Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2009. № 1. С. 98–104

Ш. Г. Гасанов

О ЧАСТИЧНОМ ЗАКРЫТИИ ТРЕЩИНЫ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА УПРУГИХ СРЕД

Азербайджанская сельскохозяйственная академия

Аннотация. Исследуется плоская задача о трещине, возникающей на границе раздела двух однородных изотропных сред с различными упругими постоянными. Считается, что при приложении внешней нагрузки в концевой зоне трещины будут возникать сжимающие напряжения, в которых берега трещины на некотором участке войдут в контакт.

Ключевые слова: кусочно-однородное тело, трещина на границе раздела сред, концевая контактная зона, контактные напряжения.

УДК: 539.374

Рассматривается задача о распределении напряжений и деформаций вблизи края трещины, возникающей на границе раздела двух однородных изотропных сред с различными упругими постоянными.

При некоторых видах нагружения двухслойного тела и соотношениях геометрических параметров возможно уменьшение деформации тела в направлении перпендикулярном трещине-расслоении, и в связи с этим снижается коэффициент интенсивности напряжений в кончике трещины. Следует ожидать, что при некотором соотношении параметров нагружения и геометрических характеристиках двухслойного тела будут возникать зоны S сжимающих напряжений, в которых берега трещины на некотором участке войдут в контакт. Это взаимодействие берегов трещины приведет к появлению контактных напряжений на данном участке берегов трещины.

В случае, когда характерный линейный размер S считается малым по сравнению с длиной трещины или с каким-либо другим характерным линейным размером L двухслойного тела в плане, возможно эффективное асимптотическое решение задачи о частичном закрытии трещины, основанное на представлении о тонкой структуре конца трещины.

Задачу о тонкой структуре конца трещины на границе раздела сред (т.е. о распределении напряжений и деформаций на расстояниях r от конца трещины, удовлетворяющих условию $L >> r >> \rho$, где ρ – радиус кривизны конца трещины) можно ставить [3] следующим образом.

Рассмотрим окрестность конца трещины, которая мала по сравнению с характерным линейным размером в плане пластины, но больше сравнительно с характерным линейным размером области S. Тогда трещина на плоскости xy представится полубесконечным размером вдоль $y = 0$, $-\infty < x < 0$. При этом в

Поступила 17.04.2008

части разреза длиной d (концевая зона), примыкающая к ее вершине, берега трещины будут взаимодействовать (войдут в контакт), что будет способствовать появлению контактных напряжений на данном участке. Вне этого участка берега трещины будут свободны от нагрузок. На бесконечности реализуется напряженное поле, характерное для тонкой структуры конца трещины. Это поле считается заданным и имеет [3] следующий вид

$$\begin{aligned}
&\sigma_x = \frac{K_I^\infty}{2\operatorname{ch}\pi\beta\sqrt{2\pi r}}\left\{e^{-\beta(\theta-\pi)}\left[3\cos\frac{\theta}{2} - 2\beta\sin\theta\cos\frac{3\theta}{2} - \sin\theta\sin\frac{3\theta}{2}\right] -\right.\\
&\quad \left.- e^{\beta(\theta-\pi)}\cos\frac{\theta}{2}\right\} - \frac{K_{II}^\infty}{2\operatorname{ch}\pi\beta\sqrt{2\pi r}}\left\{e^{\beta(\theta-\pi)}\sin\frac{\theta}{2} + e^{-\beta(\theta-\pi)}\left[-3\sin\frac{\theta}{2} +\right.\right.\\
&\quad \left.\left.+\sin\theta\cos\frac{3\theta}{2} - 2\beta\sin\theta\sin\frac{3\theta}{2}\right]\right\},\\
&\sigma_y = \frac{K_I^\infty}{2ch\pi\beta\sqrt{2\pi r}}\left\{e^{-\beta(\theta-\pi)}\left[\cos\frac{\theta}{2} + 2\beta\sin\theta\cos\frac{3\theta}{2} + \sin\theta\sin\frac{3\theta}{2}\right] + e^{\beta(\theta-\pi)}\cos\frac{\theta}{2}\right\} -\\
&\quad - \frac{K_{II}^\infty}{2\operatorname{ch}\pi\beta\sqrt{2\pi r}}\left\{-e^{\beta(\theta-\pi)}\sin\frac{\theta}{2} + e^{-\beta(\theta-\pi)}\left[\sin\theta - \sin\theta\cos\frac{3\theta}{2} + 2\beta\sin\theta\sin\frac{3\theta}{2}\right]\right\},\\
&\tau_{xy} = \frac{K_I^\infty}{2\operatorname{ch}\pi\beta\sqrt{2\pi r}}\left\{e^{-\beta(\theta-\pi)}\left[\sin\frac{\theta}{2} + \sin\theta\cos\frac{3\theta}{2} - 2\beta\sin\theta\sin\frac{3\theta}{2}\right] - e^{\beta(\theta-\pi)}\sin\frac{\theta}{2}\right\} -\\
&\quad - \frac{K_{II}^\infty}{2\operatorname{ch}\pi\beta\sqrt{2\pi r}}\left\{-e^{\beta(\theta-\pi)}\cos\frac{\theta}{2} + e^{-\beta(\theta-\pi)}\left[-\cos\frac{\theta}{2} + \sin\theta\sin\frac{3\theta}{2} + 2\beta\sin\theta\cos\frac{3\theta}{2}\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{1}$$

В поставленной задаче параметрами нагружения являются коэффициенты интенсивности напряжений K_I^∞, K_{II}^∞, представляющие собой некоторые функции формы двухслойного тела, граничных условий. Они определяются из решения задачи "в целом".

Рассматриваемая задача состоит в определении контактных напряжений на участке $-d \leq x \leq 0$, размера контактной зоны, а также напряженно-деформированного состояния вне трещины. Концевая область, примыкающая к вершине трещины, мала по сравнению с остальной частью плоскости. Считается, что при закрытии берегов трещины предельное равновесие не достигнуто и, таким образом, проскальзывание берегов трещины отсутствует. При действии внешней нагрузки на некотором участке d берега трещины взаимодействуют между собой. Это взаимодействие берегов трещины приводит к появлению в общем случае нормальных $q_y(x)$ и касательных усилий $q_{xy}(x)$. Таким образом, к берегам разреза в концевой области будут приложены нормальные и касательные напряжения, численно равные $q_y(x)$ и $q_{xy}(x)$, соответственно. Величины этих напряжений заранее неизвестны и подлежат определению в процессе решения краевой задачи механики разрушения.

Граничные условия рассматриваемой задачи на берегах трещины имеют следующий вид

$$\begin{aligned}
&\sigma_y - i\tau_{xy} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, -\infty < x < -d,\\
&\sigma_y - i\tau_{xy} = q_y - iq_{xy} \quad \text{при} \quad y = 0, -d \leq x \leq 0,
\end{aligned} \tag{2}$$

где i – мнимая единица.

С помощью формул Колосова-Мусхелишвили [2] имеем

$$\begin{aligned}
&\sigma_x^{(k)} + \sigma_y^{(k)} = 2\left[\Phi_k(z) + \overline{\Phi_k(z)}\right] \quad (z = x + iy),\\
&\sigma_y^{(k)} + i\tau_{xy}^{(k)} = \Phi_k(z) + \overline{\Phi_k(z)} + \bar{z}\Phi_k'(z) + \Psi_k(z),\\
&2G_k\left(u^{(k)} + i\upsilon^{(k)}\right) = k_k\varphi_k(z) - z\overline{\Phi_k(z)} - \overline{\psi_k(z)} \quad (k = 1,\ 2).
\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $k_1 = 3 - 4\mu_1$; $k_2 = 3 - 4\mu_2$; $\Phi_1(z)$ и $\Psi_1(z)$ – аналитические функции при $y > 0$, $\Phi_2(z)$ и $\Psi_2(z)$ – аналитические функции при $y < 0$.

Следуя [4], введем функции $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$, аналитические во всей плоскости z, кроме, может быть, оси x

$$\Phi(z) = \begin{cases} \frac{G_1(1+k_2)}{G_1+k_1G_2}\Phi_2(z) + \frac{G_2-G_1}{G_1+k_1G_2}\left[\bar{\Phi}_1(z) + z\bar{\Phi}'_1(z) + \bar{\Psi}_1(z)\right] & \text{при} \quad \mathrm{Im} z < 0, \\ \Phi_1(z) \quad \text{при} \quad \mathrm{Im} z > 0, \end{cases}$$
$$\Omega(z) = \begin{cases} \frac{G_1(1+k_1)}{G_2+k_2G_1}\left[\bar{\Phi}_2(z) + z\bar{\Phi}'_2(z) + \bar{\Psi}_2(z)\right] - \frac{G_1k_2-G_2k_1}{G_2+k_2G_1}\Phi_1(z) & \text{при} \quad \mathrm{Im} z > 0, \\ \bar{\Phi}_1(z) + z\bar{\Phi}'_1(z) + \bar{\Psi}_1(z) \quad \text{при} \quad \mathrm{Im} z < 0. \end{cases} \tag{4}$$

Из этих формул получаем необходимые в дальнейшем основные соотношения, выражающие производные по x от компонент вектора смещения и компоненты тензора напряжения через функции $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$.

В верхней полуплоскости ($\mathrm{Im} z > 0$)

$$\begin{aligned} &\sigma_x + \sigma_y = 4\mathrm{Re}\Phi(z), \\ &\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \\ &2G_1\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) = k_1\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}; \end{aligned} \tag{5}$$

в нижней полуплоскости ($\mathrm{Im} z < 0$)

$$\begin{aligned} &\sigma_x + \sigma_y = 4\frac{G_1+k_1G_2}{G_1+k_2G_1}\mathrm{Re}\left[\Phi(z) + \frac{G_2-G_1}{G_1+k_1G_2}\Omega(z)\right], \\ &\quad \sigma_y - i\tau_{xy} = \frac{G_1+k_1G_2}{G_1+k_2G_1}\Phi(z) + \frac{G_1-G_2}{G_1+k_2G_1}\Omega(z) + \frac{G_1k_2+G_2}{G_1+k_2G_1}\Omega(\bar{z}) + \\ &\quad + \frac{G_1k_2-G_2k_1}{G_1+k_2G_1}\Phi(\bar{z}) + (z - \bar{z})\left[\frac{G_1+k_1G_2}{G_1+k_2G_1}\overline{\Phi'(z)} + \frac{G_1-G_2}{G_1+k_2G_1}\overline{\Omega'(z)}\right], \\ &2G_2\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) = k_2\frac{G_1+k_1G_2}{G_1+k_2G_1}\Phi(z) + k_2\frac{G_1-G_2}{G_1+k_2G_1}\Omega(z) - \frac{G_1k_2+G_2}{G_1+k_2G_1}\Omega(\bar{z}) - \\ &\quad - \frac{G_1k_2-G_2k_1}{G_1+k_2G_1}\Phi(\bar{z}) - (z - \bar{z})\left[\frac{G_1+k_1G_2}{G_1+k_2G_1}\overline{\Phi'(z)} + \frac{G_1-G_2}{G_1+k_2G_1}\overline{\Omega'(z)}\right]. \end{aligned} \tag{6}$$

Учитывая соотношения (5) и (6) граничные условия (2) запишем в виде [4]

$$\begin{gathered} \Phi^+ + \Omega^- = f^+(x) \\ (G_1 + G_2k_1)\Phi^- + (G_1 - G_2)\Omega^- + (G_1k_2 - G_2k_1)\Phi^+ + (G_1k_2 + G_2)\Omega^+ = \\ = (G_1 + k_2G_1) f^-(x), \end{gathered} \tag{7}$$

где $f^{\pm}(x) = 0$ при $-\infty < x < -d$, $f^{\pm}(x) = q_y - iq_{xy}$ при $-d \le x \le 0$; знаки плюс и минус соответствуют верхнему и нижнему берегам трещины с концевой контактной зоной.

После некоторых преобразований получим две решаемые порознь краевые задачи линейного сопряжения для одной функции

$$\begin{aligned} &F_1^+ - F_1^- = f^+ - f^-, \quad (-\infty < x < 0) \\ &F_2^+ + gF_2^- = f_0. \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь $F_1(z) = \frac{1}{G_1(1+k_2)}\left[C_2\Phi(z) - C_1\Omega(z)\right]$, $F_2(z) = \Phi(z) + \Omega(z)$, $g = \frac{C_2}{C_1}$, $C_1 = G_2 + k_2G_1$, $C_2 = G_1 + k_1G_2$, $f_0 = \frac{B}{C_1}f^+$, $B = \left[G_2(1 + k_1) + G_1(1 + k_2)\right]$.

В классе функций, имеющих на конце разреза интегрируемую особенность, общее решение неоднородной задачи (8) запишется в виде

$$F_1(z) = \mathrm{C}, \quad F_2(z) = \frac{1}{2\pi i z^{1/2-i\beta}} \int\limits_{-d}^{0} \frac{x^{1/2-i\beta} f_0(x)dx}{x-z} + \frac{K_I^\infty - iK_{II}^\infty}{2\sqrt{2\pi} z^{1/2-i\beta}}, \tag{9}$$

где $\beta = \frac{1}{2\pi} \ln g$.

Из условия на бесконечности следует, что $C = 0$.

Формулы для комплексных потенциалов принимают вид

$$\Phi\left(z\right) = \frac{\mathrm{C}_1}{B} F_2\left(z\right), \quad \Omega\left(z\right) = \frac{C_2}{B} F_2\left(z\right). \tag{10}$$

Для окончательного определения потенциалов $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ необходимо найти контактные напряжения $q_y\left(x\right)$ и $q_{xy}\left(x\right)$ на участке контакта между кромками трещин, т.е. при $-\,d \le x \le 0$.

Условием, служащим для определения неизвестных контактных напряжений, возникающих на берегах трещины в концевой контактной зоне, является отсутствие раскрытия трещины в этой области. В рассматриваемой задаче это дополнительное условие удобнее записать для производной раскрытия смещения берегов трещины

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[u^{(1)} - u^{(2)} + i\left(\upsilon^{(1)} - \upsilon^{(2)}\right)\right] = 0, \tag{11}$$

где x – аффикс точек концевой зоны трещины $-\,d \le x \le 0$.

Для определения функции $q_y - iq_{xy}$ рассмотрим формулы (5) и (6). На основании этих формул, осуществляя предельный переход на контур трещины при $y \to \pm 0$, получим следующие соотношения

$$\begin{aligned} &2G_1 \tfrac{\partial}{\partial x}\left(u^{1)} + i\upsilon^{1)}\right) = k_1 \Phi^+ - \Omega^-, \\ &2G_2 \tfrac{\partial}{\partial x}\left(u^{(2)} + i\upsilon^{(2)}\right) = \tfrac{1}{G_1(1+k_2)}\left[k_1\left(G_1 + k_1 G_2\right)\Phi^- + k_2\left(G_1 - G_2\right)\Omega^- - \right. \\ &\quad \left. -\left(G_1 k_2 + G_2\right)\Omega^+ - \left(G_1 k_2 - G_2 k_1\right)\Phi^+\right]. \end{aligned} \tag{12}$$

Применяя к правой части (9) формулу Сохоцкого-Племеля [1], находим

$$\begin{aligned} &F_2^+(x) = \tfrac{1}{2} f_0 + \tfrac{1}{2\pi i X^+(x)} \int\limits_{-d}^{0} \tfrac{X^+(t) f_0 dt}{(t-x)} + \tfrac{K_I^\infty - iK_{II}^\infty}{2\sqrt{2\pi} X^+(x)}, \quad X^+(x) = x^{1/2-i\beta}, \\ &F_2^-(x) = \tfrac{f_0}{2g} - \tfrac{1}{g}\tfrac{1}{2\pi i X^+(x)} \int\limits_{-d}^{0} \tfrac{X^+(t) f_0 dt}{(t-x)} - \tfrac{1}{g}\tfrac{\left(K_I^\infty - iK_{II}^\infty\right)}{2\sqrt{2\pi} X^+(x)}, \\ &\Phi^\pm\left(x\right) = \tfrac{\mathrm{C}_1}{B} F_2^\pm\left(x\right), \quad \Omega^\pm\left(x\right) = \tfrac{\mathrm{C}_2}{B} F_2^\pm\left(x\right). \end{aligned} \tag{13}$$

Используя формулы (13), окончательно найдем

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial}{\partial x}\left[u^{(1)} - u^{(2)} + i\left(\upsilon^{(1)} - \upsilon^{(2)}\right)\right] = \tfrac{f_0}{2G_1 B}\left[k_1 C_1 - \tfrac{1}{g} C_2 - \tfrac{(B_1 - B_2)}{G_2(1+k_2)}\right] + \\ &\quad + \tfrac{1}{2G_1 B}\left[\tfrac{B_1 + B_2}{G_2(1+k_2)} + k_1 C_1 + \tfrac{1}{g} C_2\right]\left[\tfrac{D}{X^+(x)} + I\right], \end{aligned} \tag{14}$$

где $B_1 = \frac{1}{g} C_2\left[k_1 C_1 + k_2\left(G_2 - G_1\right)\right], \quad B_2 = C_1\left[C_2 - \left(G_1 k_2 - G_2 k_1\right)\right], D = \frac{K_I^\infty - iK_{II}^\infty}{2\sqrt{2\pi}}$,

$I = \frac{1}{2\pi i X^+(x)} \int\limits_{-d}^{0} \frac{X^+(t) f_0 dt}{(t-x)}$.

Удовлетворяя условию (11), получим комплексное сингулярное интегральное уравнение относительно неизвестных контактных напряжений $q_y - iq_{xy}$

$$D_1\left(q_y(x)-iq_{xy}(x)\right)+D_2\frac{1}{2\pi iX^+(x)}\int\limits_{-d}^{0}\frac{X^+(t)\left(q_y(t)-iq_{xy}(t)\right)dt}{(t-x)}=-\frac{DD_2C_1}{BX^+(x)}, \qquad (15)$$

где $D_1=\frac{1}{2G_1B}\left[k_1C_1-\frac{1}{g}C_2-\frac{(B_1-B_2)}{G_2(1+k_2)}\right]$, $D_2=\frac{1}{2G_1B}\left[\frac{B_1+B_2}{G_2(1+k_2)}+k_1C_1+\frac{1}{g}C_2\right]$.

Решение интегрального уравнения (15) может быть получено путем решения соответствующей задачи Римана [1]. Интегральное уравнение (15) можно представить в виде

$$a\left(t\right)\varphi\left(t\right)+\frac{b\left(t\right)}{\pi i}\int\limits_{-d}^{0}\frac{\varphi\left(\tau\right)}{\tau-t}dt=f\left(t\right), \qquad (16)$$

где $\varphi\left(t\right)=\left(q_y(t)-iq_{xy}(t)\right)X^+(t)$, $b\left(t\right)=\frac{D_1}{2X^+(t)}$, $a\left(t\right)=\frac{D_1}{X^+(t)}$, $f\left(t\right)=-\frac{DD_2C_1}{BX^+(t)}$.

Введем кусочно аналитическую функцию $F\left(z\right)$, заданную интегралом Коши, плотностью которого служит искомое решение интегрального уравнения

$$F\left(z\right)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-d}^{0}\frac{\varphi\left(\tau\right)}{\tau-z}d\tau. \qquad (17)$$

Аналитическая функция $F\left(z\right)$ должна являться решением задачи линейного сопряжения

$$F^+\left(t\right)=G\left(t\right)F^-\left(t\right)+g\left(t\right), \qquad (18)$$

где $G\left(t\right)=\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}$, $g\left(t\right)=\frac{f(t)}{a(t)+b(t)}$.

Решение краевой задачи (18) в классе всюду ограниченных функций имеет вид

$$F\left(z\right)=\frac{X_1\left(z\right)}{2\pi z}\int\limits_{-d}^{0}\frac{g\left(\tau\right)}{X_1^+\left(\tau\right)\left(\tau-z\right)}\tau, \qquad (19)$$

где $X_1(z)=z^{1/2-i\beta_1}$, $\beta_1=\frac{1}{2\pi}\ln G$.

При этом должно выполняться следующее условие разрешимости краевой задачи [1]

$$\int\limits_{-d}^{0}\frac{g\left(\tau\right)d\tau}{X_1^+\left(\tau\right)}=0. \qquad (20)$$

Это дополнительное условие служит для определения неизвестного размера d концевой контактной зоны.

По формулам Сохоцкого-Племеля находим решение интегрального уравнения (16)

$$\begin{aligned}&\varphi(t) = F^+(t) - F^-(t),\\ &F^+(t) = X_1^+(t)\left[\frac{1}{2}\frac{g(t)}{X_1^+(t)} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-d}^{0}\frac{g(\tau)d\tau}{X_1^+(\tau)(\tau-t)}\right], \quad X_1^+(t) = t^{1/2-i\beta_1},\\ &F^-(t) = X_1^-(t)\left[-\frac{1}{2}\frac{g(t)}{X_1^+(t)} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-d}^{0}\frac{g(\tau)d\tau}{X_1^+(\tau)(\tau-t)}\right].\end{aligned} \tag{21}$$

Учитывая, что $X_1^-(t)/X_1^+(t) = \frac{1}{G}$, находим

$$\frac{q_y(t) - iq_{xy}(t)}{X^+(t)} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{G}\right)g(t) + X_1^+(t)\left(1-\frac{1}{G}\right)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-d}^{0}\frac{g(\tau)d\tau}{X_1^+(\tau)(\tau-t)}.$$

Необходимые нам интегралы, содержащие функцию $X_1^+(\tau)$ вычисляются приемом, предложенным Н. И. Мусхелишвили [2, §110].

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Гахов, Ф. Д.* Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. –М. : Наука, 1977. – 640 с.

[2] *Мусхелишвили, Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.

[3] *Черепанов, Г. П.* Механика хрупкого разрушения / Г. П. Черепанов. – М. : Наука, 1974. – 640 с.

[4] *Черепанов, Г. П.* О напряженном состоянии в неоднородной пластине с разрезами / Г. П. Черепанов // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1962. – № 1. – С. 131-138.

Sh. H. Hasanov

ABOUT PARTIAL CLOSING THE CRACK ON BOUNDARY OF SECTION OF ELASTIC ENVIRONMENTS

The Azerbaijan agricultural academy

Abstract. The plane problem about a crack arising on border of section of two homogeneous isotropic environments with various elastic constants is investigated. It is considered, that at the appendix of external loading in an end zone of a crack there will be compressing stressin which faces of a crack on some site will contact.

Keywords: partial homogeneous body, a crack on border of section of environments, a trailer contact zone, contact pressure

Гасанов Шахин Гумбат оглы

кандидат технических наук, доцент, Бакинский филиал Московского государственного открытого университета, Баку

`e-mail:` irakon63@hotmail.com

Hasanov Shahin Humbat oqlu

doctor of philosophy, senior lecturer, The Baku branch of the Moscow state open university, Baku