

Д. Д. Ивлев

КОЭФФИЦИЕНТ ИНТЕНСИВНОСТИ СТАТИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛИМОСТИ И ДОСТИЖЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ПОЛНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. В работе водится определение коэффициента интенсивности статической неопределимости, характеризующего “уровень” статической неопределимости напряженного состояния. Рассмотрено изменение коэффициента статической неопределимости при выполнении в теле условия пластичности Треска и условия пластичности Мизеса. Отметим, что изменение напряженного состояния при выполнении условия пластичности Треска рассматривалось в работах [2, 3].

Ключевые слова: пластичность, идеальная, полная, упругость, напряжения, предел текучести, коэффициент, интенсивность, статическая определимость

УДК: 539.374

1. Напряженное состояние характеризуется тензором напряжений σ_{ij} , обозначим главные напряжения

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3. \quad (1)$$

Главные касательные напряжения, согласно (1), имеют вид

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \geq 0, \quad \tau_2 = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \leq 0, \quad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \geq 0. \quad (2)$$

Имеет место

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0. \quad (3)$$

Напряженное состояние может быть охарактеризовано при помощи кругов Мора (рис. 1). Параметр Лоде характеризует взаимное положение кругов Мора (рис.1)

$$\lambda = \frac{AB}{AC} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)}{\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)} = \frac{\tau_1 - \tau_3}{\tau_2}. \quad (4)$$

Состояние полной пластичности, статической определимости достигается при выполнении двух условий:

$$|\lambda| = \pm 1, \quad \alpha = \pm \frac{\pi}{4}, \quad \sigma_1 = \sigma_2, \quad \sigma_2 = \sigma_3, \quad (5)$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2k, \tag{6}$$

где k – предел текучести при сдвиге.

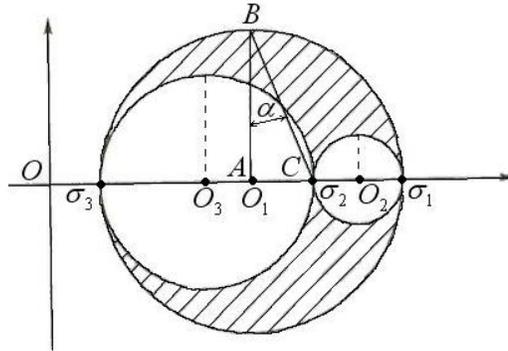


Рис. 1.

Условия (5), (6) по отдельности являются необходимыми, в совокупности условия (5), (6) определяют предельное, статически определимое соотношение полной пластичности. Отметим, что при условиях (5) любое предельное условие $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$ приводит к полному предельному состоянию [4].

Отметим также, что при условии (5) могут быть развиты статически неопределимые соотношения теории упругости [1].

При $|\lambda| < 1$ имеет место статическая неопределимость, в этом случае заштрихованная площадь на рис. 1 отлична от нуля. Это обстоятельство может быть положено в основу определения коэффициента интенсивности статической неопределимости Δ , характеризующего относительную величину “уровня” статической неопределимости

$$\Delta = \frac{S_{13} - S_{12} - S_{23}}{S_{13}}, \tag{7}$$

где S_{ij} – площадь круга с диаметром $\sigma_i - \sigma_j$ (рис. 1).

Из (2), (7) следует

$$\Delta = \frac{\tau_2^2 - \tau_1^2 - \tau_3^2}{\tau_2^2}. \tag{8}$$

Из (3), (8) получим

$$\Delta = \frac{2\tau_1\tau_3}{\tau_2^2}. \tag{9}$$

Согласно (2), при $\Delta = 0$ имеет место (5).

Максимальное значение

$$\Delta_{\max} = 1/2, \quad 0 \leq \Delta \leq 1/2, \tag{10}$$

имеет место при $\tau_1 = \tau_3 = \frac{1}{2}|\tau_2|$.

Согласно (4), (9) получим

$$\lambda^2 = 1 - 2\Delta, \quad \Delta = \frac{1}{2}(1 - \lambda^2). \quad (11)$$

На рис. 2 показана зависимость $\Delta - \lambda$

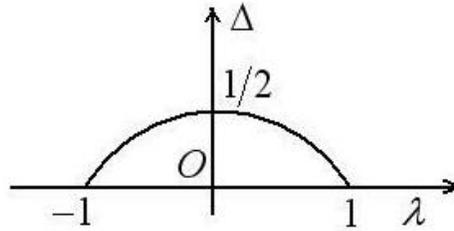


Рис. 2.

2. Предположим, что имеет место условие максимального касательного напряжения Треска (6)

$$\tau_{\max} = -\tau_2 = k, \quad k - \text{const.} \quad (12)$$

На рис. 3 показан элемент тела, находящийся под действием напряжений

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = -k, \quad -k \leq \sigma_2 \leq k.$$

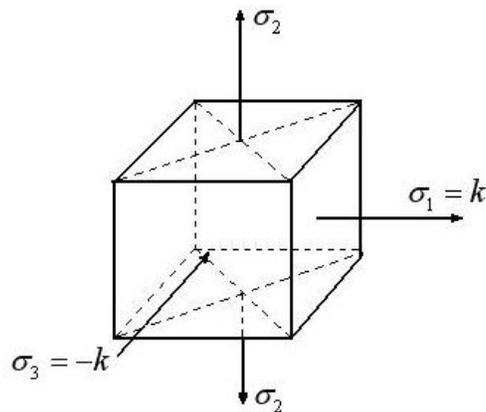


Рис. 3.

В дальнейшем, все величины, имеющие размерность напряжений, отнесем к пределу текучести на сдвиг k (12)

Второй инвариант девиатора напряжений

$$\Sigma'_2 = \tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2, \quad (13)$$

согласно (3), (8) примет вид

$$\Sigma'_2 = 2 - \Delta. \quad (14)$$

Изменение напряжения σ_2 (рис. 3) не влияет на условие пластичности (12), с изменением напряжения σ_2 согласно (2), (8), (12), (14) изменяются коэффициент интенсивности статической неопределимости Δ , величина Σ'_2 , согласно (10), (14) имеет место

$$\frac{3}{2} \leq \Sigma'_2 \leq 2. \quad (15)$$

Таким образом, при выполнении условия пластичности максимального касательного напряжения Треска (12) в процессе продолжающегося нагружения при $\Delta \rightarrow 0$, согласно (14) происходит *возрастание* величины Σ'_2 , при достижении которой предельного значения $\Sigma'_2 \max = 2$ ($\Delta = 0$) в теле наступает состояние полной пластичности.

3. Предположим, что имеет место условие пластичности Мизеса

$$\Sigma'_2 = \tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2 = 1. \quad (16)$$

Рассмотрим изменение касательного напряжения

$$-\tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \geq 0 \quad (17)$$

в процессе нагружения.

Из (3), (9), (16) следует

$$\tau_2^2 = \frac{1}{2 - \Delta}. \quad (18)$$

Согласно (10), (18) имеет место

$$\frac{1}{2} \leq \tau_2^2 \leq \frac{2}{3}, \quad 0 \leq \Delta \leq \frac{1}{2}. \quad (19)$$

Таким образом, при выполнении условия пластичности Мизеса (16) в процессе продолжающегося нагружения при $\Delta \rightarrow 0$, согласно (18), происходит *уменьшение* величины $|\tau_2|$, при достижении которой предельного значения $|\tau_2| = 1/2$ в теле наступает состояние полной пластичности.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ивлев, Д. Д.* Механика пластических сред / Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2002. – Т. 2. – 446 с.
- [2] *Ивлев, Д. Д.* О переходе статически неопределимого состояния в статически определенное / Д. Д. Ивлев // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия Механика предельного состояния. 2007. – № 1. – С. 5-9.
- [3] *Ивлев, Д. Д.* О развитии идеально пластического состояния / Д. Д. Ивлев // Известия РАН. МТТ. – 2006. – № 6. – С. 99-102.
- [4] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966.

D. D. Ivlev

**COEFFICIENT OF THE INTENSITY OF STATIC INDEFINABILITY AND
ACHIEVEMENT OF ABSOLUTE PLASTICITY'S CONDITION**

The Chuvash State Pedagogic University named after I.Y. Yakovlev

Abstract. In the paper the definition of coefficient of the intensity of static indefinability is introduced, it characterizes the “level” of static indefinability of strain condition. The change of coefficient of the intensity of static indefinability with Treska’s condition of plasticity and Mizes’s condition of plasticity is investigated. The change of strain condition with Treska’s condition of plasticity was investigated in works [2, 3].

Keywords: plasticity, ideal, absolute, elasticity, stress, fluidity limit, coefficient, intensity, static definability.

Ивлев Дюис Данилович

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева, 428000, г. Чебоксары, ул. Карла Маркса, 38

Ivlev Dyuis Danilovich

doctor of sciences, professor, managing chair of the mathematical analysis of Chuvash state pedagogical university of I. J. Jakovleva, Cheboxary, 428000, st. Karla Marksa, 38.