -м и  $(n+1)$ -м слоях по времени, то из системы уравнений (8) по формуле трапеций с учетом начальных условий (11) можно определить перемещения  $\mathbf{u}$  точек срединной поверхности оболочки на  $(n+1)$ -м слое по времени со вторым порядком точности по  $\tau$ :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \tau \left( v_i^n + v_i^{n+1} \right) / 2, \quad i = 1, 2, 3, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (27)$$

В случае вязкопластического деформирования система разрешающих уравнений динамики оболочки (7) является системой квазилинейных уравнений параболического типа относительно скоростей смещений  $\mathbf{v}$ . Известно [27], что для квазилинейных дифференциальных уравнений и систем общая теория устойчивости и сходимости конечно-разностных схем разработана недостаточно, поэтому основным критерием доверия той или иной конечно-разностной схеме служат приближенные решения для тестовых (модельных) задач, аналитические решения которых известны.

Авторам пока не удалось доказать устойчивость численной схемы (14), (27) в общем случае, когда операторы  $D_i$  согласно (9), (3) – (5) нелинейны. Но в пользу устойчивости этой схемы говорят физическая корректность (непротиворечивость) результатов многочисленных расчетов, проведенных авторами, и хорошее совпадение результатов с известными аналитическими и апробированными численными решениями (см. далее обсуждение результатов расчетов). В случае линейной вязкости согласно (6) при  $\mu \rightarrow \infty$  доказать спектральную устойчивость схемы (12), (14) можно, повторив все рассуждения в [21], касающиеся доказательства устойчивости обобщенных методов Рунге–Кутты при решении задачи нестационарной теплопроводности, которая описывается параболическим уравнением, содержащим производную по времени  $t$  только первого порядка (подобно уравнениям системы (7)).

Исследуем динамическое вязкопластическое деформирование замкнутых круговых цилиндрических оболочек радиуса  $R$  и длиной  $L$ . Толщина оболочки может быть постоянной ( $2H(x) = 2H_* = \text{const}$ ,  $x \equiv a_1$ ) или переменной и определяется формулой

$$2H(x) = 2H_*s + p(1-s)H_* \sin(px/L), \quad 0 \leq x \leq L. \quad (28)$$

При задании толщины тонкой цилиндрической оболочки в виде (28) расход материала с точностью используемой теории будет такой же, как и в оболочках постоянной толщины  $2H_*$ . При значениях параметра  $0 < s < 1$  из (28) следует, что толщина оболочки на кромках  $x = 0, L$  меньше, чем в центральном сечении  $x = L/2$ ; при  $s = 1$  получаем оболочку постоянной толщины  $2H_*$ ; при  $s > 1$  толщина оболочки на кромках больше, чем в центральном сечении. В расчетах будем принимать  $2H_* = 3$  см.

На кромках  $x = 0, L$  оболочка может быть шарнирно оперта или жестко закреплена (в осевом направлении  $x$  кромки смещаются свободно, согласно (25)). Конструкция динамически нагружается внутренним давлением взрывного типа

$$q_3(x, t) = q_3(t) = p_0 \exp(-at), \quad q_1 = q_2 = 0 \quad (a = 120 \text{ с}^{-1}, \quad t \geq t_0), \quad (29)$$

где  $p_0$  – значение нагрузки в начальный момент времени  $t_0 = 0$ , в который оболочка находится в покое. (Может быть задан другой закон изменения взрывной нагрузки по времени [7], в рамках настоящего исследования это не принципиально).

Оболочки изготовлены из алюминиевого сплава Д16 или высококачественной малоуглеродистой стали, физико-механические характеристики которых приведены в табл. 1. (Коэффициент вязкого упрочнения  $E_s$  для стали получен по табличным данным из [5] с использованием метода наименьших квадратов; пределы же текучести алюминиевых сплавов практически не зависят от скорости деформаций ( $E_s \approx 0$ ) [17]. Во всех приведенных ниже расчетах принималось  $E = 10^{16}$  Па·с (см. (6)), что соответствует вязкопластической модели, приближенной к модели жестко-вязко-пластического тела).

Таблица 1

Физико-механические характеристики материалов оболочки [5; 12]

Материал	$r$ , кг/м <sup>3</sup>	$s_s$ , МПа	$E_s$ , МПа·с
Малоуглеродистая сталь	8000	248	90,9
Сплав Д16	2780	380	—



Авторам не известны полные аналитические решения вязкопластической или жесткопластической динамики оболочек с использованием критерия текучести Мизеса (который неявно заложен в используемой вязкопластической модели), поэтому для тестирования разработанного выше метода сравним результаты численных расчетов короткой цилиндрической оболочки с уже апробированными численными решениями вязкопластической динамики пластин. Действительно, если радиус оболочки  $R \rightarrow \infty$ , то решение задачи о вязкопластическом деформировании цилиндрической оболочки должно в пределе совпадать с решением задачи о динамическом вязкопластическом цилиндрическом изгибе прямоугольной удлиненной пластины шириной  $L$  и той же толщины, что и оболочка. Динамика прямоугольных удлиненных пластин при нагрузках взрывного типа исследована в [29], где был разработан численный метод интегрирования таких задач, аналогичный методам, развитым в [18; 19] и в настоящей работе. Известно, что при соответствующей нормировке нагрузки решения задачи о цилиндрическом изгибе прямоугольной удлиненной пластины и об изгибе стержня (балки) совпадают, поэтому решениям, полученным на основе метода из [29] можно доверять, так как в [19] было проведено сравнение численного решения для стержня с полным аналитическим решением задачи жесткопластической динамики стержня, давшее хорошее совпадение результатов. Кроме того, в [18] было произведено сравнение численного решения с полным аналитическим решением для круглой пластины, также давшее хорошее согласование результатов, что дополнительно подтверждает достоверность, разработанного в [29] метода.

Сравним результаты численных расчетов динамического цилиндрического изгиба прямоугольной удлиненной пластины шириной  $L=1$  м и постоянной толщины  $2H_*$  с расчетами неупругой динамики цилиндрической оболочки радиуса  $R=1000$  м, длиной  $L=1$  м и той же толщины  $2H_*$  при действии нагрузок (29) разной интенсивности  $p_0$  и при разных типах закрепления кромок.

В табл. 2 приведены значения времени остановки  $T_f$  и максимального безразмерного остаточного прогиба  $U_{\max} = H_* \max_x u_3 / L^2$  (который возникает в центральном поперечном сечении конструкции  $x = L/2$ ), рассчитанные по формулам из [29] и по формулам (20) – (27) настоящего исследования. В расчетах характерный период времени  $T = 0,1$  с, в течение которого изучалось движение конструкции, разбивался на 1000 слоев ( $t = T/1000$ ), а по ширине пластины и длине оболочки  $L$  вводился 401 узел. Расчеты проводились при начальных значениях нагрузки  $p_0$ , указанных в таблице. В скобках в табл. 2 приведены отклонения решения для оболочки от решения для пластины.

Таблица 2

**Сравнение численных решений задач вязкопластической динамики  
прямоугольных удлиненных пластин и коротких цилиндрических оболочек**

Характеристика решения	Конструкции из сплава Д16				Стальные конструкции	
	Шарнирное опирание, $p_0 = 9$ МПа		Защемление кромок, $p_0 = 11$ МПа		Шарнирное опирание, $p_0 = 1$ ГПа	
	Пластина	Оболочка	Пластина	Оболочка	Пластина	Оболочка

$T_f \cdot 10, c$	0,952	0,938 (1,5 %)	0,575	0,569 (1 %)	0,646	0,635 (1,7 %)
$U_{max} \cdot 10^2$	74,57	71,88 (3,6 %)	48,75	46,72 (4,2 %)	59,37	59,01 (0,6 %)

На рис. 1 изображены эпюры безразмерных остаточных прогибов  $U(x) = H_3 u_3(x) / L^2$ , определенные численно по формулам (20)–(27) и по формулам из [29]. Кривые 1–3 рассчитаны для прямоугольных удлиненных пластин, а линии 1'–3' – для коротких цилиндрических оболочек. Кривые 1, 1' получены для шарнирно опертых конструкций из сплава Д16 при  $p_0 = 9$  МПа, линии 2, 2' – для аналогичных конструкций из малоуглеродистой стали (с учетом вязкого упрочнения) при  $p_0 = 1$  ГПа, а кривые 3, 3' – для зашумленных на кромках конструкций из сплава Д16 при  $p_0 = 11$  МПа. Значения максимумов этих кривых занесены в табл. 2.

Как видно из табл. 2 и рис. 1, время остановки и остаточные прогибы для прямоугольных удлиненных пластин и коротких цилиндрических оболочек различаются незначительно (менее чем на 5 %), причем наилучшее согласование решений наблюдается для стальных конструкций, материал которых имеет вязкопластическое упрочнение (см. кривые 2, 2' на рис. 1 и два последних столбца табл. 2). Расчетные характеристики для оболочек несколько ниже, чем для пластин. Это объясняется тем, что даже при столь большом радиусе кривизны ( $R = 1000$  м) в цилиндрических оболочках возникают мембранные деформации, вызывающие дополнительную диссипацию энергии; при деформирова-

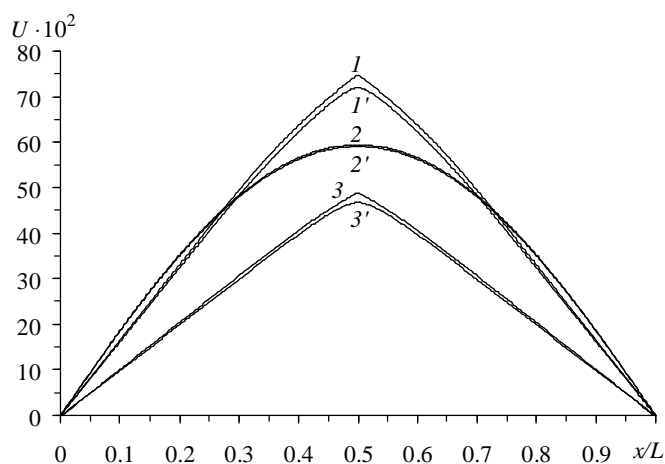


Рис. 1

нии прямоугольных удлиненных пластин реализуется случай поперечного изгиба, при котором мембранные деформации вообще отсутствуют, поэтому отсутствует соответствующая им составляющая диссипации энергии.

Исследованный выше случай является предельным, когда в короткой оболочке реализуется почти чисто изгибное напряженное состояние. Рассмотрим другой предельный случай динамики цилиндрической оболочки, при котором реализуется безмоментное состояние. Пусть кромки замкнутой круговой цилиндрической оболочки не закреплены и свободны от нагружения; на конструкцию действует только равномерно распределенное

внутреннее давление взрывного типа (29). Считаем, что в оболочке реализуется безмоментное состояние ( $M_{ij} = 0$ ,  $i, j = 1, 2$ ), тогда пренебрегая инерционными членами в осевом направлении (что допустимо в первом асимптотическом приближении для тонких оболочек), из первого уравнения движения (1) с учетом отсутствия нагрузок на кромках получим

$$F_{11}(x, t) = 0. \quad (30)$$

Второе уравнение движения (1) в осесимметричном случае выполняется тождественно ( $0 \equiv 0$ ), а из третьего уравнения (1) с учетом (30) следует

$$q_3(t) - 2Hr v_{3,t} = F_{22}/R, \quad u_{3,t} = v_3. \quad (31)$$

В рамках жесткопластической модели уравнения движения (31) в силу равенства (30) имеют смысл лишь при  $F_{22} = 2Hs_s = \text{const}$  (как при использовании критерия текучести Мизеса, так и при использовании критерия Треска), поэтому из (31) с учетом (29) имеем

$$\frac{dv_3}{dt} = \frac{p_0}{2Hr} \exp(-at) - \frac{s_s}{rR}, \quad \frac{du_3}{dt} = v_3(t),$$

отсюда при нулевых начальных условиях и  $t_0 = 0$  следует

$$v_3(t) = \frac{p_0}{2Hra} [\exp(-at) - 1] - \frac{s_s}{rR} t, \quad (32)$$

$$u_3(t) = \frac{p_0}{2Hra} \left[ \frac{1}{a} (\exp(-at) - 1) + t \right] - \frac{s_s}{2rR} t^2 \quad (0 \leq t \leq T_f). \quad (33)$$

Из условия  $v_3(T_f) = 0$  с учетом выражения (32) определим время остановки движения  $T_f$  оболочки, затем из (33) при  $t = T_f$  определим величину остаточного прогиба.

Таблица 3

**Сравнение аналитического и численных решений задачи жесткопластической и вязкопластической динамики длинной цилиндрической оболочки**

Характеристика решения	Аналитическое безмоментное решение по жесткопластической модели	Численное решение для длинных оболочек с разным закреплением кромок	
		Шарнирное опирание	Жесткое защемление
$T_f \cdot 10, \text{ с}$	0,1539	0,155 (0,69 %)	0,154 (0,04 %)
$U_{\max} \cdot 10^2$	1,5745	1,5325 (2,67 %)	1,5274 (2,99 %)

В табл. 3 приведены результаты аналитического (32), (33) и численного расчетов для длинной ( $H = H_*$ ,  $R = 0,5 \text{ м}$ ,  $L = 3 \text{ м}$ ) цилиндрической оболочки из сплава Д16 при начальном значении нагрузки  $p_0 = 50 \text{ МПа}$ . (В скобках указаны отклонения численного решения от аналитического). При численном решении значения остаточных прогибов, занесенных в табл. 3, определялись в центральном сечении оболочки ( $x = L/2$ ). Как видно из табл. 3, для длинных оболочек при высоком уровне динамической нагрузки численное решение хорошо согласуется с аналитическим безмоментным решением. Это объясняется, очевидно, тем, что в таких оболочках подавляющая часть диссипации энергии

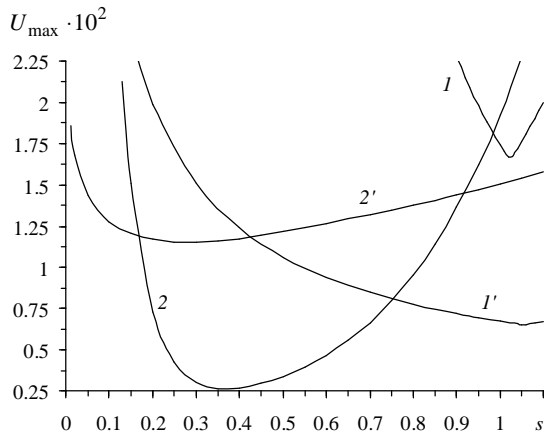


Рис. 2

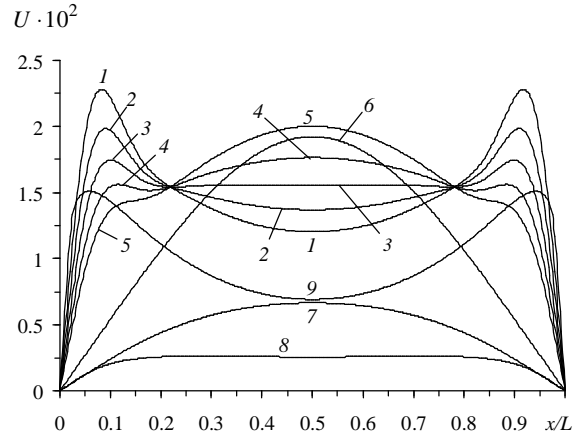


Рис. 3

во время движения происходит за счет основного безмоментного состояния, по сравнению с которой диссипация энергии в зонах краевых эффектов пренебрежимо мала.

Хорошее совпадение результатов расчетов, приведенных в табл. 2, 3 и на рис. 1, позволяет доверительно относиться к разработанному в настоящей работе численному методу интегрирования задачи вязкопластической динамики изотропных оболочек.

Выше исследовалась динамика цилиндрических оболочек постоянной толщины  $2H_*$ . Варьируя же длину оболочки и распределение толщины в осевом направлении, можно управлять остаточными смещениями  $u$ , величины которых в рамках вязкопластической модели характеризуют степень повреждаемости конструкции. На рис. 2 изображены кривые, характеризующие зависимость максимального безразмерного остаточного прогиба  $U_{\max}$  шарнирно опертых оболочек радиуса  $R = 0,5$  м и разной длины от значения параметра толщины  $s$  в (28) при разных уровнях  $p_0$  нагружения и прежнем характерном значении толщины  $2H_*$ . Кривые 1 и 1' рассчитаны для длинных оболочек  $L = 3$  м при  $p_0 = 50$  МПа и  $p_0 = 50$  ГПа соответственно, а линии 2 и 2' – для коротких оболочек  $L = 0,5$  м при  $p_0 = 30$  МПа и  $p_0 = 3$  ГПа соответственно. Кривые 1, 2 характеризуют остаточные прогибы оболочек из алюминиевого сплава Д16, а линии 1', 2' – из малоуглеродистой стали, обладающей вязким упрочнением.

Все кривые на рис. 2 имеют локальные минимумы, которым соответствуют рациональные распределения (28) толщин оболочек, обеспечивающие наименьшие остаточные прогибы. Так как в рамках вязкопластической модели величина остаточных прогибов является мерой повреждаемости конструкции, из поведения кривых на рис. 2 следует, что за счет рационального распределения толщины, остаточные прогибы оболочки можно уменьшить в разы, существенно повышая, тем самым, сопротивляемость конструкции нагрузкам взрывного типа.

Кривые 1 и 1' имеют локальные минимумы в точках  $s = 1,024 \approx 1$  и  $s = 1,064 \approx 1$  соответственно, поэтому длинные оболочки постоянной толщины при нагрузках вида (29) могут рассматриваться как рациональные или близкие к рациональным. Это объясняется тем, что в длинных оболочках постоянной толщины большая часть диссипации энергии

осуществляется основным напряженным состоянием, которое близко к безмоментному и однородному; краевые же эффекты вносят незначительный вклад в диссипацию (этот вклад для кривых  $I$  и  $I'$  сказался в том, что минимум их реализуется при  $s = 1,024$  и  $s = 1,064$ , а не строго при  $s = 1$ ). Для коротких же оболочек постоянной толщины, наоборот, большая часть диссипации осуществляется за счет изгибных напряжений, поэтому профилирование для таких оболочек является более эффективным (см. кривые 2 и 2') и в рациональных проектах, как будет показано ниже, вновь приводит к напряженному состоянию, близкому к безмоментному и однородному.

Кривые, качественно схожие с теми, что изображены на рис. 2, получаются и для зависимостей времени остановки движения оболочки от параметра  $s$  в (28). Эти кривые также имеют локальные минимумы, причем при тех же значениях  $s$ , что и линии на рис. 2.

На рис. 3 изображены эпюры безразмерных остаточных прогибов оболочек из сплава Д16 при разных значениях параметра  $s$ . Кривые 1 – 5 получены для длинной оболочки  $L = 3$  м при  $p_0 = 50$  МПа, а линия 6 – 9 – для короткой оболочки  $L = 0,5$  м при  $p_0 = 30$  МПа. Кривые 1–5 рассчитаны при значениях  $s = 0,9 + 0,05(k - 1)$ , где  $k$  – номер кривой; линии 6, 7, 8, 9 определены при значениях  $s = 1, 0,7, 0,35, 0,15$  соответственно. Значения максимумов кривых 1 – 5 и 6 – 9 на рис. 3 соответствуют точкам на кривых 1 и 2 рис. 2 при указанных выше значениях  $s$ . (Качественно аналогичные эпюры остаточных прогибов получают и для оболочек из малоуглеродистой стали).

Сравнение кривых на рис. 3 позволяет проследить за изменением формы остаточных прогибов цилиндрической оболочки в зависимости от формы ее профиля в осевом направлении. Центральные участки кривых 3, 8 почти горизонтальны. Это позволяет утверждать, что в оболочках с рациональными распределениями толщин (как длинных, так и коротких) реализуется основное напряженное состояние, близкое к безмоментному и однородному.

В заключение настоящего исследования проведем сравнение численных решений с известными аналитическими решениями жесткопластической динамики замкнутых круговых цилиндрических оболочек постоянной толщины с защемленными кромками [11; 30; 31]. При построении этих аналитических решений использовалась простейшая кусочно-линейная аппроксимация кривой текучести в фазовом пространстве обобщенных напряжений  $(M_{11}, F_{22})$  – в виде прямоугольника, что является достаточно грубым приближением истинной предельной кривой, поэтому такие решения не использовались выше в качестве эталонных при тестировании разработанного численного метода.

Согласно аналитическим решениям из [11; 30; 31], «механизмы» динамического деформирования различны в случаях коротких ( $R \geq R_0 = L^2 / (24H)$ ) и длинных ( $R < R_0$ ) цилиндрических оболочек, а также при нагрузках «средней» ( $p_s \leq p_0 \leq p_1$ ) и «высокой» ( $p_0 > p_1$ ) интенсивности. Здесь, в отличие от (29) нагрузка имеет ступенчатый вид

$$q_3(t) = \begin{cases} p_0 = \text{const} > 0, & 0 < t \leq T_0, \\ 0, & t > T_0; \end{cases} \quad (34)$$

$$p_s = \frac{2HS_s}{R} \left( 1 + \frac{8HR}{L^2} \right), \quad p_1 = \frac{2HS_s}{R} \left( 1 + \frac{24HR}{L^2} \right), \quad H = H_*;$$

$p_s$  – предельное статическое давление;  $T_0$  – время действия нагрузки.

Таблица 4

**Сравнение аналитических и численных решений задачи жестко- и вязкопластической динамики для защемленных цилиндрических оболочек**

Характеристика решения	Нагрузки средней интенсивности ( $p_0 = p_1$ )		Нагрузки высокой интенсивности ( $p_0 = 2p_1$ )	
	Аналитическое решение	Численное решение	Аналитическое решение	Численное решение
Короткая оболочка ( $R = 1000$ м, $L = 1$ м, $p_s = 1,379$ МПа, $p_1 = 4,115$ МПа)				
$T_f \cdot 10, c$	0,02983	0,02568 (16,2 %)	0,05967	0,05117 (16,6 %)
$U_{max} \cdot 10^2$	0,11011	0,08422 (30,7 %)	0,51446	0,42277 (21,7 %)
Длинная оболочка ( $R = 0,5$ м, $L = 3$ м, $p_s = 22,952$ МПа, $p_1 = 23,256$ МПа)				
$T_f \cdot 10, c$	0,03460	0,01016 (359 %)	0,02000	0,0201 (0,5 %)
$U_{max} \cdot 10^2$	$4,6419 \times 10^{-4}$	$3,0331 \times 10^{-4}$ (53 %)	0,04556	0,04810 (5,3 %)

В табл. 4 приведены результаты аналитических (см. формулы (7.14), (7.18), (7.30), (7.31), (7.40), (7.57), (7.58) в [11]) и численных расчетов для коротких и длинных защемленных оболочек постоянной толщины из сплава Д16 при нагрузках (34) средней и высокой интенсивности, действующих в течение времени  $T_0 = 0,001$  с. (В скобках указаны отклонения аналитического решения от численного). Из табл. 4 следует, что для коротких оболочек аналитическое решение дает завышение времени  $T_f$  остановки движения на 16–17 %, а максимума остаточного прогиба – на 20 – 30 %; для длинных оболочек при нагрузках средней интенсивности аналитическое решение завышает значение  $T_f$  в 3,59 раза, а  $U_{max}$  – на 53 %. Хорошее согласование численного и аналитического решений наблюдается лишь для длинных оболочек при нагрузках высокой интенсивности. Это объясняется, по-видимому, тем, что в этом случае большая часть диссипации энергии в оболочке происходит за счет основного безмоментного состояния, которое удовлетворительно описывается даже упрощенной кривой текучести, используемой в аналитическом решении [11; 30; 31]. Однако, в этом случае все же существует качественное отличие эпюры остаточных прогибов  $u_3(x)$ , определенных численно и аналитически. Согласно решению из [11], максимум остаточного прогиба всегда реализуется в центральном сечении оболочки ( $x = L/2$ ), а при численных расчетах длинной защемленной оболочки при интенсивном нагружении эпюра остаточных прогибов схожа с кривой 3 на рис. 3 и имеет максимум не в центральном сечении, а в окрестности кромок (результат возникновения ярко выраженных краевых эффектов).

Таким образом, для проведения оценочных расчетов в случае длинных защемленных цилиндрических оболочек при нагрузках высокой интенсивности можно рекомендовать использование достаточно простых аналитических формул (7.57), (7.58) из [11]. В других случаях аналитические формулы из [11; 30; 31] дают значительное завышение времени остановки движения и максимума остаточных прогибов, при этом численное решение лучше согласуется с экспериментом, так как известно, что остаточные прогибы,

определенные по формулам из [11; 30; 31], на 30 – 80 % превышают экспериментальные значения [11].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05-01-00161-а).

г. Новосибирск

Поступила: 13.12.2007

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Автономенко, Н. А.* О динамическом деформировании пластин из нелинейного вязкопластического материала / Н. А. Автономенко, Г. И. Быковцев, Т. Д. Семькина // Тр. VII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин (Днепропетровск, 1969 г.). – М.: Наука, 1970. – 267 с.
2. *Амандосов, А. А.* Движение жесткопластической круговой цилиндрической оболочки в сопротивляющейся среде / А. А. Амандосов // В кн.: Теория оболочек и пластин, Ереван. – 1964. – С. 779-787.
3. *Быковцев, Г. И.* О вязкопластическом течении круглых пластин и оболочек вращения / Г. И. Быковцев, Т. Д. Семькина // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. – 1964. – № 4. – С. 68-76.
4. *Власов, В. З.* Балки, плиты и оболочки на упругом основании / В. З. Власов, Н. Н. Леонтьев. – М.: Физматгиз, 1960. – 387 с.
5. *Ворнок, Ф.* Изменение механических свойств мягкой стали при повторных ударах / Ф. Ворнок, Дж. Поуп // Механика. – 1950. – Вып. 2. – С. 69-83.
6. *Илюшин, А. А.* Пластичность / А. А. Илюшин. – М.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1949. – 289 с.
7. *Ионов, В. Н.* Напряжения в телах при импульсивном нагружении. Учеб. пособие для вузов / В. Н. Ионов, П. М. Огибалов. – М.: Высш. школа, 1975. – 568 с.
8. *Калиткин, Н. Н.* Численные методы / Н. Н. Калиткин. – М.: Наука, 1978. – 589 с.
9. *Качанов, Л. М.* Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М.: Наука, 1969. – 399 с.
10. *Качанов, Л. М.* Теория ползучести / Л. М. Качанов. – М.: Физматгиз, 1960. – 467 с.
11. *Комаров, К. Л.* Динамика жесткопластических элементов конструкций / К. Л. Комаров, Ю. В. Немировский. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1984. – 349 с.
12. *Композиционные материалы:* Справ. / Под ред. Д. М. Карпиноса. – Киев: Наук. думка, 1985. – 489 с.
13. *Кошур, В. Д.* Континуальные и дискретные модели динамического деформирования элементов конструкций / В. Д. Кошур, Ю. В. Немировский. – Новосибирск: Наука, 1990. – 536 с.
14. *Кузин, П. А.* О динамике жесткопластической цилиндрической оболочки конечной длины / П. А. Кузин // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. – 1964. – № 2. – С. 79-83.
15. *Мазалов, В. Н.* Динамика тонкостенных пластических конструкций / В. Н. Мазалов, Ю. В. Немировский // Проблемы динамики упругопластических сред: Сб. обзоров. Серия: Механика. Новое в зарубежной науке. – Вып. 5. – М.: Мир, 1975. – С. 155-247.
16. *Малинин, Н. Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести / Н. Н. Малинин. – М.: Машиностроение, 1968. – 379 с.
17. *Немировский, Ю. В.* Вязкопластическая динамика изотропных пластин переменной толщины при действии нагрузок взрывного типа / Ю. В. Немировский, А. П. Янковский // ПМТФ. – 2007. – Т. 48, № 2. – С. 123-134.
18. *Немировский, Ю. В.* Динамический вязкопластический изгиб армированных стержней переменного поперечного сечения / Ю. В. Немировский, А. П. Янковский // Математические методы и физико-механические поля. – 2006. – Т. 49, № 1. – С. 53-66.
19. *Немировский, Ю. В.* Динамическое сопротивление пластических цилиндрических оболочек / Ю. В. Немировский // Современные проблемы механики и прикладной математики: Сб. трудов Междунар. школы-семинара. – Воронеж: Научная книга, 2007. – С. 259-263.
20. *Немировский, Ю. В.* Обобщение методов Рунге–Кутты и их применение к интегрированию начально-краевых задач математической физики / Ю. В. Немировский, А. П. Янковский // Сиб. журн. вычисл. математики. – 2005. – Т. 8, № 1. – С. 51–76.
21. *Немировский, Ю. В.* Термоупругопластический изгиб сложно армированных пластин / Ю. В. Немировский, А. П. Янковский // Механика композитных материалов. – 2005. – Т. 41, № 6. – С. 715-742.

22. *Немировский, Ю. В.* Термоупругопластическое деформирование сложно армированных оболочек / Ю. В. Немировский, А. П. Янковский // *Механика композитных материалов.* – 2006. – Т. 42, № 6. – С. 707-728.
23. *Огибалов, П. М.* Вопросы динамики и устойчивости оболочек / П. М. Огибалов. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1963. – 463 с.
24. *Перроне, Н.* Импульсное нагружение пластинки, чувствительной к скорости деформации / Н. Перроне // *Тр. Амер. общ-ва инжен.-мех. Сер. Е.* – 1967. – № 2. – С. 137.
25. *Пэжжина, П.* Основные вопросы вязкопластичности / П. Пэжжина. – М.: Мир, 1968. – 175 с.
26. *Самарский, А. А.* Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1989. – 489 с.
27. *Спорых, А. Н.* О динамическом изгибе жесткопластической цилиндрической оболочки под действием распределенного давления / А. Н. Спорых, Н. Д. Хомяков // *Сб. научн. трудов факультета прикладной математики и механики ВГУ.* – 1971. – Вып. 7. – С. 90-97.
28. *Янковский, А. П.* Численное интегрирование задачи вязкопластической динамики слоисто-волоконистых прямоугольных удлиненных пластин / А. П. Янковский // *Численные методы решения задач теории упругости и пластичности. Тр. XIX Всеросс. конф., Бийск, 28–31 августа 2005 г.* – Новосибирск: «Параллель», 2005. – С. 290–297.
29. *Eason, G.* Dynamic loading of rigid – plastic cylindrical shells / G. Eason, R. T. Shield // *J. Mech. and Phys. Solids.* – 1956. – V. 4, N 2. – P. 53-71.
30. *Hodge, P. G.* Impact pressure loading of rigid – plastic cylindrical shells / P. G. Hodge // *J. Mech. and Phys. Solids.* – 1955. – V. 3, N 3. – P. 176-188.
31. *Mazalov, V. N.* The dynamic behavior of cylindrical shells reinforced by ring ribs. – II Shells of finite length / V. N. Mazalov, Ju. V. Nemirovsky // *Internat. J. Solids and Structures.* – 1971. – No 7. – P. 111-123.

*Yu. V. Nemirovsky, A. P. Yankovsky*

### **INTEGRATION OF THE PROBLEM DYNAMIC VISCO-PLASTIC DEFORMATIONS OF ISOTROPIC CYLINDRICAL SHELLS BY THE GENERALIZED METHOD RUNGE - KUTTA**

*The problem visco-plastic dynamic deformation of isotropic shells of variable thickness is formulated. On the basis of generalization of methods of the Runge - Kutta method of an integration of the put initial-bending problem is developed. Comparison of outcomes of calculations with analytical and with approved numerical by solutions is lead; it is shown, that they will well agree. Effectiveness of the developed method is confirmed by numerical calculations. It is shown, that due to rational distribution of thickness of envelopes maximum magnitude of their residual deflections can be reduced in some times.*

**Keywords:** *envelopes, explosive loadings, inelastic dynamics, visco-plastic deformation, rigid-plastic deformation, rational profiling*