

Г. К. Михайлов

ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР (ЖИЗНЬ, ТВОРЧЕСТВО, ВКЛАД В СТАНОВЛЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНОЙ МЕХАНИКИ)

Институт научно-технической информации РАН

Аннотация. Леонард Эйлер (1707-1783) – один из величайших ученых всех времен в области математики и механики. Ему принадлежит, в значительной степени, формирование математического анализа (включая теорию дифференциальных уравнений и вариационное исчисление) в XVIII веке, а также становление всей рациональной механики и, в частности, механики твердого тела и гидродинамики идеальной жидкости. Им же был создан язык и стиль современной математической литературы. Статья содержит очерк жизни Леонарда Эйлера, краткий общий обзор его трудов и более подробное изложение его вклада в становление рациональной механики

Ключевые слова: материал, механика, дифференциальные уравнения, гидродинамика, упругость, гибкие тела

УДК: 539.374

В 2007 году исполнилось 300 лет со дня рождения одного из величайших математиков и механиков мира Леонарда Эйлера. С его трудами связано становление математического анализа (включая теорию дифференциальных уравнений и вариационное исчисление), рациональной механики, механики твердого тела и гидродинамики идеальной жидкости. Эйлеру же обязан своим становлением язык и стиль научной литературы последующих полутора-двух веков. Ниже приведен очерк жизни Леонарда Эйлера и конспективный обзор его вклада в науку.

Более подробно рассмотрено становление рациональной механики, которое связано неразрывно с трудами Леонарда Эйлера, открывшего пути для ее дальнейшего развития. Работы Эйлера по механике составляют примерно одну треть всех его

Поступила 12.12.2008

Статья подготовлена по материалам докладов автора на совместном торжественном заседании президиума Санкт-Петербургского научного центра РАН и Международной научной конференции "Леонард Эйлер и современная наука" и совместном заседании Санкт-Петербургского математического общества и Санкт-Петербургского отделения Российского Национального комитета по истории и философии науки и техники (Санкт-Петербург, май 2007 г.). Ниже в тексте в квадратных скобках даются ссылки к списку литературы, а надстрочные номера относятся к помещенным в конце статьи примечаниям. Упоминаемые в статье сочинения Л.Эйлера в библиографию, для ее сокращения, не включены. Подлинные их названия можно установить по традиционному перечню трудов Эйлера, подготовленному в начале XX века шведским историком Г.Энестрёмом [24] и воспроизведенному позже в "Трудах" Архива АН СССР [15, т. 1, с. 352-387]

трудов. Надо подчеркнуть, что механика была первым серьезным увлечением Эйлера. В сохранившихся “записных книжках”, которые он вел в возрасте 18–20 лет, уже содержатся подробные планы задуманных им общих трактатов по динамике точки и теории движения жидкостей. О живом интересе Эйлера к механике свидетельствует и сравнительный анализ его опубликованных сочинений, написанных им за первые 10 лет научного творчества (1726–1735). Из общего их объема, составляющего около 1800 страниц (в пересчете на страницы полного собрания его сочинений “Opera omnia”), почти $\frac{2}{3}$ посвящены механике и только $\frac{1}{4}$ высшей математике.

1. Предки Леонарда Эйлера были мелкими землевладельцами из расположенного на Боденском озере города Линдау. Этимология самой фамилии Эйлер восходит, по-видимому, к немецкому слову “Au” = заливной луг – типичному элементу топонимики окрестностей Линдау – (ср. Lindau) [27]. Прапрадед Леонарда Эйлера в самом конце XVI века переехал в Базель и основал там семью ремесленников. Однако отец Леонарда был уже пастором.

Леонард Эйлер родился в Базеле 15 апреля¹ 1707 г. и провел детство в близлежащем селении, где его отец получил приход. Здесь, в благочестивой обстановке скромного пасторского дома Леонард получил начальное воспитание, наложившее глубокий отпечаток на всю его последующую жизнь и мировоззрение. Осенью 1720 г. Леонард поступил на философский факультет Базельского университета (что по возрасту соответствовало нормам того времени). Сохранились три печатные латинские диссертации 1722 г. по логике и истории римского судопроизводства, официальным “респондентом” по которым выступал Эйлер. На титульных листах этих диссертаций впервые появляется имя Леонарда Эйлера.

В 1723 г. Леонард окончил философские классы и на годичном университетском акте 8 июня 1724 г. произнес по-латыни речь о сравнении картезианской и ньютоновской философии, получив в результате звание магистра. Затем он записался, по желанию отца, на старший – теологический факультет университета.

Начальные сведения по математике Леонард получил еще от отца. В университете на юношу обратил внимание Иоганн Бернулли – один из наиболее значительных математиков того времени. Он стал руководить его самостоятельными занятиями и, вовсе не склонный преувеличивать чужие заслуги, не случайно написал в 1726 г. о своем девятнадцатилетнем ученике: “счастливейшего дарования юноша Леонард Эйлер, от пронизательности и остроты ума которого мы ожидаем самых больших успехов после ознакомления с той легкостью и изобретательностью, с которой он проник под нашим руководством в сокровенные глубины высшей математики” [21].

Посещая дом учителя, Эйлер познакомился и со старшими сыновьями знаменитого математика – Николаем и Даниилом, приглашенными в Петербург в открывавшуюся там Академию наук. При отъезде Бернулли пообещали Эйлеру, выразившему желание сопровождать их в Россию, исхлопотать и для него место в Петербургской Академии, чего они и добились к осени 1726 г.

Не решившись отправиться в далекий путь зимой, Эйлер отложил свой отъезд на весну, углубившись пока, по совету Даниила Бернулли, в изучение физиологии, профессором которой тот был первоначально назначен в Петербурге. Тем временем в Базеле освободилась кафедра физики. В число 12 претендентов на нее, среди которых были Д.Бернулли и известный ученый Я.Герман, вошел и Эйлер. Согласно тогдашним правилам претенденты на кафедру должны были представить для диспута диссертацию и прочесть пробные лекции. После этого три группы представителей

профессуры и администрации университета выбирали из числа соискателей по одному кандидату для последующей жеребьевки. Эйлер представил на конкурс диссертацию “О звуке” и прочел лекцию “О причине тяготения”. В результате тайного голосования “конкурсные подкомиссии” рекомендовали для жеребьевки Германа и двух других кандидатов, не оставивших следов в истории науки. 1 апреля 1727 г. беспристрастный жребий выбрал одного из этих двух случайных кандидатов. На следующий день Эйлер символически записался на медицинский факультет университета и рано утром 5 апреля оставил навсегда свою родину.

Эйлер отправился из Базеля по Рейну до Майнца, затем почтовыми он проехал в Гамбург, а оттуда к Балтийскому морю. (По пути он посетил в Марбурге знаменитого Христиана Вольфа, который отрекомендовал ему Петербург “раем ученых”.) Далее Эйлер отплыл в Кронштадт и 24 мая 1727 г. прибыл в Петербург.

2. Созданием Академии наук Россия была обязана царю-преобразователю Петру I, открывшему XVIII век широкими военными действиями и многочисленными, порой противоречивыми, реформами. Начавшаяся в 1700 г. Северная война закончилась лишь спустя 21 год победой России и торжественным поднесением Петру звания Великого, Отца Отечества и Императора Всероссийского. Именно в эти годы Петру было “суждено в Европу прорубить окно”. Как писал великий поэт,

Была та смутная пора,
Когда Россия молодая,
В бореньях силы напрягая,
Мужала с гением Петра.

Не получивший сам никакого систематического образования, Петр считал необходимым внедрять на Руси западную культуру и науки и пришел к мысли о создании в своей стране академии. Понятие это было в то время, как и сейчас, двойственным: оно означало как ученое общество, так и высшее учебное заведение. В январе 1724 г. Петр собственноручно внес некоторые поправки в представленный ему проект учреждения Академии, предусмотрев немалые деньги на ее содержание. Проект остался недоработанным, но о решении “учинить Академию, в которой бы учились языкам, также прочим наукам и знатным художествам [т.е. ремеслам – Г.М.] и переводили б книги”, а, главное, о закреплении за будущей Академией выделенных Петром средств, было объявлено 8 февраля того же года именным указом Сената.

Петру, однако, уже не довелось увидеть свое детище: он скончался 8 февраля 1725 г.

Учреждение Академии было объявлено именным указом Екатерины I от 18 декабря 1725 г., и 7 января 1726 г. (27 декабря 1725 г. ст. ст.) состоялось ее первое торжественное публичное собрание ².

К моменту приезда Эйлера Академия насчитывала 14 профессоров (академиков), распределенных на три класса: математический, физический и гуманитарный. Средний возраст членов Академии составлял тогда 35 лет ³. Первоначально Д.Бернулли имел в виду, что Эйлер будет назначен при нем адъюнктом по физиологии, но фактически Эйлер сразу же был приписан к математическому классу.

Академики собирались дважды в неделю на заседания Конференции (так называлось Общее собрание академиков) и в этих заседаниях обсуждали свои научные работы. Кроме того, они обязаны были читать публичные лекции, готовить монографии или учебники и рассматривать направляемые в Академию технические и квалификационные запросы.

Эйлер сразу же активно включился в академическую жизнь. В 30-х годах он выступал в Конференции чаще всех – в среднем 10 раз в год (при общем числе 30–40 докладов). Только в 8 томах академического ежегодника “Комментарии” за 1730–1740 гг. Эйлер опубликовал 58 работ.

В январе 1731 г. Эйлер стал полноправным профессором теоретической и экспериментальной физики, а в 1733 г. получил, наконец, кафедру высшей математики. Сообразно с ростом авторитета Эйлера росло и его материальное благосостояние. Начав в 1727 г. с оклада в 300 рублей в год, он достиг к 1740 г. оклада в 1200 рублей.

Наряду с собственно научной работой, Эйлер читал лекции – сначала по физике, а позже по математике. С 1735 г. он вел большую работу в Географическом департаменте Академии по подготовке генеральной карты России. Вспоминая впоследствии об этой работе, Эйлер писал: “Я уверен, что география российская чрез мои и г. профессора Гейнзиуса труды приведена гораздо в исправнейшее состояние, нежели география немецкой земли”⁴. Наряду с этим Эйлер вел в течение многих лет и самостоятельные наблюдения в астрономической обсерватории. Помимо того, он привлекался к выполнению разнообразных поручений, которые Академия получала от правительственных учреждений. Так, Эйлер принимал участие в обсуждении проекта подъема большого кремлевского колокола в Москве, в экспертизах весов различных конструкций и пр. Он участвовал в разработке программы экзаменов для кадетского корпуса, сам принимал экзамены у кадетов, а также и у различных технических специалистов для определения их квалификации⁵.

Неутомимая работоспособность Эйлера не знала никаких преград, и даже когда осенью 1738 г. он лишился, в результате тяжелого воспаления, правого глаза, то и это никак ее не ослабило.

В Петербурге сложился и окреп талант Эйлера. Здесь он сформировался как ученый мирового масштаба. “Такому вожделенному случаю, – писал Эйлер в 1749 г., – не только доктор Гмелин обязан всем, что сделало известным его имя, но и я, и все прочие, имевшие счастье состоять некоторое время при русской императорской Академии. Мы должны сознаться, сколько обязаны благоприятным обстоятельствам, в которых только там находились. Что собственно до меня касается, то в случае неимения такого превосходного случая, я бы вынужден был главнейше прилежать к другим наукам, от которых, по всем признакам, я бы отупел только. Его королевское величество недавно меня спрашивал: где я изучал то, что знаю? Я, согласно истине, отвечал, что всем обязан моему пребыванию в петербургской Академии наук”⁶.

Обстановка в Петербургской Академии в 30-х годах не была простой. Отсутствие официального регламента оставляло ее зачастую в безраздельное распоряжение советника канцелярии И.Д.Шумахера, привлеченного Петром I к созданию в Петербурге библиотеки и кунсткамеры еще задолго до создания Академии. Человек властный, искусный в интригах, Шумахер противопоставлял себя зачастую академикам, вмешивался в не касающиеся его дела и вызывал открытые протесты академиков. Однако, вместе с тем, он умело вел академический корабль по сложным петербургским волнам. Так или иначе, но обычно ладившего с начальством Эйлера удовлетворяли условия его работы в Петербурге. Но в октябре 1740 года скончалась императрица Анна Иоанновна, а “при последовавшем регентстве дела начали принимать, – по выражению Эйлера, – сомнительный оборот”⁷. Вскоре бывший фаворит императрицы, регент и покровитель Академии Э.И.Бирон был арестован и

осужден на четвертование, замененное пожизненным заключением. В стране возникла реакция, грозившая резко сказаться на положении Академии наук, пользовавшейся расположением смещенной власти. Учитывая создавшуюся обстановку, Эйлер принял полученное им ранее приглашение прусского короля в реорганизуемую Берлинскую академию. Весной 1741 г. он обратился с ходатайством о расторжении незадолго до того обновленного контракта. Получив разрешение на льготных условиях, с назначением пенсии и званием почетного члена Академии, Эйлер 19 июня 1741 г. покинул Петербург и 25 июля 1741 г. прибыл в Берлин.

3. Предшественником Академии наук в Берлине было созданное там по инициативе Лейбница в 1700 г. Научное общество, влачившее жалкое существование. В 1740 г. на трон вступил Фридрих II, нареченный впоследствии в Пруссии Великим. Претендовавший на просвещенный абсолютизм, Фридрих задумал создать в Берлине блестящую Академию наук, распорядившись о приглашении в нее крупнейших ученых и, в частности, Леонарда Эйлера – “великого алгебраиста”. Оформление новой Академии ожидало окончания Силезских войн. Украсив Академию Эйлером, король не собирался привлекать его к ее руководству, подбирая для этого кандидата в кругах французских просветителей. Наконец, в 1745 г. подходящий президент был найден. Им оказался француз Мопертюи, прославившийся незадолго до того градусными измерениями дуги меридиана в Лапландии.

Новая Берлинская академия, названная Академией наук и словесности (*Académie des sciences et belles-lettres*), начала фактически работать в конце 1745 г. Непосредственную связь Академии с королем осуществлял Мопертюи. Академия была разделена на четыре класса: физический (“экспериментальной философии”), математический, философский (“спекулятивной философии”) и филологический. 3 февраля 1746 г. Эйлер был назначен директором математического класса. Как и в Петербурге, Эйлер выступал в Академии около 10 раз в год с научными докладами и привлекался одновременно к различным техническим экспертизам. Так, Эйлер занимался вопросами гидравлических машин, артиллерии, картографии, участвовал в разработке улучшения судоходных каналов и водоснабжения королевского дворца, в рассмотрении технических аспектов солеварения, проектов лотерей и пр. Большую работу вел Эйлер по контролю над изданием календарей, приносящих определенный доход Академии. Он занимался и различными другими научно-административными делами, связанными с академической обсерваторией, ботаническим садом и т. п.⁸

Тем не менее, находясь в деловом контакте с Фридрихом II, Эйлер постоянно оставался инородным телом в ближайшем окружении “короля-философа”, не ценившего отвлеченных математических изысканий и не раз насмехавшегося в своих стихах над лишенным салонного блеска великим математиком.

После смерти Мопертюи (1759) Эйлер остался в Берлинской академии едва ли не ее фактическим руководителем. Однако Фридрих II так и не пожелал назначить Эйлера президентом. В результате Академия осталась (на 175 лет!) вовсе без президента, а общее руководство ею взял на себя пока лично Фридрих II.

В создавшейся обстановке Эйлер решил вернуться в Петербург. К тому же, в 1764–1765 гг. у него возникли разногласия с руководством Академии по поводу ведения ее финансовых дел. Наконец, 2 февраля 1766 г. Эйлер обратился к королю с просьбой отпустить его, на что получил согласие лишь через три месяца.

Заблаговременно ликвидировав свое разросшееся недвижимое имущество, Эйлер покинул Берлин вместе со своей большой семьей 9 июня 1766 г. и 28 июля прибыл

в Петербург. Путешествие его было триумфальным – по пути Эйлер был гостем польского короля в Варшаве и герцога Курляндского в Митаве (теперь Елгава), а в Риге ему была выделена почетная охрана.

Прежде чем говорить о втором петербургском периоде жизни Эйлера необходимо подчеркнуть, что в течение 25 лет его наиболее активной творческой жизни, проведенных в Берлине, он постоянно поддерживал теснейшие деловые связи и с Петербургской Академией наук. Число научных статей (не считая отдельных книг), опубликованных за эти четверть века в Берлине и Петербурге, составляет, соответственно, около 130 и 100. В Берлине у Эйлера одно время стажировались и жили прикомандированные к нему из Петербурга русские ученики. Как и раньше, он привлекался к различного рода экспертизам и к разрешению всяких сложных ученых и внутриакадемических вопросов. На Эйлере лежала в значительной степени обязанность подбора кадров для Петербурга. Можно смело сказать, что в течение четверти века Эйлер являлся своего рода центрально-европейским филиалом Петербургской Академии наук. “Я до сих пор работал для императорской Академии, – писал он сам в 1760 г. в Россию, – не как отсутствующий член, но наверное также много, как бы я состоял там налицо”⁹.

4. Леонард Эйлер был принят в Петербурге в 1766 г. с большим почетом. Екатерина II назначила Эйлеру оклад размером в 3000 рублей в год, выдала 3000 рублей на переезд и 8000 рублей на покупку дома. Старший его сын Иоганн-Альбрехт, ставший уже в возрасте 20 лет членом Берлинской академии, был принят в Петербургскую Академию наук профессором физики с окладом 1000 рублей в год, а с 1769 г. стал конференц-секретарем Академии. В первые же дни по приезде в Петербург императрица благосклонно выслушала соображения Эйлера о путях усовершенствования работы Академии. 10 ноября 1766 г., вместо ранее управлявшей академическими делами Канцелярии, была учреждена Комиссия под дирекцией графа В.Г.Орлова “для разбора и приведения в лучшее состояние всех академических департаментов”. В состав Комиссии вошли шесть академиков, в том числе отец и сын Эйлеры. В марте 1767 г. Эйлеру, совместно с его учеником С. Я. Румовским, было поручено общее руководство Географическим департаментом Академии, которому правительство придавало большое значение. Казалось бы, что, наконец, Эйлер получил реальную возможность влиять на общеакадемическую политику. Однако вскоре Екатерина II утратила интерес к прогрессивным реформам, и Академия наук стала лишаться своих прозрачных академических свобод. Взаимоотношения Эйлера с Орловым стали тоже осложняться. Дело кончилось прошением Эйлера об увольнении его из состава Комиссии и от руководства Географическим департаментом.

Все эти события разворачивались на фоне постепенной утраты Эйлером зрения. Еще осенью 1766 г. у него произошла резкая потеря зрения на левый глаз. Осенью 1771 г. Эйлеру удалили катаракту с левого глаза, но это не привело к успеху. В результате практически все 17 лет своего второго пребывания в Петербурге Эйлер был полуслепым и мог писать лишь мелом на большой грифельной доске. Ему читали нужные сочинения, он производил в уме выкладки, диктовал и кое-что набрасывал на своей грифельной доске, оставляя оформление работ помощникам¹⁰. Но такова была сила его гения, что, избавившись от необходимости самостоятельно переписывать получаемые им результаты, Эйлер выполнил за эти годы невероятное количество исследований, хотя и не содержащих, как правило, таких фундаментальных результатов, которые характеризовали его предшествовавшие труды. Наряду с

этим, Эйлера по-прежнему продолжали еще привлекать в 70-х годах к различным экспертизам. Так, например, в 1776 г. он входил в комиссию по рассмотрению проекта моста через р. Неву, составленного И.П.Кулибиным.

В последний год жизни Эйлера обстоятельства ему вновь улыбнулись. Директором Академии была назначена княгиня Е.Р.Дашкова, проявившая положительный интерес к делам Академии и личное уважение к Эйлеру. Однако для последнего это было уже прощанием с Академией. 18 сентября 1783 г. 76-летний Эйлер, как всегда, занимался математическими исследованиями, беседовал за обедом о незадолго до того открытой седьмой планете, а вечером за чаем шутил с внуком. Неожиданно со словами “я умираю” он потерял сознание и через несколько часов, по меткому выражению панегириста, “прекратил вычислять и жить”.

5. Научное наследие Леонарда Эйлера поистине необозримо. Среди его трудов находятся работы по всем разделам чистой и прикладной математики того времени, по механике, астрономии, физике, теории музыки, философии.

Наиболее значительны, конечно, заслуги Эйлера в развитии математического анализа (включая теорию дифференциальных уравнений и вариационное исчисление) и рациональной механики.

В ту эпоху, когда Эйлер вступил на ученое поприще, в математике уже были заложены основы замечательного аппарата дифференциального и интегрального исчисления. Перед математикой и механикой стояла задача всесторонней разработки этого аппарата и применения его для исследования разнообразных задач. Однако ни в самой математике, ни, тем более, в механике не существовало еще никакой общей системы. Требовалось использовать богатейшие возможности математического анализа и поднять теоретические и прикладные разделы высшей математики от состояния совокупности отдельных искусных приемов и решенных задач до уровня систематически построенной совершенной науки. Решению этой задачи и было посвящено, главным образом, творчество Эйлера.

Известным завершением этой программы применительно к математическому анализу явился классический курс Эйлера, состоящий из трех частей – “аналитическая трилогия”, как его назвал крупнейший знаток математического наследия Эйлера А.П.Юшкевич. В эту шеститомную “трилогию”, объемом около 3000 страниц, входят два тома “Введения в анализ бесконечно малых” (1748), “Наставление по дифференциальному исчислению, с его применением к анализу конечных и к учению о рядах” (1755) и три тома “Наставления по интегральному исчислению” (1768–1770), содержащего и методы интегрирования дифференциальных уравнений. Этот блестящий курс, переведенный в наше время и на русский язык, не имеет аналогов среди сочинений XVIII в. Множество изложенных здесь Эйлером результатов принадлежит ему самому, и почти все они вошли в золотой фонд достижений математического анализа.

Наряду с “аналитической трилогией” Эйлера следует упомянуть и его “Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума или минимума” (1744) – первый трактат по вариационному исчислению.

Помимо знаменитых руководств по математическому анализу, Эйлеру принадлежат также два тома “Введения в арифметику” (1738–1740) для академической гимназии и выдержавшее около 30 изданий на шести европейских языках двухтомное “Полное руководство по алгебре” (1768–1769), включающее теорию алгебраических уравнений и Диофантов анализ.

Среди конкретных результатов, принадлежащих Эйлеру в математическом анализе, отметим методы решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Он исследовал также некоторые решения довольно общего линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами, частными случаями которого являются уравнения Бесселя, Лежандра и гипергеометрическое уравнение. Эйлер развил методы приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, возродившиеся в наше время в связи с интенсивным развитием вычислительной математики. Он заложил общие подходы в вариационном исчислении и указал дифференциальное уравнение (названное позже его именем), определяющее условия экстремума функционала. Эйлер начал исследование ряда важных специальных функций (например, В- и Г-функции, функций Бесселя первого рода, ζ -функции действительного аргумента). Он внес фундаментальный вклад и в развитие теории аналитических функций и теории чисел. Наконец, даже многие общепринятые в наши дни математические обозначения (такие как π , e , i , обратные тригонометрические функции и др.) закрепились в математике благодаря Эйлеру.

Не все полученные Эйлером результаты были обоснованы им надлежащим образом, да и не все они могли быть обоснованы средствами XVIII в. Но надо отметить, что даже отдельные подвергавшиеся в течение многих десятилетий резкой критике места его работ, – такие, как например, использование расходящихся рядов, – представляются современному исследователю весьма глубокими. Содержательность некоторых других нечетко сформулированных представлений Эйлера стала очевидна также только в наше время. Так, например, обстоит дело с общими представлениями Эйлера о понятии функции, от которых, как подчеркивал А.П.Юшкевич, “нити протягиваются к новейшим методам XX в., к обобщенным функциям С.Л.Соболева и Л.Шварца”; “здесь, – добавляет Юшкевич, – как и в суммировании расходящихся рядов, Эйлер проявил гораздо большую прозорливость и смелость мысли, чем многие его современники” [19].

Выдающийся вклад был внесен Эйлером в формирование рациональной механики, о чем подробнее пойдет речь ниже (см. п.п. 10 и сл.). В 1736 г. Эйлер опубликовал двухтомную “Механику”, в которой дал аналитическое изложение динамики точки, открыв тем самым широкий путь для дальнейших исследований. В 1752 г. была опубликована его историческая работа “Открытие нового принципа механики”, в которой Эйлер приложил ньютоновы законы динамики, записанные в неподвижных декартовых координатах, к элементу сплошной среды, что дало ему возможность построить основы динамики твердого тела и гидродинамику идеальной жидкости – первый из разделов разросшейся в XIX веке механики сплошной среды. Впоследствии (1776) Эйлер впервые выписал шесть уравнений движения произвольного тела, присоединив к законам количества движения законы момента количества движения.

В значительной степени с трудами Эйлера связано развитие в середине XVIII века небесной механики, включая теорию возмущений планетных движений и теорию движения Луны.

В области прикладной механики Эйлеру принадлежат фундаментальные исследования по теории корабля, устойчивости упругих стержней, теории трения и др.

Не оставил стороной Эйлер и проблемы физики XVIII века ¹¹.

Имя Эйлера навечно вошло в историю математики и механики. Достаточно сказать, что “Математическая энциклопедия” (1985) содержит 20 статей, непосредственно объясняющих различные понятия, связанные с именем Эйлера (критерии, методы, многочлены, подстановки, постоянные, теоремы, уравнения, формулы, функции и т. п.).

Задел, оставленный Эйлером в математике и механике, оказался настолько велик, что стимулировал математическую мысль на протяжении нескольких поколений. Влиянию сочинений Эйлера на последующие поколения в значительной мере способствовала и введенная им манера изложения материала.

В “Трактате по небесной механике” Лаплас писал, что Эйлер “благодаря своим открытиям во всех областях анализа и совершенству, внесенному им в язык, может считаться отцом современного анализа” [34, т. 5, с. 162]. М.В.Остроградский заметил по поводу этих слов Лапласа: “Это звание отца вполне заслужено, так как именно Эйлер создал современный анализ и сформировал нынешний язык математики. Пусть обратятся к трудам предшествующих и современных ему математиков, пусть почитают Паскаля, Лейбница, всех Бернулли, Клеро, Даламбера и других. Это чтение покажется утомительным, как чтение трудов, язык которых устарел, а последовательность и способ выражения мыслей нам чужды. При этом окажется нужным уделять больше внимания форме, в которой преподносятся идеи, чем самим идеям. И если теперь больше не пишут так, как писали эти столь заслуженно знаменитые люди, если мы отошли от их манеры трактовки вопросов, то это потому, что Эйлер увлек за собой последующие поколения и научил их думать и писать так, как думал и писал он сам. Чтение его работ является самым легким и самым полезным делом. Он присоединил славу великого преобразователя к заслугам весьма понятного и весьма изящного автора” [10].

Подлинными трудами Эйлера интенсивно изучали на протяжении всего XIX века, и они продолжали оказывать прямое влияние на воспитание математиков и развитие математики даже в начале XX века. Академик В.И.Смирнов вспоминал, например, что в годы его учебы в Петербургском университете некоторые экзаменаторы еще спрашивали о том, в каком именно сочинении Эйлера находятся те или иные его результаты.

Эйлер остается, пожалуй, единственным ученым середины XVIII в., работы которого легко читаются и в наши дни.

6. Общий объем сочинений Эйлера громаден. Свыше 800 его опубликованных научных работ составляют около 30000 печатных страниц и складываются в основном из следующего: 600 статей в периодических изданиях и сборниках Петербургской Академии наук¹², 130 статей в “Мемуарах” Берлинской академии и изданных в Берлине сборниках, 30 статей в разных журналах Европы, 15 мемуаров, удостоенных премий и поощрений Парижской Академии наук, и 40 книг отдельных сочинений¹³.

“Полное собрание трудов” Эйлера (*Opera omnia*) издается под эгидой Швейцарского общества естествоиспытателей (*Schweizerische Naturforschende Gesellschaft*) вот уже в течение века. Первоначально оно планировалось в трех сериях. На сегодня завершена публикация первой серии (математика), составившей 29 томов объемом 14 тысяч страниц in-4°, и третьей серии (физика и разное), составившей 12 томов объемом 5 тысяч страниц. Из 31 тома второй серии (механика и астрономия), объемом 11 тысяч страниц, вышло в свет 29 томов, а недостающие два тома находятся в процессе

подготовки к печати. Таким образом, эта часть издания, первый том которого был опубликован еще в 1911 г., близка к завершению.

В 1970-х годах Швейцарское общество естествоиспытателей (преобразованное позже в Швейцарскую Академию естественных наук) приступило совместно с Академией наук СССР, являющейся обладательницей основной части рукописного архива Эйлера, к изданию четвертой серии его “Полного собрания трудов”, которая первоначально предполагалась состоящей из двух частей: научная переписка (IV-A) и неопубликованные рукописи (IV-B). На сегодня запланировано ориентировочно 8–10 томов научной переписки, а обсуждение судьбы серии IV-B приостановлено в связи с прекращением финансирования издания швейцарскими властями (вместо этого обсуждается вопрос о сканировании всех рукописей Эйлера и вынесении их в Интернет, вне рамок “Opera omnia”). Первый том серии IV-A вышел в свет в 1976 г. и содержит аннотированный перечень всей сохранившейся переписки Эйлера, составляющей свыше 1000 писем Эйлера и почти 2000 писем его корреспондентов, среди которых находятся практически все крупнейшие ученые того времени. (Вся сохранившаяся переписка носит научный и деловой характер, личная переписка Эйлера, к сожалению, не сохранилась.) Кроме того, вышло еще три тома этой серии: переписка Эйлера с французскими математиками Клеро, Даламбером и Лагранжем (1980), с Фридрихом II и Мопертюи (1986) и с Иоганном Бернулли (1998). Сейчас ведется интенсивная работа по завершению подготовки к изданию всей серии IV-A.

Анализ научной переписки Эйлера дает много важных и интересных деталей для характеристики эпохи и для понимания развития математики и механики в середине XVIII века. Сам Эйлер писал в 1765 г. по поводу своей ученой корреспонденции, что “если бы кто-нибудь захотел взять на себя труд ее прочитать, в ней нашли бы много важных мест, публикация которых больше соответствовала бы вкусам публики, чем глубочайшие разработки” [22, т. 1, с. 259].

7. Значение Эйлера для Петербургской Академии наук и становления всего математического естествознания огромно. Петербургская Академия наук оказала своему скончавшемуся старейшине достойные почести, в 1786 г. его бюст был установлен на мраморной колонне в зале заседаний Академии против кресла президента. Однако, как это иногда бывает, вскоре даже могила Эйлера была утеряна. Лишь через полвека ее случайно обнаружили вновь, и в 1837 г. на нее был возложен величественный гранитный камень со скромной латинской надписью “Леонарду Эйлеру Петербургская академия”. По случаю 250-летия со дня рождения Эйлера его захоронение было перенесено в некрополь Александро-Невской лавры.

В 1945 г. президент Академии наук СССР С.И.Вавилов писал, что “вместе с Петром 1 и Ломоносовым Эйлер стал добрым гением нашей Академии, определившим ее славу, ее крепость, ее продуктивность” [1].

К 150-летию со времени своего основания (1879) Петербургская Академия наук озаботилась приобретением хорошего портрета Леонарда Эйлера. Для этой цели была заказана копия находящегося в Швейцарии портрета работы Гандмана. По случаю 50-летия Пулковской обсерватории Академия передала этот превосходный портрет обсерватории, где он и находился до Великой Отечественной войны. Во время войны портрет пропал, а в 1972 г. будущий директор Института физики атмосферы РАН князь Г.С.Голицын приобрел в одном из комиссионных магазинов Ленинграда за бесценок некий портрет “неизвестного”, в котором он сразу узнал Эйлера. Отреставрировав портрет, Г.С.Голицын поместил его в своем кабинете. Автор

случайно узнал об этом портрете и сразу же идентифицировал его с пропавшим академическим портретом [2].

Жизни и творчеству Эйлера посвящена колоссальная литература. Годовщины дня его рождения и кончины систематически отмечались – с постоянно нарастающим размахом, – начиная с 1884 года. Годовщина смерти великого ученого была отмечена в 1983 г. также и ЮНЕСКО. Материалы многих из этих юбилейных мероприятий публиковались в виде отдельных сборников [5, 6, 7, 14, 29, 30, 35, 38, 44].

Из последних работ, посвященных общему обзору жизни и деятельности Эйлера, стоит отметить немецкую монографию Э. Фелльмана (1995), переведенную теперь и на английский язык [28]. К юбилейным торжествам 2007 г. был приурочен также выпуск посвященного Эйлеру комикса [31].

Анализ научных трудов Эйлера можно найти, помимо общих сочинений и отдельных статей, во вводных очерках к отдельным томам “Opera omnia”. В 2007 году Математическая ассоциация Америки выпустила еще шесть томов, посвященных трудам Эйлера [25, 26, 36, 39, 40, 41], один из которых является переводом русского сборника [14].

В Интернете имеется сайт (www.math.dartmouth.edu/~euler) (дата обращения 15.01.2009), на который вынесены сочинения Эйлера и сопутствующие им материалы. Швейцарский сайт (www.euler.ch) (дата обращения 15.01.2009) посвящен больше биографии и генеалогии потомков Эйлера.

8. Добавим еще несколько слов о семье Эйлера. 7 января 1734 г. (27 декабря 1733 г. ст. ст.) он женился на дочери академического живописца Катарине Гзелль. От этого брака у него родилось много детей, но выросли из них только пятеро – три сына и две дочери. После смерти Катарини Эйлер женился вторично, чтобы обеспечить себе независимость от детей. Это обстоятельство, лишавшее детей ожидаемого ими наследства, вызвало у них, конечно, взрыв возмущения, о чем мы узнали из сохранившихся писем И.-А.Эйлера [28, с. 124–129].

Сыновья Эйлера остались в России. Старший – Иоганн-Альбрехт был, как сказано, конференц-секретарем Академии, второй сын – Карл стал лейб-медиком, а младший – Христофор дослужился до чина генерал-лейтенанта артиллерии.

Внук Леонарда Эйлера генерал А.Х.Эйлер был в 1846 г. возведен в потомственное российское дворянство с присвоением герба. Прямые потомки Леонарда Эйлера дали России на протяжении полутора веков ряд крупных военных и государственных деятелей.

Одна из дочерей И.-А.Эйлера вышла замуж за будущего академика Николая Фуса – ближайшего ученика и помощника Эйлера, сменившего своего тестя на посту неперменного секретаря Петербургской академии. После него этот пост занял его сын – правнук Эйлера академик Павел Николаевич Фус. В результате научное делопроизводство и практическое руководство в Академии наук находились в течение 86 лет в руках наследников Эйлера.

Фамилия Эйлеров не перевелась и доньне: прямые потомки Леонарда Эйлера, с гордостью носящие эту фамилию, живут в Петербурге, Москве и Швейцарии (куда они попали после переворота 1917 года) ¹⁴.

К сожалению, личный архив Леонарда Эйлера, принадлежавшие ему вещи, семейные бумаги, включая обширную переписку с отцом, не сохранились. Возможно, многое из этого было утрачено еще в начале XIX века, а меньшая часть в начале XX века.

9. Основные исходные понятия механики и законы движения были подытожены и четко сформулированы в “Началах” Ньютона (1687). Однако у Ньютона не доставало еще многих существенных элементов, прежде всего, для построения механики системы, твердого тела и сплошной среды. Главным сдерживающим препятствием оставалось и то, что “Начала” были изложены с помощью геометрического метода древних, не открывавшего пути для дальнейшего продвижения. Первая попытка изложить всю динамику в несколько более простом и систематическом виде, с использованием элементов математического анализа, была предпринята Якобом Германом в его “Форономии” (1715/16).

Молодой Эйлер направил поначалу свои усилия на упорядочение динамики точки и последовательное переложение ее на язык математического анализа. Свои первые замыслы Эйлер реализовал в “Механике” (1736), которая была опубликована в двух томах в качестве “Приложения” к “Комментариям” Петербургской Академии наук.

В общем примечании к первой главе первого тома “Механики” Эйлер поместил общий план построения всей механики, как она представлялась ему в середине 30-х годов: “Сначала мы будем рассматривать тела бесконечно малые, т. е. те, которые могут рассматриваться как точки. Затем мы приступим к телам, имеющим конечную величину, – тем, которые являются твердыми, не позволяя менять своей формы. В-третьих, мы будем говорить о телах гибких. В-четвертых, о тех, которые допускают растяжение и сжатие. В-пятых, мы подвергнем исследованию движение многих разъединенных тел, из которых одни препятствуют другим выполнить свои движения так, как они стремятся это сделать. В-шестых, будет рассматриваться движение жидких тел. По отношению к этим телам мы будем рассматривать не только то, как они, предоставленные сами себе, продолжают движение, но, кроме того, мы будем исследовать, как на эти тела воздействуют внешние причины, т.е. силы” [18, с. 89–90].

Прежде чем говорить об отдельных результатах Эйлера в механике, сделаем одно общее замечание о месте его работ в ряду трудов его современников. Среди близких Эйлеру по возрасту ученых-механиков первого ранга надо назвать Даниила Бернулли, Клеро и Даламбера. Первое место в этой плеяде, безусловно, занимал Даламбер, а среди младших современников Эйлера – Лагранж. Но Лагранж и его “Аналитическая механика” олицетворяют собой уже следующий за Эйлером этап в математизации механики. С Даламбером у Эйлера сложились сложные отношения. Исследования Даламбера пересекались с работами Эйлера практически во всех разделах механики. Особенно тесно переплетались они в динамике твердого тела, в подходах к построению гидродинамики идеальной жидкости и в теории колебания струн. Даламбер был, бесспорно, гениальнейшим соперником Эйлера в механике. Ему принадлежали выдающиеся идеи, часто опережавшие исследования Эйлера, но Даламбер пользовался устаревшим тяжеловесным математическим языком, и его идеи были выражены в труднодоступной неясной форме. Эйлер же придал новый строгий стиль изложению точных наук. В результате для большинства конкурирующих работ Эйлера и Даламбера будущее осталось за работами Эйлера [16].

10. В “Механике” Эйлер впервые систематически изложил динамику свободной материальной точки и точки, находящейся на заданной кривой или поверхности. Им было последовательно изучено движение точки в случае отсутствия сопротивления (в пустоте) и в сопротивляющейся среде. Исследование проведено в естественных координатах, связанных с траекторией движения. Говоря о механике системы, следует

отметить, что Эйлер не посвятил ей, как таковой, ни одной самостоятельной работы, хотя, конечно, многократно рассматривал различные задачи динамики механических систем и включил этот раздел в свой первоначальный план изложения всей механики. Для объяснения причины этой непоследовательности напомним, что общий метод исследования механических систем был предложен Даламбером в его “Трактате по динамике” (1743). Не входя в подробности, отметим, что Эйлер уже в 30-х годах располагал предпосылками достаточно общего метода, эквивалентного принципу Даламбера, и развивал в последующем свой подход к задачам динамики механических систем в духе идей Ньютона вполне самостоятельно. Вероятно, именно поэтому Эйлер не ссылался никогда на “принцип Даламбера” и, в то же время, никогда не излагал идею своего общего подхода в качестве отдельного метода, чтобы не входить в приоритетный спор с Даламбером.

Отметим один частный результат Эйлера, относящийся к механике относительного движения, изложенный в сочинении “О движении тел на подвижных поверхностях” (1746), где Эйлер получил впервые, одновременно с Д.Бернулли, закон сохранения момента количества движения. При решении задач Эйлер систематически вычислял здесь абсолютные ускорения в составном движении (в горизонтальной плоскости), разлагая их вдоль направлений относительного и переносного движения. В этих разложениях легко усматриваются относительное, переносное и дополнительное (кориолисово) ускорения. Аналогичные разложения абсолютных ускорений Эйлер широко использовал позже при исследовании течения воды во вращающихся трубах. Однако Эйлер не заметил в структуре этих разложений общего свойства, обнаруженного впоследствии Кориолисом. Пример дифференциального уравнения движения системы n тел появляется у Эйлера во второй половине 40-х годов при исследовании задачи о движении системы шарнирно соединенных жестких стержней на гладкой горизонтальной плоскости (1751).

Развитие механики систем с конечным числом степеней свободы было тесно связано в первой половине XVIII века с теорией колебаний. Не останавливаясь специально на этом важном для общей истории динамики ее разделе, необходимо отметить, что в 30-х и начале 40-х годов Эйлер (наряду с Даниилом и Иоганном Бернулли) внес существенный вклад и в его развитие. Большое значение имело для развития теории колебаний открытие Эйлером способа интегрирования линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В частности, уже в 1739 г. на примере синусоидально возбуждаемого осциллятора Эйлер открыл явление резонанса (1750).

С середины 40-х годов Эйлер посвящает много работ небесной механике. Основное место здесь занимают различные аспекты задачи трех тел – теория движения Луны, теория возмущения планетных движений и, наконец, с 60-х годов, собственно задача трех тел в чистом виде. Наряду с этим Эйлеру принадлежат, конечно, и исследования методов определения невозмущенных орбит, в том числе кометных орбит, для которых он получил, например, известное уравнение, выражающее интервал времени через сумму радиус-векторов и хорду и остававшееся до последнего времени основой вычисления параболических орбит. Вклад Эйлера в становление и развитие небесной механики весьма значителен. Однако часто в современной литературе методы Эйлера связываются с именами других ученых, которые лишь усовершенствовали его методы. Кроме того, надо сказать, что история небесной механики в XVIII веке вообще до сих пор не изучена должным образом. Обычно уже в XIX веке исследователи не обращались к источникам, предшествовавшим “Трактату по небесной механике”

Лапласа, обобщившему основные достижения того времени в этой области. Впрочем, сам Лаплас высоко ценил вклад Эйлера в небесную механику и, особенно, в теорию движения планет.

Действительно, можно считать, что теория возмущений планетных движений ведет свое начало от мемуаров Эйлера о неравенствах в движениях Юпитера и Сатурна, представленного на конкурс Парижской Академии наук в 1747 г. (1749). Эти мемуары Эйлера, вместе с трактатом Даламбера о предварении равноденствий и нутации земной оси (опубликованном в Париже в том же году) и “Теорией Луны” Клеро (представленной на конкурс Петербургской Академии наук в 1750 г. и опубликованной в 1752 г.), может по справедливости считаться отправной точкой всей современной небесной механики (если не принимать, конечно, во внимание “Начала” Ньютона). Заметим, что в этой и других работах Эйлера конца 40-х годов уже содержится идея метода вариации элементов, развитого им подробнее в последующих трудах.

Любопытно, что в 40-х годах Эйлер стал сомневаться в строгой справедливости закона Ньютона всемирного тяготения. Это сомнение опиралось как на некоторые общие соображения, так и на отдельные ошибки, допущенные Эйлером в вычислениях планетных возмущений. И только выполненное Клеро (в только что упомянутом сочинении) исследование движения апогея Луны убедило Эйлера в точности закона Ньютона. В дальнейшем Эйлер продолжил исследования движений Юпитера и Сатурна, представив следующие свои мемуары на эту тему Парижской академии в 1752 г. Как подчеркнул М.Ф.Субботин, “развитая им здесь идея нахождения возмущенных значений эксцентриситетов и долгот перигелиев ... является, по существу, зародышем теории представления вековых возмущений в тригонометрической форме, ... развитой позднее Лагранжем” [16, с. 299] ¹⁷. В последующем Эйлер внес много других усовершенствований в теорию возмущений. Так, например, ему принадлежит эффективный численный метод интегрирования уравнений возмущенных движений в прямоугольных координатах. Отметим еще большой цикл работ Эйлера по внедрению в теорию планетных возмущений мощных методов, развитых в теории движения Луны.

Первые исследования Эйлера о движении Луны подытожены в его берлинской монографии (1753). На основе развитой здесь теории Тобиасом Майером были вычислены таблицы Луны, удостоенные впоследствии Британским парламентом денежной премии (с выплатой $\frac{1}{10}$ части суммы Эйлеру). Но наиболее интересна вторая теория движения Луны Эйлера (1772), опубликованная в Петербурге. Первоначально она не привлекла широкого внимания астрономов вследствие своей сложности. Но через 100 лет этой теорией заинтересовался Хилл, который развил заложенные в ней идеи и опубликовал в 1870-х годах две работы, ставшие одним из важнейших источников дальнейшего прогресса всей небесной механики. Записанные Эйлером в прямоугольных координатах, уравнения движения Луны оказались типичными для теории нелинейных колебаний, и продолженные Хиллом исследования Эйлера по методам их интегрирования внесли значительный вклад в общую теорию нелинейных колебаний.

Необходимо отметить участие Эйлера в начальной разработке первого интегрального вариационного принципа механики – принципа наименьшего действия, первоначально высказанного в нечеткой, но претенциозной форме президентом Берлинской академии Мопертюи. Эйлеру принадлежит, по существу, первая строгая формулировка этого принципа для движения материальной точки,

вместе с разработанным им аппаратом вариационного исчисления. Однако в том виде, который носил принцип наименьшего действия у Эйлера, он еще не был пригоден для решения новых задач механики. Дальнейший прогресс был достигнут после обобщения принципа Лагранжем на механические системы, за которым последовала в XIX в. разработка классических интегральных вариационных принципов, переросших в конечном итоге рамки самой механики.

11. Выдающийся вклад был внесен Эйлером в создание общей теории движения твердого тела. Первоначально, в конце 30-х годов, при подготовке своей “Корабельной науки” (1749), напечатанной в Петербурге, Эйлер занимался некоторыми частными задачами динамики твердого тела. В этом большом двухтомном сочинении мы находим разложение движения корабля на поступательное и вращательное, попытку расчета малых колебаний корабля на воде, продвинутое учение об устойчивости равновесия плавающих тел, элементы учения о моментах инерции.

К общей теории движения твердого тела Эйлер вернулся в 1749–1750 гг. Известным побуждением к тому послужили, по-видимому, исследования Даламбера, вошедшие в его трактат о предварении равноденствий и нутации земной оси и содержавшие определенные подходы к теории вращения твердого тела. Первый решающий шаг для построения динамики твердого тела был совершен Эйлером в мемуаре “Открытие нового принципа механики” (1752). Здесь Эйлер изложил “общий и фундаментальный принцип всей механики”, который по существу заключался в применении основного закона динамики (второго закона Ньютона) для каждой бесконечно малой частицы в проекциях на оси неподвижной системы координат:

$$Md^2x = Pdt^2, \quad Md^2y = Qdt^2, \quad Md^2z = Rdt^2,$$

где M – масса частицы, а P , Q и R – составляющие внешних сил (Эйлер записывает эти уравнения с коэффициентом 2 в левой их части, что объясняется применявшейся тогда системой физических единиц, в которой ускорения безразмерны, а скорости измеряются специальным образом). В своих мемуарах Эйлер писал, что “именно на этом единственном принципе должны быть основаны все другие принципы, как те, которые уже получены в механике и гидравлике и которыми пользуются сейчас для определения движения твердых и жидких тел, так также и те, которые пока еще неизвестны и которые нам нужны для развития как указанных выше случаев твердых тел, так и многих других, которые относятся к жидким телам”.

Итак, новый принцип Эйлера включал выделение элементарной частицы из сплошной среды и применение к ней основного закона Ньютона, записанного в проекциях на оси неподвижной системы координат. Сейчас трудно себе даже представить тот импульс, который придала механике эта работа Эйлера, которая кажется нам сегодня самоочевидной. Но именно она открыла самый простой и естественный путь для построения динамики твердого тела и, главное, механики сплошной среды¹⁵.

Справедливости ради надо отметить, что запись основного закона динамики в проекциях на оси неподвижной системы координат применительно к изучению движения материальной точки была предложена в качестве самостоятельного “принципа” механики еще Маклореном в его “Трактате о флюксиях” (1742) [37]. В 40-х годах такая запись уравнений движения уже использовалась рядом ученых, в том числе и самим Эйлером. Однако никому до Эйлера не пришла в голову мысль о том, что эти дифференциальные уравнения, будучи выписаны для произвольного элемента

среды (или тела), непосредственно приводят к математической формулировке общих задач механики. (Необходимость независимого привлечения также и закона момента количества движения была, по-видимому, осознана Эйлером значительно позже.)

На основании этого подхода Эйлер вывел сразу же общие уравнения вращения твердого тела, однако представил их первоначально в малоудобной для исследования форме, отнесенной к неподвижной системе координат, вводя моменты инерции тела (относительно неподвижных осей), которые меняются в процессе движения тела.

В 1755 г. Сегнер опубликовал небольшое сочинение, посвященное исследованию свободных осей вращения произвольных тел. Понятие свободной оси вращения использовалось Эйлером ранее в его “Корабельной науке”, но там он не утверждал еще, что каждое тело, как это установил Сегнер, имеет три взаимно перпендикулярные оси свободного вращения. По признанию Эйлера, ознакомление с работой Сегнера побудило его вернуться к изучению вращения твердых тел и дало в руки путеводную нить для построения компактной общей теории. В результате, в своих работах по теории вращения твердых тел, относящихся к концу 50-х годов (но опубликованных в “Мемуарах” Берлинской академии лишь в 1765 г.), Эйлер использовал в качестве основной системы координат главные оси инерции тела, являющиеся свободными осями вращения, и придал общим динамическим уравнениям ставшую ныне классической (с точностью до обозначений) форму:

$$dx + \frac{c-b}{a}yzdt = \frac{Pdt}{Ma}, \quad dy + \frac{a-c}{b}xzdtd = \frac{Qdt}{Mb}, \quad dz + \frac{b-a}{c}xydt = \frac{Rdt}{Mc}.$$

Здесь M – масса, a , b , c – главные центральные моменты инерции тела (обозначавшиеся у Эйлера через aa , bb и cc), P , Q , R – моменты внешних сил (Эйлер записывает эти уравнения с коэффициентом $2g$ в правой их части, что объясняется уже упоминавшимся выше использованием отличной от современной системы физических единиц). Тогда же Эйлер исследовал и первый знаменитый случай интегрируемости в задаче о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки – центра масс. Эйлеру принадлежит, наконец, и разработка кинематики твердого тела, включая вывод обеих форм кинематических уравнений вращения (одну из которых иногда называют уравнением Пуассона), а равно и развернутое учение о моментах инерции (геометрия масс), за исключением, впрочем, построения эллипсоида инерции.

Завершением основного этапа исследований Эйлера по динамике твердого тела явился его трактат “Теория движения твердых тел” (1765), который он закончил в 1760 г. и считал третьим томом своей “Механики”. Эйлер продолжал заниматься динамикой твердого тела и в последующие годы. В частности, в его сочинении “Новый метод определения движения твердых тел” (1776) впервые выписаны совместно шесть уравнений движения произвольного тела, представляющие законы количества движения и момента количества движения:

$$\int dM \frac{d^2x}{dt^2} = P, \quad \int zdM \frac{d^2y}{dt^2} - \int ydM \frac{d^2z}{dt^2} = S,$$

$$\int dM \frac{d^2y}{dt^2} = Q, \quad \int xdM \frac{d^2z}{dt^2} - \int zdM \frac{d^2x}{dt^2} = T,$$

$$\int dM \frac{d^2 z}{dt^2} = R, \quad \int y dM \frac{d^2 x}{dt^2} - \int x dM \frac{d^2 y}{dt^2} = U.$$

(У Эйлера эти уравнения записаны с дополнительным коэффициентом в правой их части, как и в приведенной выше системе уравнений). Клиффорд Трусделл считает это место у Эйлера первым в истории механики появлением обоих этих законов в качестве “*фундаментальных, общих и независимых законов механики* для всех видов движений всех видов тел”. В связи с этим Трусделл предложил называть совокупность этих законов “*законами механики Эйлера*” [42, с. 260].

12. Эйлеру принадлежит разработка фундаментальных основ механики жидкости и газа. Интерес Эйлера к задачам движения жидкости проявился еще в юношеские годы. Под влиянием Иоганна Бернулли он использовал тогда при исследовании истечения жидкости из сосудов закон живых сил, воспользовавшись наряду с этим применявшейся уже ранее гипотезой плоских сечений и соответствующей ей формой условия неразрывности. Свои результаты Эйлер доложил Петербургской академии в двадцатилетнем возрасте в августе 1727 г., через две недели после аналогичного доклада Даниила Бернулли. Результаты обоих авторов совпали, и в этой деликатной ситуации Эйлер уступил право публикации полученных результатов своему старшему товарищу, полностью прекратив свои собственные исследования в этой области на четверть века.

Только в середине XX века автор обнаружил и опубликовал рукопись Эйлера 1727 года [15, т. 2, с. 253–280/542–571], содержащую те же результаты, что и полученные Даниилом Бернулли. Любопытно что набросанный Эйлером еще в Базеле проспект трактата о движении жидкости схож с планом последующей “Гидродинамики” Даниила Бернулли (1738). Более того, Эйлер оказал большое влияние и на подготовку “Гидравлики” Иоганна Бернулли (1743) [9].

Сам Эйлер вернулся к общим проблемам движения жидкости лишь в начале 50-х годов, уже после публикации “Гидродинамики” Даниила Бернулли (1738) и “Гидравлики” Иоганна Бернулли (1743). К этому времени Эйлер выработал окончательно два необходимых для общего построения гидродинамики представления: четкое понятие о давлении в текущей жидкости и простую формулировку основного закона динамики (закона импульса) для элементарной частицы среды. Данное Эйлером определение давления явилось рафинированным завершением эволюции этого понятия, возникшего в 1730 г. у Даниила Бернулли и усовершенствованного отчасти Иоганном Бернулли.

Первые подходы к выводу общих континуальных уравнений движения жидкости были предприняты в самом конце 40-х годов Даламбером. Свои гидродинамические исследования он представил в конце 1749 г. на конкурс Берлинской академии и позже опубликовал в Париже (1752). Наряду с соображениями о сопротивлении жидкостей, в его сочинении содержалось рассмотрение непрерывного поля скоростей и вывод дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих движение жидкости в некоторых случаях. Хотя и насыщенное новыми идеями, сочинение Даламбера не доводило исследования до общих уравнений движения жидкости. Более того, написанное в свойственном Даламберу нечетком и непоследовательном стиле, сочинение это трудно для чтения и понимания. Изучавший его тщательно, Трусделл писал: “Ясность и прямота, которых мы ожидали на основании введения к сочинению, нигде не обнаруживаются, и я признаюсь, что мне стоило громадного

труда проследить, насколько это удалось, за действительным содержанием работы, – труда, облегчению которого не послужили многочисленные опечатки в основных результатах” [43, с. LI]. Подчеркнутые Трусделлом недостатки работы Даламбера не лишили ее, конечно, ценности, особенно для Эйлера, который имел возможность ознакомиться с ней в Берлине еще в 1750 г.

Именно Эйлеру удалось построить, с присущей ему ясностью и четкостью, всю систему уравнений континуального движения идеальной жидкости. При этом он опирался на свой упомянутый выше “новый принцип механики”. Первые результаты Эйлера по общей теории движения жидкости относятся, по-видимому, к 1752 г. Два его основные фундаментальные сочинения по гидростатике и гидродинамике, относящиеся к 1753–1755 гг., опубликованы в 1757 г. в “Мемуарах” Берлинской академии.

В первом из этих сочинений (1757) Эйлер обобщил результаты Клеро и придал изложению гидро- и аэростатики ту форму, которая сохранилась, в основном, и до наших дней. Он вводит понятие давления p , измеряемого высотой столба однородной жидкости, указывает на зависимость давления, по крайней мере, от плотности и температуры и дает затем вывод общего уравнения равновесия жидкостей и газов:

$$dp = q (P dx + Q dy + R dz).$$

Эйлер понимает в приведенном уравнении под p высоту столба однородной жидкости, т. е. отношение давления к выбранной им постоянной величине, а под q – соответствующую безразмерную плотность; компоненты массовых сил отнесены здесь к ускорению силы тяжести. Используемая здесь система единиц несколько отличается от той, которая применялась Эйлером при первоначальном изложении им “нового принципа механики”.

Затем Эйлер вводит понятие потенциала сил s и, переписав общее уравнение равновесия в виде $dp = q ds$, указывает на постоянство давления, плотности и температуры на поверхностях уровня потенциала s . Потом он выводит общие зависимости применительно к случаю идеального газа, рассматривает действующие на погруженное тело силы и переходит к подробному рассмотрению различных случаев равновесия жидкостей и газов. Здесь он получает, в частности, известную барометрическую формулу для изотермической атмосферы, а также высказывает соображение о том, что при постоянном объеме температуру целесообразно определять пропорциональной давлению газа.

Второе свое сочинение – “Общие законы движения жидкостей” (1757)¹⁸ – Эйлер начинает с общей постановки задач теории движения идеальной жидкости. Затем из обычного для нашего времени рассмотрения элементарного жидкого параллелепипеда выводятся общие уравнения гидродинамики и уравнение неразрывности для сжимаемых жидкостей:

$$P - \frac{1}{q} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z},$$

$$Q - \frac{1}{q} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z},$$

$$R - \frac{1}{q} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial qu}{\partial x} + \frac{\partial qv}{\partial y} + \frac{\partial qw}{\partial z} = 0.$$

Здесь p – давление, q – плотность, P , Q и R – массовые силы. В оригинальной записи Эйлера эти уравнения отличаются только обозначением частных производных. Вместо введенного позже Лежандром и Якоби и принятого сейчас обозначения частных производных через круглое "∂" Эйлер использовал прямое "d" и для отличия от полных производных частные производные он записывал в круглых скобках. Например, частная производная $\partial p/\partial x$ в записи Эйлера выглядела как (dp/dx) .

Эйлер добавляет тут же, что к этим четырем уравнениям следует добавить пятое, которое дает связь между давлением, плотностью и дополнительной физической величиной, которая влияет на давление и под которой подразумевается, вообще говоря, температура. Полученные в результате пять уравнений, говорит Эйлер, "заклучают в себе всю теорию движения жидкости".

Вслед за приведенным выводом основных уравнений гидродинамики Эйлер вводит потенциалы сил S и скорости W и получает формулу

$$dp = q(dS - d\Pi - udu - vdv - wdw), \text{ где } \Pi = \frac{\partial W}{\partial t},$$

и соответствующие интегралы для случая несжимаемой жидкости, а также, вообще, для баротропных процессов – интегралы, носящие сегодня обычно название интегралов Лагранжа–Коши. Эйлер специально оговаривает здесь существование непотенциальных течений жидкости, приводя в качестве примера один случай вихревого вращения несжимаемой жидкости в отсутствии массовых сил. Заканчивается сочинение исследованием отдельных частных случаев и замечанием, что полученные уравнения переводят задачи движения жидкости из области механики в область математического анализа. При чтении этого сочинения особенно поражают (свойственные и большинству других работ Эйлера) ясность и простота изложения мыслей. Трудно, порой, поверить, что его отделяет от нас уже два с половиной века¹⁹.

Вслед за первыми тремя работами Эйлера по механике жидкости и газа последовали многие другие его сочинения, посвященные гидродинамике и теории распространения звука. Завершением и обобщением их явилась большая работа (516 с.), относящаяся уже к концу 60-х годов и опубликованная в четырех частях в 1769–1772 гг. в "Новых комментариях" Петербургской Академии наук. Первая ее часть включает рассмотрение общих свойств жидкостей и газов, вывод общих уравнений равновесия и исследование частных случаев равновесия в поле силы тяжести и центральных сил. Во второй части выведена система общих уравнений гидродинамики идеальной жидкости и рассмотрены подробнее случаи движения несжимаемых жидкостей, в том числе потенциального течения. Последняя глава посвящена определению движения жидкости по заданному начальному состоянию; здесь, в частности, выведены общие уравнения гидродинамики в так называемых переменных Лагранжа – материальных переменных. Отметим, что эти переменные были указаны Лагранжу Эйлером в его письме от 1 января 1760 г., опубликованном Лагранжем в 1762 г. вместе со своими собственными связанными с этим исследованиями. В третьей части работы Эйлер рассматривает течение в трубах постоянного и переменного сечения, расчет подъема воды при помощи насосов и течения под действием разности

температур. Последняя часть является обобщением многочисленных предыдущих исследований Эйлера по акустике и теории духовых музыкальных инструментов²⁰.

Таким образом, Эйлер заложил основы всей гидродинамики идеальной жидкости, за исключением сверхзвуковой аэродинамики, зародившейся на столетие позже и развившейся уже в XX веке. Не обладая общим понятием напряжения, введенным Коши в 1823 г., Эйлер не смог, конечно, перейти к изучению более сложных моделей механики сплошной среды – вязкой жидкости и упругого тела. Однако многое для дальнейшего развития механики сплошной среды было Эйлером подготовлено.

13. Осветив несколько подробнее две блестящие страницы в творчестве Эйлера – создание им теории движения твердого тела и гидродинамики идеальной жидкости, остановимся теперь коротко на его работах по механике гибких и упругих тел. Задачами механики упругих тел (стержней) Эйлер заинтересовался еще в ранней молодости. Любопытно, что в одной маленькой заметке, написанной Эйлером еще в Базеле, но опубликованной лишь посмертно (1862), Трусделл обнаружил первый вывод закона изгиба стержней Якоба Бернулли из закона Гука для растяжения волокон – результат, не замеченный самим Эйлером и переоткрытый им затем заново значительно позже. Не останавливаясь на важных работах Эйлера (и Даниила Бернулли) о поперечных колебаниях стержней, перейдем к знаменитым исследованиям Эйлера о равновесных формах упругих стержней и их продольном изгибе. Эти исследования были инициированы открытием свойства экстремальности упругой энергии изогнутых стержней, обнаруженного Даниилом Бернулли (1742.). Относящиеся сюда классические результаты Эйлера были опубликованы им в 1744 г. в виде специального приложения “Об упругих кривых” к его трактату по вариационному исчислению (1744). Здесь были проанализированы 9 возможных типов равновесных форм (первоначально прямолинейного) стержня прямоугольного сечения, изогнутого под действием приложенной к его концам силы и момента. Здесь же содержится, по существу, и общая формула для критической силы при продольном изгибе стержня. Сам Эйлер, впрочем, применил эту формулу только для случая стержня с шарнирно опертыми концами. В последующем Эйлер неоднократно возвращался к вопросу о продольном изгибе колонн, и последние его исследования в этой области, относящиеся к концу 70-х годов, посвящены продольному изгибу колонн под действием их собственного веса. В ряде работ по этой проблеме (1780) Эйлер последовательно преодолевал встречавшиеся трудности, получив, в конце концов, правильное решение.

Активное участие принял Эйлер в дискуссии о колебаниях струны. По существу, задача о малых поперечных колебаниях струны (и о распространении звука) была первой задачей динамики систем с бесконечным числом степеней свободы. Примечательно, что эта задача начала изучаться задолго до того, как была разработана динамика систем с конечным числом степеней свободы. Классическое волновое уравнение колебаний струны получил в 1746 г. Даламбер (опубликовано в 1749 г.). Тогда же он нашел и его решение, содержащее две произвольные функции от аргументов $(ct+x)$ и $(ct-x)$. Однако Даламбер произвольно ограничил класс функций, входящих в решение волнового уравнения, некоторыми условиями “непрерывности” и “гладкости”. Эйлер занялся исследованием волнового уравнения сразу же вслед за Даламбером и подчеркнул, что общее решение задачи о струне должно включать функции значительно более широкого класса – произвольные кусочно-гладкие функции. Третий активный участник дискуссии о колебаниях

струны – Даниил Бернулли включился в нее также почти с самого ее начала. Бернулли возражал против абстрактных рассуждений Даламбера и Эйлера о произвольных функциях и считал, что колебания струны проще и естественнее представлять как суперпозицию простых гармонических колебаний. Дискуссия о характере решений волнового уравнения продолжалась много лет (позже в нее включился и Лагранж) и оказала большое влияние на последующее развитие методов математической физики и, в известной мере, теории функций действительного переменного.

Укажем еще на относящиеся к 70-м годам обобщающие исследования Эйлера по механике гибких и упругих (одномерных) тел. Здесь им были получены общие уравнения равновесия и движения деформируемой линии (и плоскости) без специальных предположений о природе ее материала и о малости деформаций. При этом Эйлер рассматривал действующие в сечениях поперечные силы, предвосхитив представление о касательных напряжениях. Наконец, к этим же годам относится введение Эйлером физической характеристики материала, вполне эквивалентной модулю Юнга, и тем самым отделение в задачах теории упругости упругих свойств материала от формы рассматриваемого тела.

14. В приведенном очерке практически вовсе не затронуты сочинения Эйлера по прикладной механике. В историческом аспекте они, конечно, уступают его исследованиям в области математики и рациональной механики, но и в развитии прикладной механики Эйлер оставил глубокий след. Эйлер занимался вопросами сухого трения (в частности, его имя носит формула для расчета трения каната, обернутого вокруг круглого вала). Ему принадлежат интересные работы по общей теории машин, а также по расчету различных конкретных машин, механизмов и приборов (например, весов). Заслуживает специального упоминания исследование Эйлером формы зубчатых колес. Цикл работ посвящен Эйлером гидравлическим двигателям и, в частности, теории колеса Сегнера – прообраза реактивной гидравлической турбины

Глубокие исследования были проведены Эйлером по теории корабля. После выпуска упомянутой выше двухтомной “Корабельной науки” (1749) он изучал различные системы движителей, в том числе гидрореактивные движители, выведя для последних некоторые сохраняющие значение и до наших дней расчетные формулы. Эйлеру принадлежат также некоторые результаты по строительной механике корабля. Наконец, Эйлер выпустил написанное по-французски практическое руководство по кораблестроению и вождению кораблей (1773). Замечательно, что это руководство было переиздано затем в Париже, использовалось там в качестве учебного пособия, а также было переведено на английский, итальянский и русский языки.

Возвращаясь к программе построения механики, предложенной Эйлером в молодости, надо отметить, что он построил на протяжении своей жизни три из намеченных им шести общих разделов механики: сюда относятся аналитически изложенная механика точки (n°1), механика твердого тела (n°2) и гидродинамика (n°6). В учение о гибких телах (n°3) и в механику системы (n°5) Эйлер внес фундаментальный вклад, наряду с другими учеными. Что же касается теории упругости (n°4), которой он посвятил ряд важных исследований, то она была создана лишь в XIX веке. Отвечая в целом на поставленный вопрос, можно сказать, что Эйлер блестяще справился с той грандиозной программой, которую он поставил пред собой

в первом томе “Механики” (1736), не сознавая еще ее невероятной трудности. Эйлеру мы в большей степени, чем кому-либо другому, обязаны уяснением основ механики.

Примечания:

1. Здесь и далее все даты приведены по новому, григорианскому стилю.
2. О создании и первом периоде деятельности Петербургской Академии наук см. [4].
3. Постепенно средний возраст членов Академии рос, удвоившись за 250 лет.
4. См. [22, т. 2, с. 86]. Русский перевод цитирован по П.П.Пекарскому [12, с. 255].
5. Источниками для изучения деятельности Эйлера в Петербургской Академии наук служат, помимо новейших исследований, три тома “Протоколов” Академической конференции за 1726–1803 гг. [13] и 10 томов “Материалов” для истории Академии наук в 1716–1760 гг. [8]. См. также описание материалов Эйлера в Архиве Академии наук [15, т. 1].
6. См. [22, т. 2, с. 182]. Русский перевод цитирован по П.П.Пекарскому [12, с. 265].
7. Приведены слова Эйлера из его автобиографии [11]. Русский перевод автобиографии Эйлера и некоторых других его биографических материалов XVIII в. см. в [3].
8. Сохранились и опубликованы краткие извлечения из протоколов Берлинской Академии наук за 1746–1766 гг. [23]. Опубликовано также описание хранящихся в Берлинской академии документов Эйлера [32].
9. См. [22, т. 1, с. 162]. Русский перевод цитирован по П.П.Пекарскому [12, с. 279].
10. Среди помощников Эйлера тех лет отметим его старшего сына Иоганна-Альбрехта и особенно уроженца Базеля Николая Фуса, специально приехавшего для этой цели по рекомендации Д.Бернулли в Петербург и вошедшего впоследствии в семью Эйлера.
11. Особое место в наследии Эйлера представляют три тома его “Писем к немецкой принцессе о разных физических и философских материях”, написанных в 1760–1762 гг. для наставления одной из дальних кузин Фридриха II и первоначально не предназначенных для печати. Выпущенные в трех томах (1768–1772) “Письма” эти выдержали в конце XVIII и начале XIX вв. около 40 изданий на 9 европейских языках, а недавно были переизданы в новом русском переводе в академической серии “Классики науки” (2002). Эти “Письма” представляют собой энциклопедию естествознания середины XVIII века, но собственно философская часть их подверглась сразу же после их публикации жесткой критике в прогрессивных ученых кругах. Так, Даламбер писал Лагранжу по поводу “Писем” Эйлера: “Вы были правы, говоря, что он не должен был печатать это сочинение ради своей же чести. Невероятно, чтобы такой великий гений в геометрии и анализе, как он, был в метафизике настолько ниже самого младшего школьника (*le plus petit écolier*), – чтобы не сказать – таким плоским и нелепым. Это дает право повторить: *Non omnia eidem Dii dedere* [Не всё Боги дают одному и тому же]” [33]. Одновременно, впрочем, надо помнить, что, некоторые аспекты философско-физических представлений Эйлера безусловно оказали влияние на формирование последующей немецкой философии и, в частности, философии Канта.
12. За первые 50 лет издательской деятельности Петербургской Академии наук Эйлеру принадлежит 60% всех ее публикаций по чистой и прикладной математике, а за 100 лет – 40%. Любопытно, что статьи Эйлера печатались непрерывно в каждом

томе основного академического журнала, неоднократно менявшего свое название, на протяжении ста лет (с 1729 до 1830 г.).

13. Большинство петербургских статей Эйлера написаны по-латыни, а берлинских – по-французски. Наиболее полная для своего времени библиография трудов Л.Эйлера была составлена Г.Энестрёмом [24]. Его указатель воспроизведен, с сокращенными описаниями, в посвященном материалам Эйлера сборнике [15, т. 1, с. 352–387].

14. Родословная роспись потомков Леонарда Эйлера была опубликована в юбилейном сборнике [14], а позже также в дополненном виде [20].

15. Много для понимания величия вклада Эйлера в становление рациональной механики сделал в середине XX века выдающийся американский историк механики Клиффорд Трусделл. Ему принадлежит ряд фундаментальных исследований, частично отраженных в его монографии [42], и обширнейшие (по несколько сотен страниц) предисловия к томам “Полного собрания трудов” (Opera omnia) Эйлера, посвященным гидродинамике и механике гибких и деформируемых тел (тт. 11/2, 12 и 13 второй серии).

16. Характерной для Эйлера была острота ума, которая позволяла ему на основании малейшего намека возводить стройную и совершенную теорию. Это позволяло ему достигать блестящих успехов, в том числе и используя нечетко сформулированные мысли современников. С другой стороны, в молодости Эйлера отличала безграничная вера в бесспорность аналитических выкладок, приводившая его изредка к неверным, парадоксальным заключениям. Об этих ошибках молодости он сам предпочитал позже не вспоминать. Бесспорно, Эйлер всегда оставался глубоким аналитиком, не склонным к эксперименту. В физической интуиции он уступал некоторым своим современникам и, прежде всего, Даниилу Бернулли.

17. М.Ф.Субботину [16] принадлежит, пожалуй, наиболее полный разбор исследований Эйлера по небесной механике. Подробный их анализ был проведен недавно А.Верденом для подготовленных им к печати небесномеханических томов “Полного собрания трудов” Л.Эйлера (II-26 и 27).

18. Недавно опубликован русский перевод этой классической работы Эйлера [17].

19. В 2007 году во Франции была проведена большая международная конференция, посвященная 250-летию уравнений гидродинамики. Труды ее опубликованы в специальном выпуске журнала “Physica D” (август 2008). Они содержат как обстоятельный анализ становления гидродинамики идеальной жидкости, так и разбор современных ее проблем.

20. Любопытно, что ни здесь, ни в мемуарах Эйлера 50-х годов нет анализа так называемого парадокса Даламбера, заключающегося в отсутствии гидродинамического сопротивления тел в потенциальном потоке. По существу же этот парадокс был впервые обнаружен Эйлером еще при комментировании подготовленного им немецкого перевода “Новых основ артиллерии” Бенджамина Робинса (1745), на что неоднократно обращали внимание позднейшие исследователи.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Вавилов, С. В. Очерк развития физики в Академии наук СССР за 220 лет / С. В. Вавилов // Собр. соч. Т. 3. – М. : АН СССР, 1956. – С. 533.
- [2] Голицын, Г. С. Портрет “неизвестного” : к 300-летию Леонарда Эйлера / Г. С. Голицын // Природа. – 2007. – № 6. – С. 61-64.
- [3] Копелевич, Ю. Х. Материалы для биографии Л. Эйлера / Ю. Х. Копелевич // Историко-математические исследования. Вып. 10. – 1957. – С. 9-65.
- [4] Копелевич, Ю. Х. Основание Петербургской Академии наук / Ю. Х. Копелевич. – Ленинград [СПб.] : Наука, 1977.
- [5] Леонард Эйлер и современная наука : материалы Международной научной конференции. – СПб., 2007.
- [6] Леонард Эйлер : сборник статей в честь 250-летия со дня рождения, представленных Академии наук СССР. – М. : АН СССР, 1958.
- [7] Леонард Эйлер : сборник статей и материалов к 150-летию со дня смерти. – М. ; Ленинград [СПб.] : АН СССР, 1935.
- [8] Материалы для истории Императорской Академии наук : в 10 т. – СПб. : Имп. Академия наук, 1885-1900.
- [9] Михайлов, Г. К. Становление гидравлики и гидродинамики в трудах петербургских академиков (XVIII век) / Г. К. Михайлов // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 1999. – № 6. – С. 7-26.
- [10] Остроградский, М. В. Педагогическое наследие, документы о жизни и деятельности / М. В. Остроградский. – М. : Физматгиз, 1961. – С. 307-308.
- [11] Пекарский, П. П. Екатерина II и Эйлер / П. П. Пекарский // Записки Академии наук. – 1864. – Т. 6, ч. 1. – С. 59-92.
- [12] Пекарский, П. П. История Императорской Академии наук в Петербурге. Т. 1 / П. П. Пекарский. – СПб. : Имп. Академия наук, 1870.
- [13] Протоколы заседаний Конференции Императорской Академии наук : в 4 т. – СПб. : Имп. Академия наук, 1897-1911.
- [14] Развитие идей Л. Эйлера и современная наука : сборник статей. – М. : Наука, 1988.
- [15] Рукописные материалы Л. Эйлера в Архиве Академии наук СССР : в 2 т. – М. ; Ленинград [СПб.] : АН СССР, 1962-1965. – (Труды Архива АН СССР). – Вып. 17 ; Вып. 20.
- [16] Субботин, М. Ф. Астрономические работы Л. Эйлера / М. Ф. Субботин // Леонард Эйлер. – М. : АН СССР, 1958. – С. 268-376.
- [17] Эйлер, Л. Общие законы движения жидкостей / Л. Эйлер // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 1999. – № 6. – С. 26-54.
- [18] Эйлер, Л. Основы динамики точки. Первые главы из “Механики” и из “Теории движения твердых тел” / Л. Эйлер. – М. ; Ленинград [СПб.] : Гостехиздат, 1938.
- [19] Юшкевич, А. П. Леонард Эйлер / А. П. Юшкевич. – М. : Знание, 1982.
- [20] Amburger E. Die Nachkommen Leonhard Eulers in den ersten sechs Generationen / Amburger E., Hecker I., Michajlow G. // Basler Zeitschrift für Geschichte und Altertumskunde. 1994. – Bd. 94. – С. 163-238.
- [21] Bernoulli, J. Continuatio materiae de trajectoriis reciprocis / J. Bernoulli // Acta eruditorum. – 1727. – Suppl. 9, sect. 6 = Opera omnia. – 1742. – P. 600-616.
- [22] Die Berliner und die Petersburger Akademie der Wissenschaften im Briefwechsel L. Eulers. 3 Т. – Berlin : Akademie-Verl., 1959-1976.

- [23] Die Registres der Berliner Akademie der Wissenschaften 1746-1766. – Berlin : Akademie-Verl ., 1957.
- [24] Eneström, G. Verzeichnis der Schriften L. Eulers / G. Eneström // Jahresber.–Deutsch. Math. -Verein. Ergänzungsb. 4. –Lief. 1-2. – S. 1910-1913.
- [25] Euler and Modern Science. Transl. from Russian. – Washington (D. C.) : Math. Assoc. Amer., 2007.
- [26] Euler at 300 : An Appreciation. – Washington (D. C.) : Math. Assoc. Amer ., 2007.
- [27] Euler, K. Das Geschlecht Euler-Schölpi / K. Euler. Giessen : Schmitz, 1955.
- [28] Fellmann, E. Leonhard Euler | E. Fellmann. – Basel e. a. : Birkhäuser, 2007.
- [29] Festakt und wissenschaftliche Konferenz aus Anlass des 200. Todestages von L. Euler. – Berlin : Akademie-Verlag, 1985.
- [30] Festschrift zur Feier des 200. Geburtstages L. Eulers. – Leipzig ; Berlin : Teubner, 1907.
- [31] Heyne, A. K. Leonhard Euler : Ein Mann, mit dem man rechnen kann / Heyne A. K ., Pini E. S. – Basel e. a. : Birkhäuser, 2007.
- [32] L. Eulers Wirken an der Berliner Akademie der Wissenschaften 1741-1766. – Berlin: Akademie-Verlag, 1984.
- [33] Lagrange, J. L. Œuvres. T. 13 / J. L. Lagrange. – Paris: Gauthier-Villars, 1882. – C. 147-148.
- [34] Laplace, P. S. Traité de mécanique céleste | P. S. Laplace. – Paris : Huzard-Courcier, 1825.
- [35] Leonhard Euler, 1707-1783 : Beiträge zu Leben und Werk. – Basel : Birkhäuser, 1983.
- [36] Leonhard Euler : Life, Work and Legacy. – Amsterdam e. a. : Elsevier, 2007.
- [37] Mikhailov, G. K. Colin Maclaurin und Newtons Bewegungsgesetz in der modernen Cartesischen Koordinatenform / G. K. Mikhailov // Mathematics Celestial and Terrestrial (Acta historica Leopoldina. – 2008. – № . 54. – P. 523-532.
- [38] Sammelband der zu Ehren des 250. Geburtstages L. Eulers der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vorgelegten Abhandlungen. – Berlin : Akademie-Verlag, 1959.
- [39] Sandifer, C. E. The Eearly Mathematics of L. Euler / C. E. Sandifer. – Washington (D. C.) : Math. Assoc. Amer ., 2007.
- [40] Sandifer, C. E. How Euler Did It / C. E. Sandifer. – Washington (D. C.) : Math. Assoc. Amer ., 2007.
- [41] The Genius of Euler : Reflections on His Life and Work. – Washington (D. C.) : Math. Assoc. Amer. 2007.
- [42] Truesdell, C. Essays in the History of Mechanics / C. Truesdell. – Berlin e. a. : Springer-Verlag, 1968.
- [43] Truesdell, C. Rational Fluid Mechanics, 1687-1765 / C. Truesdell // L. Euler, Opera omnia. Vol. 11-12. – Zurich: Füssli, 1954. – P. VII-CXXXV.
- [44] Zum Werk Leonhard Eulers : Vorträge des Euler-Kolloquiums. – Birkhäuser, 1984.

G. K. Mikhailov

**HIS LIFE, WORK, AND CONTRIBUTION TO THE FORMATION OF
RATIONAL MECHANICS**

All-Russian Institute for Scientific and Technical Information, RAS

Abstract. Leonhard Euler (1707-1783) is one of the greatest scientists of all times in the field of mathematics and mechanics. It is largely through his work mathematical analysis (including the theory of differential equations and the calculus of variations) came into being during the 18th century, the whole rational mechanics and, particularly, rigid body mechanics and the hydrodynamics of an ideal fluid became established and the language and style of modern scientific literature was created. The following essay gives a Leonhard Euler's biographical sketch, a short general review of his work and a more detailed analysis of his contribution to the formation of rational mechanics.

Keywords: Material, mechanics, the differential equations, hydrodynamics, elasticity, flexible bodies

Глеб Константинович Михайлов

доктор физико-математических наук, профессор Института научно-технической информации РАН, г. Москва

e-mail: gkmikh@mail.ru

Gleb Konstantinovich Mikhailov

doctor of sciences, professor of All-Russian Institute for Scientific and Technical Information, RAS, Moscow