Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2009. №1. С. 81–97

В. Г. Зубчанинов

МОДИФИЦИРОВАННАЯ ТЕОРИЯ ТЕЧЕНИЯ

Тверской государственный технический университет

Аннотация. Предложена модифицированная теория течения, в основе которой лежат соотношения теории процессов пластического деформирования сплошных сред и материалов и основная гипотеза теории течения о разложении полных деформаций на упругие и пластические части

Ключевые слова: пластичность, упругость, процессы, течение, сплошная среда, сложное нагружение, деформация, предельная поверхность, градиентальность

УДК: 539.3, 539.374

1. Процессы нагружения и деформирования в линейном координатном многомерном евклидовом пространстве

Симметричные тензоры напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} могут быть представлены в линейных координатных евклидовых пространствах напряжений Σ_6 и деформаций E_6с общим ортонормированным базисом $\{\hat{\varepsilon}_n\}$ в виде [3,4]

$$\bar{S} = X_n\hat{\varepsilon}_n; \quad \bar{\varepsilon} = Y_n\hat{\varepsilon}_n \quad (n = 1, 2, ...6). \tag{1}$$

$$X_1 = \sigma_{11},\, X_2 = \sigma_{22},\, X_3 = \sigma_{33},\, X_4 = \sqrt{2}\sigma_{12},\, X_5 = \sqrt{2}\sigma_{23},\, X_6 = \sqrt{2}\sigma_{13}, \tag{2}$$

$$Y_1 = \varepsilon_{11},\, Y_2 = \varepsilon_{22},\, Y_3 = \varepsilon_{33},\, Y_4 = \sqrt{2}\varepsilon_{12},\, Y_5 = \sqrt{2}\varepsilon_{23},\, Y_6 = \sqrt{2}\varepsilon_{13}, \tag{3}$$

– компоненты векторов и тензоров напряжений и деформаций соответственно,

$$\begin{array}{l} S = \left|\bar{S}\right| = \sqrt{X_nX_n} = \sqrt{\sigma_{ij}\sigma_{ij}}, \\ \varepsilon = \left|\bar{\varepsilon}\right| = \sqrt{Y_nY_n} = \sqrt{\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}}, \end{array} \ (i, j = 1, 2, 3) \tag{4}$$

– их модули.

$$\hat{\varepsilon}_1 = (1, 0, 0, ...0),\ \ \hat{\varepsilon}_2 = (0, 1, 0, ...0),\, ...\, \hat{\varepsilon}_n = (0, 0, 0, ...1)\ \ (n = 6) \tag{5}$$

– ортонормированный координатный базис В.Прагера.

Базис (2) был введен первоначально в теорию пластичности В.Прагером для несимметричных тензоров σ_{ij} и ε_{ij} для девятимерного линейного координатного пространства, которое не было евклидовом [3,4].

Процессы нагружения в точке (частице) тела $x_k (k = 1, 2, 3)$ определяются заданием в ней шести компонент тензора напряжений [3,4,6,7]

Поступила 10.03.2009

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x_k, t), \quad i, j, k = 1, 2, 3,$$

а процесс деформирования – заданием шести компонент тензора деформаций.

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(x_k, t), \quad i, j, k = 1, 2, 3,$$

как непрерывных функций координат точки x_k и времени t как параметра прослеживания процессов. В линейных векторных координатных пространствах Σ_6, E_6 эти процессы задаются криволинейными и прямолинейными траекториями.

$$\bar{S} = \bar{S}(t), \quad \bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(t), \tag{6}$$

которые описывают концы векторов с длинами дуг Σ и ε соответственно.

Траектория деформирования в E_6 при базисе $\{\hat{\varepsilon}_n\}$ с построенным в каждой точке s вектором напряжений $\bar{S}$ и приписанными к этой точке температурой Ти другими нетермофизическими параметрами β создают *образ процесса*. Аналогично вводится понятие образа процесса в пространстве Σ_6 при базисе $\{\hat{\varepsilon}_n\}$. Отметим, что при преобразованиях вращения и отображения в Σ_6 и E_6 векторов и траекторий остаются неизменными только модули векторов и тензоров.

Линейное евклидово координатное пространство может иметь несколько ортонормированных базисов. А.А.Ильюшин ввел общий шестимерный базис $\left\{\hat{i}_k\right\}$, в Σ_6 и E_6 [4]

$$\begin{cases} \hat{i}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\hat{\varepsilon}_1 + \hat{\varepsilon}_2 + \hat{\varepsilon}_3\right), \\ \hat{i}_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}\left[\cos\beta_0\hat{\varepsilon}_1 - \sin(\beta_0 + \pi/6)\hat{\varepsilon}_2 + \sin(\beta_0 - \pi/6)\hat{\varepsilon}_3\right] \\ \hat{i}_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}\left[\sin\beta_0\hat{\varepsilon}_1 + \cos(\beta_0 + \pi/6)\hat{\varepsilon}_3 - \cos(\beta_0 - \pi/6)\hat{\varepsilon}_3\right] \\ \hat{i}_3 = \sqrt{2}\hat{\varepsilon}_4, \ \ \hat{i}_4 = \sqrt{2}\hat{\varepsilon}_5, \ \ \hat{i}_5 = \sqrt{2}\hat{\varepsilon}_6, \end{cases} \tag{7}$$

где β_0 - произвольный угол, определяющий множество базисов на девиаторной плоскости. На практике наиболее удобным оказалось значение $\beta_0 = 0$, при котором из (7) следует

$$\begin{cases} \hat{i}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\hat{\varepsilon}_1 + \hat{\varepsilon}_2 + \hat{\varepsilon}_3\right), \\ \hat{i}_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}\left[\hat{\varepsilon}_1 - \frac{1}{2}\left(\hat{\varepsilon}_2 + \hat{\varepsilon}_3\right)\right], \\ \hat{i}_2 = \frac{\hat{\varepsilon}_2 - \hat{\varepsilon}_3}{\sqrt{2}}, \hat{i}_3 = \hat{\varepsilon}_4, \hat{i}_4 = \hat{\varepsilon}_5, \hat{i}_5 = \hat{\varepsilon}_6. \end{cases} \tag{8}$$

Он представил в тех же пространствах векторы напряжений и деформаций при базисе $\left\{\hat{i}_k\right\}$ в виде [7]

$$\overline{S} = S_k\hat{i}_k; \bar{\varepsilon} = Э_k\hat{i}_k \quad (k = 0, 1, 2...6) \tag{9}$$

где

$$\begin{cases} S_0 = \sqrt{3}\sigma_0, \ S_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}S_{11}, \ S_2 = \sqrt{2}(S_{22} + \frac{1}{2}S_{11}), \\ S_3 = \sqrt{2}S_{12}, \ S_4 = \sqrt{2}S_{23}, \ S_5 = \sqrt{2}S_{13}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} Э_0 = \sqrt{3}\varepsilon_0, \ Э_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}Э_{11}, \ Э_2 = \sqrt{2}(Э_{22} + \frac{1}{2}Э_{11}), \\ Э_3 = \sqrt{2}Э_{12}, \ Э_4 = \sqrt{2}Э_{23}, \ Э_5 = \sqrt{2}Э_{13}, \end{cases} \tag{10}$$

– компоненты векторов, напряжений и деформаций,

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}\sigma_{ij}\delta_{ij},\ \ \varepsilon_0 = \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_{ij} \tag{11}$$

– средние напряжения и деформации, δ_{ij} - символ Кронеккера,

$$Э_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0,\ \ S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0, \tag{12}$$

– компоненты девиаторов напряжений и деформаций соответственно.

Такое представление векторов (8) – (11) в Σ_6 и E_6-пространствах позволило разложить их в прямую сумму одномерных подпространств Σ_0 и E_0 всестороннего растяжения – сжатия и пятимерные подпространства Σ_5 и E_5 формоизменения. Учитывая сдвиговый характер пластического формоизменения и упругий характер объемного расширения-сжатия частиц тела, мы можем считать что для начально изотропных сред σ_0 и ε_0 связаны в E_0 законом Бриджмена

$$\sigma_0 = 3K\varepsilon_0, \tag{13}$$

где

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)} \tag{14}$$

– модуль упругой объемной деформации, E – продольный модуль упругости Эйлера-Юнга, μ- коэффициент Пуассона.

В пятимерных подпространствах Σ_5, E_5 девиаторам напряжений и деформаций ставятся соответственно пятимерные векторы

$$\overline{\sigma} = S_k\hat{i}_k; \bar{Э} = Э_k\hat{i}_k \quad (k = 0, 1, 2...5) \tag{15}$$

и инварианты σ_0 и ε_0 в каждой точке s траектории деформирования соответственно. Траектория деформирования $\bar{Э}(s)$ в E_6 при базисе $\left\{\hat{i}_k\right\}$ с построенными в каждой точке векторами напряжений $\bar{S}, d\bar{S}$ и приписанными ним температурой T, параметрами β создают *образ процесса деформирования.* Аналогично вводится понятие образа процесса нагружения в Σ_6. Ортогональные преобразования вращения и отражения траектории в Σ_6 и E_6 сохраняют инварианты Э и S, но не сохраняют σ_0 и ε_0 и углы вида деформированного и напряженного состояний φ и ψ либо

$$\cos 3\varphi = 3\sqrt{6}\left|Э^*_{ij}\right|, \quad \cos 3\psi = 3\sqrt{6}\left|S^*_{ij}\right|, \tag{16}$$

где $Э^*_{ij} = Э_{ij}/Э$, $S^*_{ij} = S_{ij}/\sigma$, – компоненты направляющих тензоров формоизменения.

Траектория деформирования $\bar{Э}(s)$ в E_5 при базисе $\left\{\hat{i}_k\right\}$ с построенными в каждой точке S векторами $\bar{\sigma}, d\bar{\sigma}$ и приписанными к ним температурой T, средней деформацией ε_0 и параметрами β создают образ процесса деформирования в E_5. Аналогично вводится образ процесса нагружения в Σ_5.

Образы процессов дополняются также предельными поверхностями деформирования $F\left(\bar{Э}\right)$ и нагружения $f(\bar{\sigma})$ соответственно [3,4], что необходимо для сближения теории течения с теорией процессов.

Постулат макроскопической определенности утверждает, что термомеханическое состояние среды в момент времени t определяется процессом в каждой ее точке

$x_k(k=1,2,3)$ физического пространства. Возникающий в процессе деформирования среды в каждой ее частице тензор напряжений $\sigma_{ij}(t)$ или шаровой тензор $\delta_{ij}\sigma_0$ и девиатор $S_{ij}(t)$ являются вполне определенными однозначными функциями процесса, то есть функционалами, зависящими от функций $\varepsilon_{ij}(t), T(t), \beta(t)$ либо, что все равно, от $\varepsilon_0(t), Э_{ij}(t), T(t), \beta(t)$.

Следовательно, имеют место функциональные соотношения [7]

$$\sigma_{ij} = F\left\{\varepsilon_{ij}, T, \beta\right\}_t \quad (i,j=1,2,3) \tag{17}$$

либо

$$\sigma_0 = F_0\left\{\varepsilon_0, Э_{ij}, T, \beta\right\}_t, \quad S_{ij} = \Phi_{ij}\left\{\ \varepsilon_0, Э_{ij}, T, \beta\ \right\}_t, \tag{18}$$

где $S_{ij}, Э_{ij}$ – компоненты девиаторов напряжений и деформаций.

Соотношения (17) и (18) названы в [7] *общим постулатом изотропии* для начально изотропных сред. Эти соотношения остаются инвариантными относительно ортогональных преобразований вращения координатных осей $x_k(k = 1,2,3)$ в физическом пространстве.

А.А.Ильюшин предложил записывать (17), (18) в физическом пространстве в тензорном базисе $\left\{dЭ^n_{ij}/ds^n\right\}$, где $n=0,1,...5$. Тогда, согласно (10) соотношения (18) можно записать в E_5 в виде

$$S_0 = 3KЭ_0,\ \ S_{ij} = \sum_{n=0}^{4} A_n \frac{d^n Э_{ij}}{ds^n}(i,j=1,2,3). \tag{19}$$

Учитывая (10), получаем векторную форму записи представления соотношений (19) в E_5

$$\bar{S}_0 = 3K\bar{Э}_0, \quad \bar{\sigma} = \sum_{n=0}^{4} A_n \frac{d^n\bar{Э}}{ds^n}. \tag{20}$$

Используя соотношения Френе для ортонормированного базиса $\{\hat{p}_k\}$ в линейном евклидовом пространстве деформаций E_5

$$\frac{d\hat{p}_k}{ds} = -æ_{k-1}\hat{p}_{k-1} + æ_k\hat{p}_{n+1}, (k=1....5),$$

где $æ_n$ – четыре параметра кривизны и кручения траектории, получаем

$$\bar{S} = S_0\hat{p}_0 + \bar{\sigma},$$

где

$$\bar{\sigma} = P_k\hat{p}_k, \quad (k=1,2,...5) \tag{21}$$

– вектор напряжений в E_5, соответствующий девиатору напряжений,

$$P_k = P_k\left\{\varepsilon_0\ , Э, \varphi, æ_m, T,\ \beta\right\}_{s(t)} \tag{22}$$

– функционалы процесса, зависящие от всех трех инвариантов тензора деформаций в физическом пространстве, параметров кривизны и кручения $æ_m$(m=1,2,3,4) траектории, температуры T, физических параметров β по параметру прослеживания процесса $s(t)$.

Соотношение (21) неинвариантно относительно преобразований вращения и отражения в линейном подпространстве E_5. Образ процесса для каждой траектории деформирования в E_5соответствует различным физическим процессам. Однако, для большинства классов материалов, в условиях нормальной и повышенной температуры при малых деформациях влияние инвариантов ε_0, φ, в E_5 является слабым. К таким материалам относятся практически все металлы и их сплавы [6-8].

В этом случае для начально изотропных сред подпространств E_5,Σ_5 и пространств E_6,Σ_6 можно с достаточной степенью точности считать изотропным относительно ортогональных преобразований вращения и отражения. Это соображение позволило А.А.Ильюшину сформулировать частный постулат изотропии: *образ физического процесса сохраняется при всех преобразованиях вращения и отражения траекторий деформирования в E_5, если в соответствующих точках траектории деформирования* сохраняются значения $\varepsilon_0^{`}T, \beta$ [5-7]. Такое предположение, которые многие недооценили, позволило для большого класса материалов ставить и решать краевые задачи теории пластичности в условиях сложного напряженного состояния и сложного нагружения [6]. Постулат изотропии и сейчас остается наиболее общим в математической теории пластичности.

В [3,4] получена общая локальная форма определяющих соотношений на основе общего постулата изотропии в E_5

$$\frac{d\sigma}{ds} = M_k \hat{p}_k + M\hat{\sigma}, (k = 1, 2, ...5), \tag{23}$$

где

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\sigma}{ds} = -M_k \cos\beta_k, \frac{d\sigma}{ds} = P\cos\beta_1, \\ M_k = M_k \left\{\varepsilon_0, Э, \varphi, æ_m, T, \beta\right\}_{s(t)}, \end{array} \right. \tag{24}$$

$$\hat{\sigma} = \cos\beta_k \hat{p}_k, \hat{Э} = \cos\alpha_k \hat{p}_k \tag{25}$$

$\beta_k, \alpha_k -$ угловыекоординатыединичныхвекторовврепере $\{\hat{p}_k\}$.

Большим удобством при разделении скалярных и векторных свойств материалов явилось введение полярных сферических координат $\vartheta_m (m = 1, 2, 3, 4)$ согласно формулам

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{\sigma} = \cos\vartheta_1 \hat{p}_1 + \sin\vartheta_1 (\cos\vartheta_2 \widehat{p}_2 + \sin\vartheta_2 \widehat{p}_3), \\ \widehat{p} = \cos\vartheta_3 \hat{p}_3 + \sin\vartheta_3 (\cos\vartheta_4 \widehat{p}_4 + \sin\vartheta_5 \widehat{p}_5). \end{array} \right. \tag{26}$$

В соответствии с постулатом физической определенности и принципом ортогональности параметры кривизны и кручения $æ_3$и $æ_4$несущественны, а $\vartheta_3 = 0$. В связи с этим локальная форма (23) принимает вид

$$\frac{d\overline{\sigma}}{ds} = M_1 \widehat{p}_3 + M\hat{\sigma} + M_3 \hat{p}_3, \tag{27}$$

где

$$\left\{ \begin{array}{l} M = \frac{d\sigma}{ds} - M_1 \cos\vartheta_1 - M_3 \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2, \\ M_k = M_k \left\{\varepsilon_0, Э, \varphi, æ_1, æ_2, T, \beta\right\}_{s(t)}. \end{array} \right. \tag{28}$$

Для углов сближения ϑ_1 и депланации ϑ_2 получены дифференциальные уравнения [3,4]

$$\begin{cases} \frac{d\vartheta_1}{ds} + æ_1 \cos\vartheta_2 = \frac{1}{\sigma}(-M_1 \sin\vartheta_1 + M_3 \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2), \\ \sin\vartheta_1 \left(\frac{d\vartheta_2}{ds} + æ_2\right) = æ_1 \cos\vartheta_1 \sin\vartheta_2 + \frac{M_3}{\sigma}\cos\vartheta_2. \end{cases} \quad (29)$$

Из (27) следует нелокальная форма определяющих соотношений [3,4]

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = N_1 \hat{p}_1 + N_\sigma \hat{\sigma}, + N_Э \hat{Э} \quad (30)$$

где

$$N_\sigma = \frac{d\sigma}{ds} - N_1 \cos\vartheta_1 - N_Э \cos\alpha, \quad (31)$$

$N_1, N_Э$ – функционалы процесса деформирования. Обычно соотношения (30) записывают в виде

$$d\overline{\sigma} = N_1 d\overline{Э} + ds\left[N_\sigma^* \bar{\sigma} + N_Э^* \bar{Э}\right] \quad (32)$$

либо, с учетом (31)

$$d\overline{\sigma} = N_1 d\bar{Э} + (P - N_1)\frac{\bar{\sigma} d\bar{Э}}{\sigma^2} + ds N_Э \bar{n}, \quad (33)$$

где вектор

$$\begin{cases} \bar{n} = \hat{n}\sin\alpha = \hat{Э} - \hat{\sigma}\cos\alpha, \\ N_\sigma^* = \frac{N_\sigma}{\sigma}, \quad N_Э^* = \frac{N_Э}{\sigma}. \end{cases} \quad (34)$$

Соотношения (30) – (34) следуют также из гипотезы ортогональности вектора $\bar{\sigma}$ к предельным поверхностям.

Соотношения (32) играют определяющую роль в сближении двух основных направлений в теории пластичности – теории процессов и теории течения.

2. Общая теория пластического течения Мелана – Прагера.

В основе общей теории пластического течения лежит гипотеза о возможности разложения полных деформаций ε_{ij} на упругие ε_{ij}^e и пластические ε_{ij}^p части [3,4]

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p, \quad (i,j = 1,2,3). \quad (35)$$

Упругие части ε_{ij}^e определяются законом Гука

$$\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{E}\left\{(1+\mu)\sigma_{ij} - \mu\sigma_{ij}\delta_{ij}\right\}, \quad (36)$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, E – продольный модуль упругости, μ – коэффициент Пуассона начально изотропной среды.

Тензоры деформаций и напряжений можно разложить на шаровые $\delta_{ij}\varepsilon_0, \delta_{ij}\sigma_0$ и девиаторы $S_{ij}, Э_{ij}$, так, что

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_0 + S_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = \delta_{ij}\sigma_0 + Э_{ij}, \quad (37)$$

где

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{ij}, \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_{ij} \quad (i,j = 1,2,3) \quad (38)$$

– средние значения напряжений и деформаций.

Следствием основной гипотезы теории течения является концепция В.Прагера о существовании предельных поверхностей нагружения и деформирования [3,4]

$$f = f(\bar{s}, \varepsilon^p), \quad F = F(\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}^p), \tag{39}$$

разделяющих области активного и пассивного деформирования. Все продолжения процесса из произвольной точки К траектории нагружения, через которую проходит поверхность, делятся на два множества. Первое множество имеет направление во вне поверхности нагружения и соответствует активному пластическому деформированию, для которого

$$\operatorname{grad} f \cdot d\bar{s} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0.$$

Второе множество имеет направление во внутрь предельной поверхности и отвечает упругой разгрузке, то есть не вызывает пластических деформаций так, что

$$\operatorname{grad} f \cdot d\bar{s} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0 \quad .$$

Таким образом, пластическое состояние материала при упругой разгрузке оказывается как бы “замороженным”. Отметим также, что в связи с разложением полных деформаций на упругие и пластические части вопрос о законе упругой разгрузки в теории течения и не ставится.

Драккером был выдвинут постулат пластичности, согласно которому *на любом замкнутом процессе нагружения в пространстве напряжений Σ_6 работа избыточных напряжений положительна, если происходит изменение пластических деформаций.* Этот постулат позволил сделать вывод, что вектор приращения пластических $d\bar{Э}^p$должен составлять не тупой угол с любым приращением вектора напряжений $\Delta\bar{S}$, т.е. вектор $d\bar{Э}^p$ в регулярной точке поверхности должен быть направлен по ее внешней нормали [3,4]. Следовательно

$$d\bar{\varepsilon}^p = D\operatorname{grad} f(\bar{s}, \bar{\varepsilon}^p) df, df = \operatorname{grad} f \cdot d\bar{s} \tag{40}$$

или в скалярной форме

$$d\varepsilon_{ij}^p = D\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} df, df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} d\sigma_{mn}. \tag{41}$$

Для активного процесса пластического деформирования при $df > 0$ и

$$d\bar{\varepsilon}_{ij}^p = 0, \;\; d\varepsilon_{ij}^p = 0, \;\; df = 0. \tag{42}$$

для пассивного процесса упругой разгрузки. В (40), (41) – D-функционал процесса.

Роль гидростатического и девиаторных компонент тензоров при образовании пластических деформаций принципиально различны, т.к. пластическая деформация имеет ярко выраженный сдвиговый характер. Поэтому функция нагружения должна иметь вид

$$f = f(\sigma_0, S_{ij}, Э_{ij}^p). \tag{43}$$

Отнесем линейные координатные евклидовы шестимерные пространства деформаций E_6 и напряжений Σ_6 к новому ортонормированному базису

А.А.Ильюшина $\left\{\hat{i}_k\right\}$, где $k = 0,1,2,...5$ [3,4]. Как было выше отмечено, сдвиговые процессы формоизменения будут проходить в совмещенных пятимерных подпространствах Σ_5, E_5. Представим соответственно векторы напряжений и деформаций в этих подпространствах в виде

$$\bar{\sigma} = S_k\hat{i}_k, \quad \bar{Э} = Э_k\hat{i}_k, \quad (k = 1,2,...5). \tag{44}$$

Общий вид определяющих соотношений Мелана-Прагера (40), (42) примут в пространстве А.А.Ильюшина E_5 вид [3,4,7]

$$d\bar{Э}^{\mathrm{p}} = D\mathrm{grad}\, f(\bar{\sigma}, \bar{Э}^{\mathrm{p}})df, \quad df = \mathrm{grad}\, f \cdot d\bar{\sigma} > 0 \tag{45}$$

для активных процессов пластического деформирования, и – вид

$$d\bar{Э}^{\mathrm{p}} = 0, d\bar{Э}^{e} = \frac{d\bar{\sigma}}{2G}, \quad df = \mathrm{grad} f \cdot d\bar{\sigma} < 0 \tag{46}$$

для пассивных процессов разгружения.

В скалярной форме вместо (45), (46) получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} dЭ^p_{ij} = D\frac{\partial f}{\partial S_{ij}}df, \quad df = \frac{\partial f}{\partial S_{mn}}dS_{mn} > 0, \quad (i,j,m,n = 1,2,3), \\ dЭ^p_{ij} = 0, \quad dЭ^e_{ij} = \frac{dS_{ij}}{2G}, \quad d\,f < 0. \end{array} \right. \tag{47}$$

Соотношения Мелана-Прагера для полных приращений деформаций принимают вид

$$\left\{ \begin{array}{l} d\bar{Э} = \frac{d\bar{\sigma}}{2G} + D\mathrm{grad}\, f(\bar{\sigma}, \bar{Э}^{\mathrm{p}})df, \\ df = \mathrm{grad}\, f \cdot d\bar{\sigma} > 0 \end{array} \right. \tag{48}$$

для активных процессов, и

$$d\bar{Э} = d\bar{Э}^{e} = \frac{d\bar{\sigma}}{2G}, \quad df < 0 \tag{49}$$

для пассивных процессов упругой разгрузки.

В работах [8] А.А.Ильюшин высказал общее предположение, называемое постулатом пластичности: *работа напряжений во всяком замкнутом изотермическом процессе в пространстве деформаций E_6 неотрицательна*, т.е.

$$\mathrm{A} = \oint \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \geq 0.$$

Он показал, что из этого предположения следует так называемый принцип градиентальности или ассоциированный с предельной поверхностью деформирования $F(\bar{Э})$ закон течения.

$$d\bar{Э}^{\mathrm{p}} = D_1\mathrm{grad} F(\bar{Э})ds. \tag{50}$$

Этот закон содержит два скалярных функционала процесса течения D_1, F.

Применение постулата пластичности к аналогичному замкнутому по деформациям процессу в пространстве напряжений Σ_6 приводит к изоморфизму уже полученного результата

$$d\bar{Э}^{\mathrm{p}} = D_2\mathrm{grad}\, f(\bar{\sigma})d\Sigma, \tag{51}$$

где D_2, f-функционалы процесса.

А.А.Ильюшин обратил внимание на то, что при разгрузке в результате развития деформационной анизотропии на активных участках траектории упругая деформация является однородной линейной функцией напряжений и обратно

$$d\bar{Э}^e = (g_{ij})\,\bar{\sigma},\ \bar{\sigma} = (E_{ij})\,\bar{Э}^e, \tag{52}$$

причем матрицы коэффициентов упругости (g_{ij}) и (E_{ij}) зависят от активных участков предшествующей траектории до начала разгрузки в некоторой точке К. Если не пренебрегать этим и обозначить вектор

$$d\bar{Э}* = d\bar{Э} - (g_{ij})\ \bar{\sigma}, \tag{53}$$

то из (48) следует определяющее соотношение

$$d\bar{Э}* = D_2 \mathrm{grad}\, f(\bar{\sigma},\, \bar{Э}^{\mathrm{p}})d\Sigma, \tag{54}$$

где Σ – длина дуги траектории нагружения и учтено, что

$$df = |\mathrm{grad}\, f|\cos\vartheta d\Sigma, \quad \cos\vartheta = \frac{d\sigma}{d\Sigma}.$$

Соотношение (54) носит название *обобщенного принципа градиентальности* в теории течения: *физический вектор* $d\bar{Э}*$ *нормален в пространстве* Σ_5*к предельной поверхности нагружения* $f(\bar{\sigma}, \{\bar{Э}^{\mathrm{p}})$.

Построение предельной поверхности упрочняющегося материала представляет собой трудную задачу. Упрочнение материала способствует возникновению деформационной анизотропии у первоначально изотропных материалов. Простейшей моделью упрочнения является модель изотропного упрочнения. Согласно этой модели начальная поверхность текучести равномерно расширяется подобно самой себе. Она является прямым обобщением “единой” универсальной диаграммы простого нагружения. Недостатком этой модели является то, что в ней невозможен эффект Баушингера. В. Прагер предложил модель, описывающую поведение упрочняющегося материала с отчетливо выраженным проявлением эффекта Баушингера [2, 10].

По описанию В.Прагера трансляция предельной поверхности в пространстве напряжений происходит следующим образом. Двигаясь по траектории нагружения конец вектора напряжений $\bar{\sigma}$выходит на начальную предельную поверхность в некоторой точке $К_0$. если условно считать эту точку гладким жестким шариком, а предельную поверхность нагружения моделировать жесткой оболочкой, то при дальнейшем сложном нагружении шарик начинает двигать оболочку давлением, ортогональным к предельной поверхности $f(\bar{\sigma})$. Предполагается, что оболочка двигается поступательно в направлении действия этого нормального к поверхности вектора давления $\bar{\sigma}^0$ без поворотов. В текущей точке К пересечение траектории нагружения $\bar{\sigma}\,(\Sigma)$ и предельной поверхности $f(\bar{\sigma})$ активный вектор давления $\bar{\sigma}^0 = \bar{\sigma} -$ ā, где ā – вектор дополнительных напряжений, ортогонален предельной поверхности. Данная кинематическая модель В.Прагера описывает в явном виде анизотропное упрочнение и эффект Баушингера при трансляции предельной поверхности. Недостатком модели В.Прагера является жесткое требование о недопустимости поворота предельной поверхности.

3. Частные теории пластического течения.

Различные теории течения отличаются друг от друга лишь формой задания функции нагружения $f(\bar{\sigma},\, \bar{Э}^{\mathrm{p}})$. Эта функция в общем случае зависит от векторов напряжений $\bar{\sigma}$и пластических деформаций $\bar{Э}^{\mathrm{p}}$ и практически не зависят от первых инвариантов σ_0, ε_0 шаровых тензоров.

При изотропном упрочнении обычно принимают

$$2f = \bar{\sigma}\cdot\bar{\sigma} - C_p^2(s^p) = 0, \quad \sigma = \Phi\,(s)\,, \tag{55}$$

где $\Phi\,(s)$ – закон упрочнения для траектории малой и средней кривизны.

Из (54) с учетом (55) получаем

$$d\bar{Э}^{\mathrm{p}} = ds^p\frac{\bar{\sigma}}{\sigma}, \quad d\bar{Э}^e = \frac{d\bar{\sigma}}{2G}, \quad d\bar{Э} = \frac{d\bar{\sigma}}{2G} + ds^p\frac{\bar{\sigma}}{\sigma}. \tag{56}$$

Другой формой для полных приращений векторов деформаций и напряжений является форма, принимаемая в теории процессов (частный случай гипотезы компланарности).

$$\begin{cases} d\bar{Э} = \frac{d\bar{\sigma}}{2G} + \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{2G}\right)\frac{\bar{\sigma}d\bar{\sigma}}{\sigma^2}\bar{\sigma}, \\ d\bar{\sigma} = 2Gd\bar{Э} + (P-2G)\,\frac{\bar{\sigma}d\bar{\sigma}}{\sigma^2}\bar{\sigma}, \end{cases} \tag{57}$$

где использовано соотношение

$$ds^p = \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{2G}\right)d\sigma. \tag{58}$$

Для скользящего образа процесса реализуемого для траекторий малой кривизны имеем $\mathrm{P} = d\Phi/ds$ и из (24) получаем зависимость

$$ds^p = \left(1 - \frac{1}{2G}\frac{d\Phi}{ds}\right)ds = g_0 ds. \tag{59}$$

Из (56) следует, что полный вектор напряжений $\bar{\sigma}$ ортогонален поверхности нагружения.

При трансляционно-изотропном упрочнении принимается [3, 10]

$$2f(\bar{\sigma}) = \bar{\sigma}^0\bar{\sigma}^0 - C_p^(s^p) = 0, \quad \sigma_0 = \mathrm{C_p}\,(s^p) \tag{60}$$

Полный вектор напряжений $\bar{\sigma}$ разлагается на вектор $\bar{\sigma}^0$ активных и $\bar{\mathrm{a}}$ – вектор добавочных микронапряжений

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}^0 + \bar{\mathrm{a}} \tag{61}$$

Ортогональным к поверхности нагружения считается вектор вектор активных напряжений $\bar{\sigma}_0$. Его модуль

$$\sigma_0 = \mathrm{C_p}\,(s^p) \tag{62}$$

характеризует изотропное упрочнение либо разупрочнение материала. Смещение центра поверхности нагружения определяет вектор $\bar{\mathrm{a}}$, характеризующий анизотропное упрочнение, учитывающее эффект Баушингера.

Согласно принципу градиентальности (54) и выражения (60) получаем

$$d\bar{Э}^{\mathrm{p}} = ds^p\frac{\bar{\sigma}^0}{\sigma^0}, \; d\bar{Э}^e = \frac{d\bar{\sigma}}{2G}, \; d\bar{Э} = \frac{d\bar{\sigma}}{2G} + ds^p\frac{\bar{\sigma}^0}{\sigma^0} \tag{63}$$

для активных процессов нагружения и

$$d\bar{Э}^{\mathrm{p}} = 0,\ d\bar{Э}^{e} = \frac{d\bar{\sigma}}{2G},\ d\bar{Э} = d\bar{Э}^{e} = \frac{d\bar{\sigma}}{2G} \tag{64}$$

для пассивных процессов разгружения.

Для приращений пластических деформаций из (45) с учетом (55) может быть получена иная форма определяющих соотношений

$$d\bar{Э}^{p} = \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{2G}\right)\frac{\bar{\sigma}d\bar{\sigma}}{k\sigma^2}\bar{\sigma}^0 = \left(1 - \frac{1}{2G}\right)\frac{\bar{\sigma}d\bar{Э}}{k\sigma^2}\bar{\sigma}^0, \tag{65}$$

где

$$\mathrm{P} = \frac{\bar{\sigma}d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}d\bar{Э}} = \frac{d\sigma}{ds}\frac{1}{\cos\vartheta_1}$$

– функционал А.А. Ильюшина. При этом по-прежнему $d\bar{Э}^{e} = d\bar{\sigma}/2G$.

Тогда соотношения теории с трансляционно-изотропным упрочнением для полных приращений могут быть записаны в форме, принимаемой в теории процессов

$$\begin{cases} d\bar{Э} = \frac{d\bar{\sigma}}{2G} = \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{2G}\right)\frac{\bar{\sigma}d\bar{\sigma}}{k\sigma^2}\bar{\sigma}^0, \\ d\bar{\sigma} = 2G + (P - 2G)\frac{\bar{\sigma}d\bar{Э}}{k\sigma^2}\bar{\sigma}^0, \end{cases} \tag{66}$$

где $\bar{\sigma}^0$ определено выражением

$$\bar{\sigma}^0 = \bar{\sigma} - \bar{\mathrm{a}}, \tag{67}$$

$$k = 1 - \frac{\bar{\sigma}\cdot\bar{a}}{\sigma^2}. \tag{68}$$

Из (43), (45) получаем зависимость

$$ds^{\mathrm{p}} = g_0 ds,\ \ g_0 = \frac{\sigma_0}{k\sigma}(1 - \frac{P}{2G})\cos\vartheta_1.$$

При трансляционно-изотропном упрочнении для вектора $\bar{\mathrm{a}}$ в теории Кадашевича-Новожилова принимается закон квазипростого нагружения [9]

$$\bar{a} = 2g\bar{Э}^{\mathrm{p}}. \tag{69}$$

В этом случае

$$\begin{cases} k = 1 + \frac{g}{G} - 2g\frac{Э}{\sigma}\cos\alpha, \ \ \cos\alpha = \hat{\sigma}\cdot\hat{Э}, \\ \bar{\sigma}^0 = \bar{\sigma} - \bar{a} = \bar{\sigma}(1 + \frac{g}{G}) - 2g\bar{Э}. \end{cases} \tag{70}$$

Для функции изотропного упрочнения принимают

$$\sigma_0 = \mathrm{C_p}\,(s^p) = \gamma\sigma^{\mathrm{T}},\ \ \gamma = 1 + \mathrm{c}s^p.$$

Функция $2g$ определяется из опыта на простое растяжение, либо простое нагружение. Для этого используется закон Роша и Эйхингера в виде

$$\sigma = \Phi(Э),\quad \sigma = \mathrm{H}(Э^{\mathrm{p}}).$$

В этом случае три вектора $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}^0 = \hat{\mathrm{a}}$ направлены по одной прямой и $\sigma = \sigma^0 + \mathrm{a}$. Тогда

$$2g = \frac{a}{Э^{\mathrm{p}}} = \frac{\sigma - \gamma\sigma^{\mathrm{T}}}{Э - \sigma/2G} = 2G\frac{\Phi(Э) - \gamma\sigma^{\mathrm{T}}}{2GЭ - \Phi(Э)}. \tag{71}$$

В теории Кадашевича-Новожилова функция $\sigma^0 = \mathrm{C_p}\left(s^p\right)$ изотропного упрочнения определяется из опыта на простое растяжение, либо простое нагружение. В этом случае параметры сложного нагружения такие как кривизна $æ_{1,}$кручение $æ_{2,}$углы излома ϑ_1^0не учитываются. Поэтому оценить их влияние невозможно, хотя вычислить можно. Эффект Баушингера учитывается, но принцип Мазинга не учитывается. Поэтому теория не может описать вторичную пластичность после “протыкания” предельной поверхности.

При изотропном упрочнении $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}^0$, $\hat{\mathrm{a}} = 0$, $k = 1$. Из (66) следует определяющие соотношения (57). Для квазипростого процесса течения ($\hat{\sigma} = \hat{Э}$, $\alpha = 0$) из (70) получаем $\bar{\sigma}^0 = k\bar{\sigma}$ и из соотношений (66) следует определяющие соотношения теории пластического течения В. Прагера для полных приращений

$$\begin{cases} d\overline{Э} = \frac{d\sigma}{2G} + (\frac{dЭ}{d\sigma} - \frac{1}{2G})\frac{\bar{\sigma}d\bar{\sigma}}{\sigma^2}\bar{\sigma}, \\ d\overline{\sigma} = 2Gd\overline{Э} + (\frac{d\sigma}{dЭ} - 2G)\frac{\bar{\sigma}d\bar{Э}}{\sigma^2}\bar{\sigma}. \end{cases} \tag{72}$$

С учетом (68) соотношения теории течения в форме (66) приводятся к виду соотношений теории процессов пластического деформирования

$$\begin{cases} N_1 d\bar{Э} = d\sigma - d\Sigma\left[M_\sigma^*\bar{\sigma} + M_{Э^*\bar{Э}}\right], \\ d\overline{\sigma} = N_1^d\bar{Э} + ds\left[N_\sigma^*\bar{\sigma} + N_{Э^*}\bar{Э}\right], \end{cases} \tag{73}$$

где

$$\begin{cases} N_1 = 2G,\ N_\sigma^* ds = M_\sigma^* d\Sigma,\ N_{Э^*} ds = M_{Э^*} d\Sigma, \\ N_\sigma^* = (\mathrm{P} - 2G)(1 + \frac{g}{G})\frac{\cos\vartheta_1}{k\sigma},\quad N_{Э^*} = -(\mathrm{P} - 2G)2g\frac{\cos\vartheta_1}{k\sigma}, \\ M_\sigma^* = -(\frac{1}{\mathrm{P}} - \frac{1}{2G})(1 + \frac{g}{G})\frac{\cos\vartheta}{k\sigma},\quad M_{Э^*} = (\frac{1}{\mathrm{P}} - \frac{1}{2G})(1 + \frac{g}{G})\frac{\cos\vartheta}{k\sigma}. \end{cases} \tag{74}$$

Обобщение теории течения с трансляционно-изотропным упрочнением предпринято в работах [1]. Вместо закона (69) для вектора дополнительных микронапряжений $\bar{\mathrm{a}}$ предложено “эвристическое” уравнение вида

$$d\bar{a} = gd\bar{Э}^{\mathrm{p}} + ds^p\left[g_{a^{\bar{a}}} + g_Э\bar{Э}^p\right]. \tag{75}$$

Таким образом, основными соотношениями обобщенного варианта теории течения с трансляционно-изотропным упрочнением становятся уравнения

$$\begin{gathered} \bar{Э} = \bar{Э}^e + \bar{Э}^p,\ \ d\bar{Э}^e = \frac{d\bar{\sigma}}{2G},\quad \bar{\sigma}^0 = \bar{\sigma} - \bar{\mathrm{a}}, \\ d\bar{Э}^p = \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{2G}\right)\frac{\bar{\sigma}d\bar{\sigma}}{k\sigma^2}\left(\bar{\sigma}^-\bar{\mathrm{a}}\right)\quad, \\ d\bar{a} = gd\bar{Э}^{\mathrm{p}} + ds^p\left[g_a^{\bar{a}} + g_Э^{\bar{Э}^p}\right], \end{gathered} \tag{76}$$

а также скалярная функция

$$\sigma^0 = \mathrm{C_p}\left(s^p\right). \tag{77}$$

Данный вариант учитывает эффект знакопеременного нагружения, предсказываемый эффектом Баушингера и принципом Мазинга, т.е. по существу учитывается максимально допустимый излом траектории на 180^0 в рамках траектории малой и средней кривизны, для которых диаграмма деформирования $\sigma = \mathrm{H}(s^{\mathrm{p}})$ близка к диаграмме простого нагружения, а упругая разгрузка описывается линейным законом. В основные соотношения (76), (77) входят величины $\bar{Э}, \bar{Э}^e, \bar{Э}^p$, $\bar{a}, \bar{\sigma}^0$, зависящие от вектора-аргумента $\bar{\sigma}$. В то же время, остается открытым вопрос о корректности одного из основных определяющих соотношений (75) и направлении действия вектора активных напряжений $\bar{\sigma}_0$. В теории [9] поведение этого вектора не обсуждается, а модель В.Прагера утверждает, что во все время течения он имеет неизменное направление.

4. Модифицированная теория течения.

Данная теория предложена в развитие общей теории течения. В ее основе лежат две гипотезы. Первая – это основная гипотеза теории течения о возможности разложения полных деформаций на упругие и пластические части

$$\bar{Э} = \bar{Э}^e + \bar{Э}^p, \;\; d\bar{Э} = d\bar{Э}^e + d\bar{Э}^p, \tag{78}$$

$$d\bar{Э}^e = d\bar{\sigma}/2G. \tag{79}$$

Вторая гипотеза – это гипотеза ортогональности полного вектора напряжений $\bar{\sigma}$ к предельной поверхности $f\left(\bar{\sigma}\right)$

$$\bar{\sigma} = \mathrm{grad}\, f\left(\bar{\sigma}\right). \tag{80}$$

При этом, согласно модели В.Прагера, поверхность нагружения обладает только поступательным перемещением [7,8], в то время как в теории процессов эта поверхность может поворачиваться.

Из гипотезы ортогональности (79) в теории процессов вытекает нелокальная форма определяющего соотношения

$$d\bar{\sigma} = N_1 d\bar{Э} + ds\left[N_\sigma^* \bar{\sigma} + N_Э^* \bar{Э}\right], \tag{81}$$

где $N_1, N_\sigma^*, N_Э^*$ – функционалы процессов деформирования в E_5 .

В пространстве напряжений Σ_5 вместо (81) получаем

$$d\overline{Э} = \frac{1}{N_1} d\overline{\sigma} - \frac{d\Sigma}{N_1}\left[{M_\sigma}^* \bar{\sigma} + M_Э^* \bar{Э}\right] \tag{82}$$

где $N_1, M_\sigma^*, M_{Э^*}$ – функционалы процесса нагружения, Σ – длина дуги траектории нагружения в Σ_5,

$$ds N_\sigma^* = d\Sigma M_{\sigma^*}, ds N_{Э^*} = d\Sigma M_{Э^*}.$$

Подставляя (78), (79) в (81), получаем

$$(1 - \frac{N_1}{2G}) d\overline{\sigma} = N_1 d\bar{Э}^{\mathrm{p}} + ds\left[N_\sigma^* \bar{\sigma} + N_Э^* \bar{Э}^p\right] \tag{83}$$

где

$$N^* = N_\sigma^* + \frac{1}{2G} N_Э^* \quad , \quad b = 1 - \frac{N_1}{2G} \tag{84}$$

в теориях течения принимается $N_1 = 2G$, $b = 0$. Тогда из (83) находим

$$d\bar{Э}^{\text{р}} = -\frac{ds}{2G}\left[N^*_\sigma\bar{\sigma} + N^*_Э\bar{Э}^p\right]. \tag{85}$$

Однако, при практически расчетах предел текучести $\sigma^{\text{Т}}$ и положение предельной поверхности определяется по допуску на остаточные деформации $Э^{\text{Т}}_{\text{ост}}$ и поэтому этот предел по существу является “функцией” точности измерительных приборов. Диаграмма деформирования еще до достижения принятого по допуску предела текучести начинает отклонятся от пропорциональной зависимости согласно закона Гука, искривляется и при $\sigma = \sigma^{\text{Т}}$имеет некоторый наклон касательной, тангенс угла которой меньше удвоенного упругого модуля сдвига $2G$. Поэтому утверждения в ряде источников о том, что в теории пластического течения метод обработки экспериментальных данных по определению материальных функций “не связан с определением пределов текучести и других величин с какими либо допусками на деформацию” не имеет смысла. Поэтому при построении модифицированной теории течения нами принято $N_1 < 2G$и $b \neq 0$.

Из (83) в соответствии с выше отмеченным получаем основное определяющее соотношение теории течения

$$d\overline{\sigma} = N^p_1 d\bar{Э}^{\text{р}} + ds\left[N^p_\sigma\bar{\sigma} + N^p_Э\bar{Э}^p\right] \tag{86}$$

где

$$N^p_1 = \frac{N_1}{b}, N^p_\sigma = \frac{N^*}{b}, N_{Э^{\text{р}}} = \frac{N_{Э^*}}{b}. \tag{87}$$

Соотношение (86) сохраняет в себе полный вектор $\bar{\sigma}$ и нет необходимости его разлагать на векторы активных напряжений $\bar{\sigma}^0$ и добавочных микронапряжений $\bar{a}$, что чрезвычайно важно. Для вектора $\bar{Э}^{\text{р}}$ из (86) получаем

$$d\bar{Э}^{\text{р}} = (\frac{1}{N_1} - \frac{1}{2G})\left\{d\bar{\sigma} - ds\left[N^p_\sigma\bar{\sigma} + N^p_Э\bar{Э}^p\right]\right\} \tag{88}$$

Полная деформация, согласно (79), (88),

$$d\bar{Э} = \frac{d\bar{\sigma}}{N_1} - ds(\frac{1}{N_1} - \frac{1}{2G})\left[N^p_\sigma\bar{\sigma} + N^p_Э\bar{Э}^p\right]\} \tag{89}$$

Введем вектор

$$d\bar{Э}^* = d\overline{Э}^p - (\frac{1}{N_1} - \frac{1}{2G})d\bar{\sigma} - dsN^p_Э\bar{Э}^p \tag{90}$$

Этот вектор (90) с учетом (79) приводит к принципу градиентальности в теории процессов [2, 4, 7]

$$d\bar{Э}^* = D\,\mathrm{grad}\, f(\bar{\sigma})d\Sigma, \tag{91}$$

т.е. вектор $d\bar{Э}^*$, коллинеарный полному вектору напряжений $\bar{\sigma}$, ортогонален к предельной поверхности, разделяющий области активного и пассивного упругопластического деформирования.

В частном случае $N_1 = 2G$ и $N^p_Э = 0$ получаем $d\bar{Э}^* = d\bar{Э}^{\text{р}}$, т.е. приходим к принципу градиентальности в классической теории течения.

$$d\bar{Э}^{\text{р}} = D\,\mathrm{grad}\, f(\bar{\sigma})d\Sigma$$

или

$$d\bar{Э}^{\mathrm{p}} = d\lambda \mathrm{grad}\, f(\bar{\sigma}). \tag{92}$$

В теории течения полный вектор напряжений представляется в виде

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}^0 + \bar{\mathrm{a}}, \tag{93}$$

где $\bar{\sigma}^0$ – вектор активных напряжений, $\bar{\mathrm{a}}$ – вектор дополнительных микронапряжений.

Обозначим, как в теориях течения,

$$N_1 = g_1, N_\sigma^p = g_\sigma, N_Э^{\mathrm{p}} = g_Э$$

и представим (59) в виде

$$d\bar{\sigma} = g_1^d \bar{Э}^{\mathrm{p}} + ds^p \left[g_a \bar{\sigma} + g_Э \bar{Э}^p \right]. \tag{94}$$

Подставляя (93) в (94), получим соотношение

$$d\bar{a} = g_1 d\bar{Э}^{\mathrm{p}} + ds^p \left[g_a^{\bar{a}} + g_Э \bar{Э}^p \right] + \bar{\sigma}*, \tag{95}$$

где

$$\bar{\sigma}^* = ds g_\sigma \bar{\sigma}^0 - d\bar{\sigma}^0 = \left[ds g_\sigma^{\sigma^0} - d\sigma^0 \right] \hat{\sigma}^0 - d\hat{\sigma}^0. \tag{96}$$

Так как $\hat{\sigma}^0 \cdot d\hat{\sigma}^0 = 0$, то $\hat{\sigma}^0 \perp d\hat{\sigma}^0$. В модели В.Прагера $\hat{\sigma}^0 = const$, т.е. во все время процесса сохраняется неизменным направление вектора $\bar{\sigma}^0 = \sigma^0 \hat{\sigma}^0$, что маловероятно. Однако, едди это допустить то $d\hat{\sigma}^0 = 0$. Тогда из (96) находим

$$\bar{\sigma}^* = \left[ds g_\sigma^{\sigma^0} - d\sigma^0 \right] \hat{\sigma}^0. \tag{97}$$

Если предположить, что $\bar{\sigma}^* = 0$, то из (95) следует “эвристическое” соотношение (54) теории течения с изотропно-трансляционным упрочнением [1]. Но в таком случае из условия (75) получаем уравнение

$$\frac{d\sigma^0}{ds} = g_\sigma \sigma^0, \tag{98}$$

из которого следует решение

$$\sigma^0 = \mathrm{C}\,(s) = \sigma^T \exp \left\{ \int\limits_0^{\Delta s} g_\sigma ds \right\}^{-\beta \Delta s}, \tag{99}$$

если принять $g_\sigma = const$, то получим

$$\sigma^0 = \sigma^T e^{-g_\sigma \Delta s}, \tag{100}$$

откуда следует, что функция – радиус предельной поверхности $\sigma^0 = C_p\,(s^p)$, характеризующее изотропное упрочнение или разупрочнение суживается. Это означает, что в процессе деформирования при $s^p \to \infty$предельная поверхность превратится в точку, что совсем невероятно. Уменьшение радиуса предельной поверхности при активном трансляционном упрочнении подтверждается результатами обработки экспериментальных данных для различных материалов при растяжении в [1].

Нелокальная форма определяющего соотношения и ее вариант соотношений модифицированной теории течения в своей основе опираются на принцип ортогональности полного вектора напряжений к предельной поверхности. Из этого принципа естественным образом следует, что векторы $\bar{\sigma}^0$ и $\bar{a}$ имеют направление, что и $\bar{\sigma}$ и поэтому имеет место не только Но в таком случае единичные векторы $\hat{\sigma}^0 = \hat{a} = \hat{\sigma}$, $\hat{\sigma}^0 = \sigma^0\hat{a}$, $\hat{\sigma} = \sigma\hat{a}$, а уравнение (94) примет вид

$$d\bar{\sigma} = g_1^0 d\bar{Э}^{\mathrm{p}} + ds\left[g_\sigma^0\bar{\sigma} + g_Э^0\bar{Э}^p\right] \tag{101}$$

откуда

$$d\bar{a} = g_1^0 d\bar{Э}^{\mathrm{p}} + ds\left[g_a^0\bar{a} + g_Э^0\bar{Э}^p\right], \tag{102}$$

где

$$g_1^0 = \frac{a}{\sigma}g_1, \quad g_a^0 = g_\sigma^0 - \frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma^0}{ds}, \quad g_Э^0 = \frac{a}{\sigma}g_Э, \quad ds = g_0 ds^p.$$

Таким образом, соотношение (45) теории течения с трансляционным упрочнением в [1] является корректным в рамках теории течения, если принят принцип ортогональности полного вектора напряжений $\bar{\sigma}$ к предельной поверхности. Но в таком случае в теории течения с трансляционным упрочнением нет необходимости раскладывать полный вектор напряжений $\bar{\sigma}$ на вектор активных $\bar{\sigma}^0$ и вектор добавочных $\bar{a}$напряжений. Достаточно использовать основное соотношение модифицированной теории течения (86) либо (89).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Бондарь, В. С.* Неупругость. Варианты теории / В. С. Бондарь. – М. :Физматлит, 2004. – 144 с.

[2] *Зубчанинов, В. Г.* Гипотеза ортогональности и принцип градиентальности в теории пластичности / В. Г. Зубчанинов // Известия РАН. МТТ. – 2008. – № 5. – С. 68-73.

[3] *Зубчанинов, В. Г.* Математическая теория пластичности / В. Г. Зубчанинов. – Тверь : ТГТУ, 2002. – 300 с.

[4] *Зубчанинов, В. Г.* Устойчивость и пластичность. Т. 2 : Пластичность / В. Г. Зубчанинов. – М. : Физматлит, 2008. – 336 с.

[5] *Ильюшин, А. А.* Еще о постулате изотропии / А. А. Ильюшин // Известия АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1962. – № 1. – С. 201-204.

[6] *Ильюшин, А. А.* Механика сплошной среды / А. А. Ильюшин. – М. : МГУ, 1990. – 310 с.

[7] *Ильюшин, А. А.* Пластичность. Основы общей математической теории / А. А. Ильюшин. – М. : АН СССР, 1963. – 271 с.

[8] *Ильюшин, А. А.* Труды. Т. 2 : Пластичность, 1946-1966 / А. А. Ильюшин. – М. : Физматлит, 2004. – 479 с.

[9] *Новожилов, В. В.* Вопросы механики сплошной среды / В. В. Новожилов. – Ленинград [СПб.] : Судостроение, 1989. - 397 с.

[10] *Поль, Б.* Макроскопические критерии пластического течения и хрупкого разрушения / Б. Поль // Разрушение. Т. 2 : Математические основы теории разрушения. – М. : Мир, 1975. – С. 336-520.

V. G. Zubchaninov

MODIFIED FLOWING THEORY

Tver State Technical University

Abstract. The modified flowing theory fouded on equations of theory of processes is considered. Decomposition of total strains on elastic and plastic components and hypothesis of ortogonality are used.
Keywords: plasticity, elasticity, flowing, continuous solid, complex loading, strain, deformation, limit surface, gradientity.

Зубчанинов Владимир Георгиевич

доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой сопротивления материалов, теории упругости и пластичности Тверского государственного технического университета, г. Тверь

e-mail: vgz@rambler.ru

Vladimir Georgievich Zubchaninov

doctor of science, professor, managing chair of resistance of materials, Theories of elasticity and plasticity of the Tver state technical university, Tver