

В. В. Глаголев, Т. А. Мерцалова

ОБ ОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЗАДАЧИ ДАГДЕЙЛА

Тулский государственный университет

Аннотация. Описание пластического деформирования в рамках теории течения является классическим подходом механики сплошной среды. Но, несмотря на кажущуюся простоту, решение конкретных задач ищется в рамках жесткопластической модели, когда упругим деформированием пренебрегается по сравнению с пластическим. Постановка связанных упругопластических задач сопряжена в данном случае с неопределенностью в отношении напряжений и соответствующих им деформаций для области пластического формоизменения. Однако, в некоторых случаях, эту проблему удается обойти. В представленной работе на основании идеально упругопластической модели исследуется важная задача механики разрушения состоящая в моделировании поведения тонких пластических зон в зависимости от вида плоской задачи. В классическом подходе [7,11] тонкая пластическая зона ассоциируется с действием сил сцепления постоянной интенсивности, которые по своей сути, являясь внешней нагрузкой, не связаны с процессом перехода среды из упругого состояния в пластическое. При этом не рассматривается зависимость зоны действия сил сцепления от начальной стадии нагружения до критического состояния. В рассмотренной постановке пластическая область распространяется в деформируемом теле, и ее состояние определяется в рамках соотношений механики сплошной среды. Эволюция длины пластической зоны получается из решения конкретной задачи и может рассматриваться как докритический рост. В качестве перехода из упругого в состояние пластического течения в работе используется критерий Треска. Показано, что учет напряжений, действующих вдоль слоя, существенен при формировании пластической области и переходе в пластическое состояние.

К основному результату исследуемой модели следует отнести полученное принципиальное отличие напряженного состояния в вершине трещины от вида плоской задачи. Если для плоского напряженного состояния напряжения не превосходят предел текучести, то в состоянии плоской деформации наблюдается сильный гидростатический эффект в результате которого в концевой области напряжения находятся за пределом текучести.

Ключевые слова: характерный размер, граничное интегральное уравнение, линейная упругость, идеально упругопластическая модель

УДК: 539.375

Введение. Одним из модельных представлений механики разрушения является вид зоны пластичности при маломасштабной текучести у вершины трещины нормального отрыва. Область пластичности в этом случае является продолжением трещиноподобного дефекта в упругопластической среде. Классическое рассмотрение трещины нормального отрыва в виде математического разреза постулирует механизм

Поступила 07.05.2008

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 07-01-96402)

пластического течения, при котором по берегам границы пластической зоны действуют напряжения равные пределу текучести [7,11]. С формальной точки зрения при вычислении длины пластической зоны данное положение при различных видах плоского состояния приводит практически к одинаковому результату. Однако экспериментальные данные свидетельствуют о существенном различии длины этих зон. Поэтому для плоской деформации вводится поправка [12] (предел текучести формально увеличивается в $\sqrt{3}$ раз) при которой размер зоны пластичности становится в 3 раза меньше, чем при плоском напряженном состоянии.

В данной работе трещина моделируется физическим разрезом с характерным размером δ_0 . Данный масштабный уровень выбираем как минимально допустимый в рамках которого справедливы гипотезы механики сплошной среды [1,2]. Зона пластичности в этом случае, являясь продолжением трещиноподобного дефекта, будет представлять собой прямоугольник с высотой δ_0 и длиной l_p подлежащей определению. Зависимость соответствующей длины от вида напряженно-деформированного состояния, а также изучение механизма пластического течения от вида плоского состояния является целью данной работы.

1. Постановка и решение задачи упругого деформирования слоя.

Рассмотрим нагружение плоскости, ослабленной физическим вырезом δ_0 симметричной внешней нагрузкой, согласно схеме рис. 1. Считаем, что материал, лежащий на продолжении физического разреза в плоскости образует слой – слой взаимодействия с однородным распределением НДС по толщине [1,2].

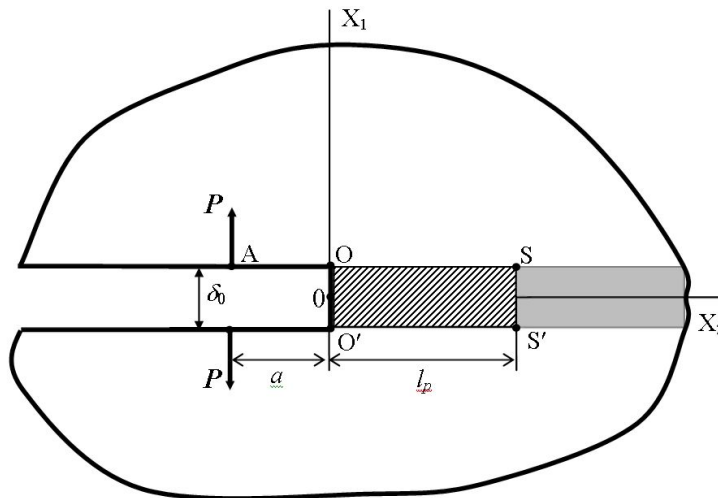


Рис. 1.

Наряду с напряжением $\sigma_{11}(x_2)$ в слое учитываем напряжение $\sigma_{22}(x_2)$ вдоль оси разреза, которое обусловлено касательной нагрузкой по границе со слоем. Полагаем, что связь между напряжениями и деформациями вне слоя взаимодействия описывается в рамках линейной теории упругости.

В силу симметрии задачи рассмотрим только верхнюю полуплоскость ($x_1 \geq \delta_0/2$), а действие слоя заменим нагрузкой $\vec{q}(x) = -\left(\hat{\sigma}_{11} \vec{e}_1 + \hat{\sigma}_{21} \vec{e}_2\right)$ (здесь и далее $x \equiv x_2/\delta_0$ – безразмерная координата; $\hat{\sigma}_{ij} = \beta \sigma_{ij}$ $i, j = 1, 2$ – безразмерные напряжения; $\beta = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E}$ – параметр материала для случая плоской деформации, $\beta = \frac{2}{\pi E}$ – параметр материала в плоском напряженном состоянии, E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона).

Соотношения Фламана [8] связывают внешние нагрузки $\hat{\sigma}_{11}$ и $\hat{\sigma}_{12}$ с перемещениями границы полуплоскости безразмерными выражениями

$$\hat{u}_1(x) = -\hat{P} \ln \left(\frac{x+a}{L+a} \right) + \int_0^L \hat{\sigma}_{11}(\xi) \ln \frac{|x-\xi|}{L-\xi} d\xi, \quad (1)$$

$$\hat{u}_2(x) = \int_0^L \hat{\sigma}_{12}(\xi) \ln \frac{|x-\xi|}{L-\xi} d\xi, \quad (2)$$

где $\hat{u}_i = u_i/\delta_0$ $i = 1, 2$ – безразмерные перемещения; $\hat{P} = P\beta/\delta_0$ – безразмерная сила на единицу толщины; L – удаленная точка с нулевым перемещением; L – расстояние от начала координат до L .

Основным постулатом модели слоя взаимодействия является положение об однородности напряженно-деформированного состояния (НДС) по толщине слоя. В силу данной гипотезы из условия равновесия следует, что:

$$\frac{\partial \hat{\sigma}_{22}}{\partial x} = -2 \hat{\sigma}_{21}. \quad (3)$$

Перемещения границ слоя определяются в следующем виде:

$$\hat{u}_1(x) = \frac{1}{2} \varepsilon_{11}(x), \quad (4)$$

$$\hat{u}_2(x) = \int_L^x \frac{1}{2} \varepsilon_{22}(x) dx. \quad (5)$$

Напряжения в состоянии плоской деформации, до достижения предела текучести, связаны с деформациями законом Гука:

$$\varepsilon_{11} = A \hat{\sigma}_{11} - B \hat{\sigma}_{22}, \quad (6)$$

$$\varepsilon_{22} = A \hat{\sigma}_{22} - B \hat{\sigma}_{11}, \quad (7)$$

где $A = \frac{\pi}{2}$, $B = \frac{\nu\pi}{2(1-\nu)}$ – безразмерные постоянные.

В плоском напряженном состоянии закон Гука запишем в виде:

$$\varepsilon_{11} = A \hat{\sigma}_{11} - B \hat{\sigma}_{22}, \quad (8)$$

$$\varepsilon_{22} = A \hat{\sigma}_{22} - B \hat{\sigma}_{11}, \quad (9)$$

$$\varepsilon_{33} = -B \left(\hat{\sigma}_{11} + \hat{\sigma}_{22} \right), \quad (10)$$

где $A = \frac{\pi}{2}$, $B = \frac{\pi\nu}{2}$ – безразмерные постоянные данного вида плоского состояния.

Продифференцируем по x выражение (2):

$$\varepsilon_{22} = \frac{d\hat{u}_2}{dx} = \int_0^L \hat{\sigma}_{12}(\xi) \frac{1}{(x-\xi)} d\xi. \quad (11)$$

Перепишем выражение (1) с учетом формулы (4) в следующем виде:

$$\varepsilon_{11} = -2P \ln \left(\frac{x+a}{L+a} \right) + 2 \int_0^L \hat{\sigma}_{11}(\xi) \ln \frac{|x-\xi|}{L-\xi} d\xi. \quad (12)$$

Исходя из формул (11) и (12), найдем изменение объема вдоль слоя за счет движения “стенок”, ограничивающего его упругого пространства:

$$\begin{aligned} \int_0^L \hat{\sigma}_{12}(\xi) \frac{1}{(x-\xi)} d\xi + 2 \int_0^L \hat{\sigma}_{11}(\xi) \ln \frac{|x-\xi|}{L-\xi} d\xi - 2P \ln \left(\frac{x+a}{L+a} \right) + \varepsilon_{33}(x) = \\ = \varepsilon_{11}(x) + \varepsilon_{22}(x) + \varepsilon_{33}(x) = \theta(x). \end{aligned} \quad (13)$$

Отметим, что уравнение (13) является универсальным и остается в силе, как при упругом, так и упругопластическом поведении слоя.

Используя связи закона Гука (6)-(10), равенство (13) представим в виде:

$$\begin{aligned} \int_0^L \hat{\sigma}_{12}(\xi) \frac{1}{(x-\xi)} d\xi + 2 \int_0^L \hat{\sigma}_{11}(\xi) \ln \frac{|x-\xi|}{L-\xi} d\xi - 2P \ln \left(\frac{x+a}{L+a} \right) = \\ = (A-B) \left(\hat{\sigma}_{11} + \hat{\sigma}_{22} \right), \end{aligned} \quad (14)$$

где вид плоского состояния определяют постоянные A и B .

К уравнению (14) добавляется условие равенства деформаций ε_{22} вдоль слоя, вычисляемых из выражения (11) и непосредственно из закона Гука (7) или (9). В результате система разрешающих уравнений принимает вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \int_0^L \hat{\sigma}_{12}(\xi) \frac{1}{(x-\xi)} d\xi + 2 \int_0^L \hat{\sigma}_{11}(\xi) \ln \frac{|x-\xi|}{L-\xi} d\xi - 2P \ln \left(\frac{x+a}{L+a} \right) = \\ = (A-B) \left(\hat{\sigma}_{11} + \hat{\sigma}_{22} \right), \\ A \hat{\sigma}_{22} - B \hat{\sigma}_{11} = \int_0^L \hat{\sigma}_{12}(\xi) \frac{1}{(x-\xi)} d\xi, \\ \frac{\partial \hat{\sigma}_{22}}{\partial x} = -2 \hat{\sigma}_{12}. \end{aligned} \right. \quad (15)$$

Основными неизвестными системы (15) являются компоненты тензора напряжения. Так как полагается, что торцевая плоскость начального разреза не нагружена, то:

$$\hat{\sigma}_{22} \Big|_{x=0} = 0. \quad (16)$$

При решении задачи, следуя Новожилову [9], полагаем, что разрушение твердого тела – процесс дискретный, поэтому в пределах элемента слоя взаимодействия длиной δ_0 или единичной безразмерной длины напряженное состояние полагается однородным.

Для построения решения задачи в рамках дискретной модели разобьем границу полуплоскости OL на N единичных элементов. Каждый элемент границы k , с координатами ξ_{k-1}, ξ_k где $k = \overline{1 \dots N}$ характеризуется постоянным (средним по элементу) значением напряжений $\sigma_{11}^{(k)}$, $\sigma_{22}^{(k)}$ и $\sigma_{12}^{(k)}$, определяемым следующим

образом: $\sigma_{ij}^{(k)}(x_{(k)}) = \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} \hat{\sigma}_{ij}(\xi) d\xi$, где $x_{(k)} = (\xi_k + \xi_{k-1})/2$. В результате

интегралы в уравнениях системы (15) предстанут в виде соответствующих сумм. Для дискретизации уравнения равновесия (7) проинтегрируем его по k -ому элементу, в результате получим: $\sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k-1)} = -2\sigma_{21}^{(k)}$. Подчеркнем, что данный подход близок к методу граничного элемента [6] с постоянной аппроксимацией, однако основное отличие данного подхода в том, что разбиение на элементы меньшего размера не имеет смысла. Данный размер, как указано выше, ограничивает материальную область, для которой еще справедлива гипотеза сплошности. Таким образом, дискретное представление интегро-дифференциальной системы (15), дополненное граничным условием (16) примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \sigma_{12}^{(i)}(x_{(i)}) \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \frac{1}{(x_{(i)} - \xi)} d\xi + 2 \sum_{i=1}^n \sigma_{11}^{(i)}(x_{(i)}) \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \ln \frac{|x_{(i)} - \xi|}{L - \xi} d\xi - \\ 2P \ln \left(\frac{x_{(k)} + a}{n + a} \right) = (A - B) \left(\sigma_{11}^{(k)}(x_{(k)}) + \sigma_{22}^{(k)}(x_{(k)}) \right), \quad k = 1, \dots, n; \\ A\sigma_{22}^{(k)}(x_{(k)}) - B\sigma_{11}^{(k)}(x_{(k)}) = \sum_{i=1}^n \sigma_{12}^{(i)}(x_{(i)}) \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \frac{1}{(x_{(i)} - \xi)} d\xi, \quad k = 1, \dots, n; \\ \sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k-1)} = -2\sigma_{21}^{(k)}, \quad k = 1, \dots, n; \\ \sigma_{22}^{(0)} = 0. \end{array} \right. \quad (17)$$

Отметим, что линейная система (17) в общем случае содержит бесконечное количество уравнений ($n \rightarrow \infty$). Однако, как показывают расчеты, для анализа результатов можно ограничиться конечным числом уравнений. Решение системы имеет достаточно хорошую сходимость и при $n = 1000$ результат отличается от расчета для $n = 5000$ менее 1%.

На рис.2 кривые 1, 2 и 3 определяют напряжения $\hat{\sigma}_{11}$, $\hat{\sigma}_{22}$ и $\hat{\sigma}_{33}$ для состояния плоской деформации при следующих характеристиках: $n = 5000$, $P = 1$, $a = 5$, $\nu = 0.25$. Отметим, что при $\nu = 0$ $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$, а для остальных допустимых значений коэффициента Пуассона при плоской деформации имеем: $\sigma_{22} < \sigma_{33}$. Графики 4 и 5 соответствуют напряжениям $\hat{\sigma}_{11}$ и $\hat{\sigma}_{22}$ для плоского напряженного состояния.

2. Постановка и решение задачи упругопластического деформирования слоя (плоское деформирование). При достижении определенного критерия считаем, что материал слоя может переходить в пластическое состояние. Соответствующее поведение будем рассматривать в рамках идеально упругопластической модели [5]. Критерием перехода из упругого состояния в

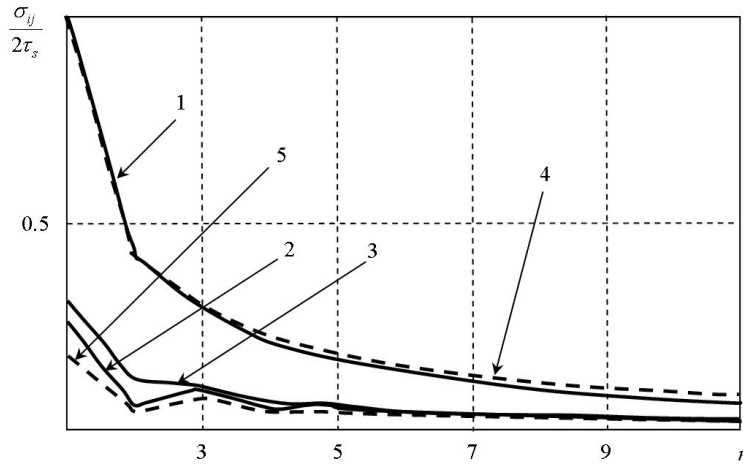


Рис. 2.

пластическое считаем достижением максимальным касательным напряжением критического значения:

$$|\sigma_{ii} - \sigma_{jj}| = 2\tau_s, \quad (18)$$

где $i, j = 1, 2, 3$, τ_s – предел текучести.

В условиях плоского деформирования в зоне предразрушения из решения упругой задачи имеем $\sigma_{11} > \sigma_{33} \geq \sigma_{22}$ (см. рис. 2). Следовательно, критерий текучести Треска (18) для данного вида нагружения определяется следующим выражением:

$$\hat{\sigma}_{11} - \hat{\sigma}_{22} = 2\hat{\tau}_s, \quad (19)$$

где $\hat{\tau}_s = \beta\tau_s$ – безразмерный предел текучести.

Полагая деформации малыми и для стадии упругопластического деформирования справедливым следующее разложение:

$$\varepsilon_{ii} = \varepsilon_{ii}^e + \varepsilon_{ii}^p, \quad i = 1, 2, \quad (20)$$

где ε_{ii}^e – упругая составляющая полной деформации; ε_{ii}^p – пластическая составляющая.

Считаем, что материал пластически несжимаем:

$$\varepsilon_{11}^p + \varepsilon_{22}^p + \varepsilon_{33}^p = 0. \quad (21)$$

В состоянии плоской деформации полагаем, что упругая и пластическая составляющие поперечной деформации нулевые:

$$\varepsilon_{33}^e = 0; \quad \varepsilon_{33}^p = 0. \quad (22)$$

Используя связи закона Гука (6), (7) с учетом (20) – (22) изменение объема представим в виде:

$$\theta(x) = (A - B) \left(\hat{\sigma}_{11} + \hat{\sigma}_{22} \right). \quad (23)$$

Из выражений (13) и (23), условия равновесия элемента слоя (7), условия текучести Треска (19) получим следующую замкнутую систему уравнений, описывающую деформирование пластической области слоя длиной l_p в состоянии плоской деформации:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^L \hat{\sigma}_{12}(\xi) \frac{1}{(x-\xi)} d\xi + 2 \int_0^L \hat{\sigma}_{11}(\xi) \ln \frac{|x-\xi|}{L-\xi} d\xi - 2P \ln \left(\frac{x+a}{L+a} \right) = \\ = (A-B) \left(\hat{\sigma}_{11} + \hat{\sigma}_{22} \right), \\ \frac{\partial \hat{\sigma}_{22}}{\partial x} = -2 \hat{\sigma}_{21}, \\ \hat{\sigma}_{11} - \hat{\sigma}_{22} = 2 \hat{\tau}_s. \end{array} \right. \quad (24)$$

В упругой области, где $x > l_p$ и $\hat{\sigma}_{11} - \hat{\sigma}_{22} < 2\hat{\tau}_s$ НДС описывается системой (15). Основными неизвестными систем (24) и (15) являются компоненты тензора напряжения, а так же длина пластической области при удовлетворении граничного условия (16).

Рассмотрим подход к дискретному решению полученной системы уравнений (24), (15), (16), описывающих упругопластическое деформирование слоя в состоянии плоской деформации. Модель будет состоять из трех подсистем.

1. Уравнения, описывающие пластическую область (дискретный аналог системы 24):

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \sigma_{12}^{(i)}(x_{(i)}) \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \frac{1}{(x_{(i)}-\xi)} d\xi + 2 \sum_{i=1}^n \sigma_{11}^{(i)}(x_{(i)}) \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \ln \frac{|x_{(i)}-\xi|}{n-\xi} d\xi - \\ 2P_{l+1} \ln \left(\frac{x+a}{n+a} \right) = \frac{\pi \left(\hat{\tau}_s + \hat{\sigma}_{22}^{(k)} \right) (1-2\nu)}{(1-\nu)}, \quad k = 1, \dots, l; \\ \sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k-1)} = -2\sigma_{21}^{(k)}, \quad k = 1, \dots, l; \\ \sigma_{11}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k)} = 2 \hat{\tau}_s, \quad k = 1, \dots, l; \\ \sigma_{22}^{(0)} = 0. \end{array} \right. \quad (25)$$

2. Уравнения, описывающие переход $l+1$ элемента из упругого состояния в пластическое (дискретный аналог системы 15 при условии достижения на элементе напряжением предела текучести $\hat{\sigma}_{11} - \hat{\sigma}_{22} = 2\hat{\tau}_s$):

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k)} = 2 \hat{\tau}_s, \quad k = l+1; \\ \sum_{i=1}^n \sigma_{12}^{(i)}(x_{(i)}) \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \frac{1}{(x_{(i)}-\xi)} d\xi + 2 \sum_{i=1}^n \sigma_{11}^{(i)}(x_{(i)}) \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \ln \frac{|x_{(i)}-\xi|}{L-\xi} d\xi - \\ 2P_{l+1} \ln \left(\frac{x+a}{n+a} \right) = \frac{\pi \left(\sigma_{11}^{(k)}(x_{(k)}) + \sigma_{22}^{(k)}(x_{(k)}) \right) (1-2\nu)}{2(1-\nu)}, \quad k = l+1; \\ A\sigma_{22}^{(k)}(x_{(k)}) - B\sigma_{11}^{(k)}(x_{(k)}) = \sum_{i=1}^n \sigma_{12}^{(i)}(x_{(i)}) \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \frac{1}{(x_{(i)}-\xi)} d\xi, \quad k = l+1; \\ \sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k-1)} = -2\sigma_{21}^{(k)}, \quad k = l+1. \end{array} \right. \quad (26)$$

3. Уравнения, описывающие упругую область (дискретный аналог системы (15)):

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \sigma_{12}^{(i)}(x(i)) \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \frac{1}{(x(i)-\xi)} d\xi + 2 \sum_{i=1}^n \sigma_{11}^{(i)}(x(i)) \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \ln \frac{|x(i)-\xi|}{L-\xi} d\xi - \\ 2P_{l+1} \ln \left(\frac{x+a}{n+a} \right) = \frac{\pi(\sigma_{11}^{(k)}(x(k)) + \sigma_{22}^{(k)}(x(k)))(1-2\nu)}{2(1-\nu)}, \quad k = l + 2, \dots, n; \\ A\sigma_{22}^{(k)}(x(k)) - B\sigma_{11}^{(k)}(x(k)) = \sum_{i=1}^n \sigma_{12}^{(i)}(x(i)) \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \frac{1}{(x(i)-\xi)} d\xi, \quad k = l + 2, \dots, n; \\ \sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k-1)} = -2\sigma_{21}^{(k)}, \quad k = l + 2, \dots, n. \end{array} \right. \quad (27)$$

Полная система дискретного деформирования, состоящая из подсистем (25)-(27), содержит $3n + 1$ линейное уравнение. Неизвестными являются $3n$ обобщенных напряжений и критическая сила P_{l+1} , обеспечивающая данное напряженное состояние. Решать поставленную задачу предлагается пошагово, определяя на каждом этапе критическую силу и напряженно-деформированное состояние слоя, соответствующее достижению критерия текучести на $l + 1$ элементе.

На рис. 3 показана зависимость распределения напряжений, отнесенных к пределу текучести, по элементам при достижении предела текучести на втором элементе (нагрузка P_2). Кривая 1 определяет напряжение σ_{11} , кривая 2 - соответственно σ_{22} при $2\tau_s/E = 3 \cdot 10^{-3}$. Из приведенной зависимости видно, что напряжения в пластически деформируемом элементе при плоской деформации могут существенно превышать предел текучести, на что указывалось и в работе [10]. Это объясняется существенной величиной гидростатической составляющей напряжения.

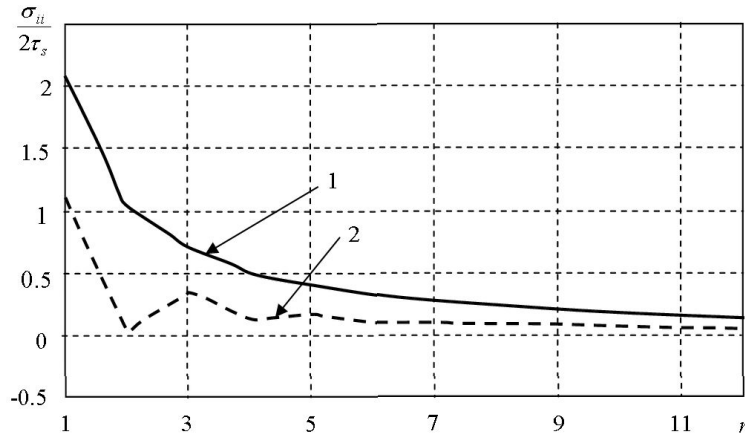


Рис. 3.

3. Упругопластическое деформирование слоя (плоское напряженное состояние).

В условиях плоского напряженного состояния в зоне предразрушения из решения упругой задачи имеем $\sigma_{11} > \sigma_{22} \geq \sigma_{33} = 0$ (см. рис. 2). Следовательно, критерий текучести Треска (18) для данной схемы нагружения определяется следующим выражением:

$$\hat{\sigma}_{11} = 2\hat{\tau}_s, \quad (28)$$

где $\hat{\tau}_s = \beta\tau_s$ – безразмерный предел текучести.

Запишем соотношения для приращений девиаторов напряжений в виде:

$$\begin{aligned} d\sigma'_{11} &= d\sigma_{11} - \frac{1}{3}(d\sigma_{11} + d\sigma_{22} + d\sigma_{33}), \\ d\sigma'_{33} &= d\sigma_{33} - \frac{1}{3}(d\sigma_{11} + d\sigma_{22} + d\sigma_{33}). \end{aligned} \quad (29)$$

С учетом плоского напряженного состояния и условия (28) из соотношений (13) и (7) следует:

$$d\sigma'_{11} = d\sigma'_{33} = -\frac{1}{3}d\sigma_{22}. \quad (30)$$

Рассмотрим связь приращений векторов девиаторов напряжений и деформаций [4]:

$$\Delta \vec{\sigma}' = N\Delta \vec{\varepsilon}' + (P - N) \frac{\vec{\sigma} \cdot \Delta \vec{\varepsilon}'}{\sigma^2} \vec{\sigma}, \quad (31)$$

где N и P – соответствующие функционалы.

Рассмотрим случай $P = N$, имеем:

$$\Delta \vec{\sigma}' = N\Delta \vec{\varepsilon}'. \quad (32)$$

Из (32) получим следующее соотношение:

$$\frac{\Delta \sigma'_{11}}{\Delta \sigma'_{33}} = \frac{\Delta \varepsilon'_{11}}{\Delta \varepsilon'_{33}}, \quad (33)$$

которое справедливо для любого N , в том числе и для модели идеально упругопластического течения.

Принимая во внимание (30), из (33) получим:

$$d\varepsilon_{11} = d\varepsilon_{33}. \quad (34)$$

Таким образом, из (34) приходим к следующему соотношению между полными и упругими деформациями:

$$\varepsilon_{33}(x) = \varepsilon_{11}(x) - (\varepsilon_{11}^e - \varepsilon_{33}^e). \quad (35)$$

В результате система интегро-дифференциальных уравнений (7), (13) и (28), с учетом (12) и (35), становится замкнутой и принимает следующий вид:

$$\left\{ \begin{aligned} &\int_0^L \hat{\sigma}_{12}(\xi) \frac{1}{(x-\xi)} d\xi + 4 \int_0^L \hat{\sigma}_{11}(\xi) \ln \frac{|x-\xi|}{L-\xi} d\xi - 4 \hat{P} \ln \left(\frac{x+a}{L+a} \right) = \\ &= \frac{\pi(1-2\nu)}{2} \left(2 \hat{\tau}_s + \hat{\sigma}_{22}(x) \right) + (\varepsilon_{11}^e - \varepsilon_{33}^e), \\ &\frac{\partial \hat{\sigma}_{22}}{\partial x} = -2 \hat{\sigma}_{21}, \\ &\hat{\sigma}_{11} = 2 \hat{\tau}_s. \end{aligned} \right. \quad (36)$$

Для области упругого деформирования слоя, где $x > l_p$ и $\hat{\sigma}_{11} < 2\hat{\tau}_s$ НДС определяется из системы (15). Основными неизвестными систем (15) и (36) являются

компоненты тензора напряжения, а так же длина пластической области при удовлетворении граничному условию (16).

Рассмотрим построение дискретной модели упругопластического деформирования слоя взаимодействия в условиях плоского напряженного состояния.

На первом шаге определим начало пластического деформирования слоя взаимодействия, а именно переход первого элемента слоя взаимодействия из упругого состояния в пластическое при выполнении критерия (28).

Разрешающая система интегро-дифференциальных уравнений (36) преобразуется к виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\sigma}_{11} = 2\hat{\tau}_s, \quad x = 0; \\ \int_0^L \hat{\sigma}_{12}(\xi) \frac{1}{(x-\xi)} d\xi - 2\hat{P}_{(k)} \ln \frac{x+a}{L+a} + 2 \int_0^L \hat{\sigma}_{11}(\xi) \ln \frac{|x-\xi|}{L-\xi} d\xi = \\ = \frac{1}{2}\pi(1-\nu)(\sigma_{11}(x) + \sigma_{22}(x)), \quad x \geq 0; \\ A\hat{\sigma}_{22} - B\hat{\sigma}_{11} = \int_0^L \hat{\sigma}_{12}(\xi) \frac{1}{(x-\xi)} d\xi, \quad x \geq 0; \\ \frac{\partial \hat{\sigma}_{22}}{\partial x} = -2\hat{\sigma}_{12}, \quad x \geq 0. \end{array} \right. \quad (37)$$

Перепишем систему (37) в дискретном виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11}^{(k)} = 2\hat{\tau}_s, \quad k = 1; \\ 2 \sum_{i=0}^{i=n-1} \sigma_{11}^{(i)} \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \ln \frac{|x_k-\xi|}{L-\xi} d\xi - 0.5\pi(1-2\nu)\sigma_{11}^{(k)} + \sum_{i=0}^{i=n-1} \sigma_{12}^{(i)} \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \frac{1}{x_i-\xi} d\xi - \\ - 0.5\pi(1-\nu)\sigma_{22}^{(k)} - 2\hat{P}_{(k)} \ln \frac{x_k+a}{n+a} = 0, \quad 1 \leq k \leq n; \\ B\sigma_{11}^{(k)} + \sum_{i=0}^{i=n-1} \sigma_{12}^{(i)} \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \frac{1}{x_i-\xi} d\xi - A\sigma_{22}^{(k)} = 0, \quad 1 \leq k \leq n; \\ \sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k-1)} = -2\sigma_{21}^{(k)}, \quad 1 \leq k \leq n. \end{array} \right. \quad (38)$$

Решением системы (38), наряду с полем напряжений, будет и величина критической нагрузки $\hat{P}_{(k)}$, при которой первый элемент переходит в пластическое состояние. Соответствующее распределение напряженного состояния показано на рис. 4 ($n = 5000$). Кривая 1 определяет распределение напряжений σ_{11} , кривая 2 – распределение напряжений σ_{22} , кривая 3 – распределение напряжений σ_{33} .

На втором шаге найдем поле напряжений и величину критической нагрузки $\hat{P}_{(k)}$, соответствующей переходу второго элемента в пластическое состояние при пластическом деформировании первого.

Система уравнений, описывающая пластическую область:

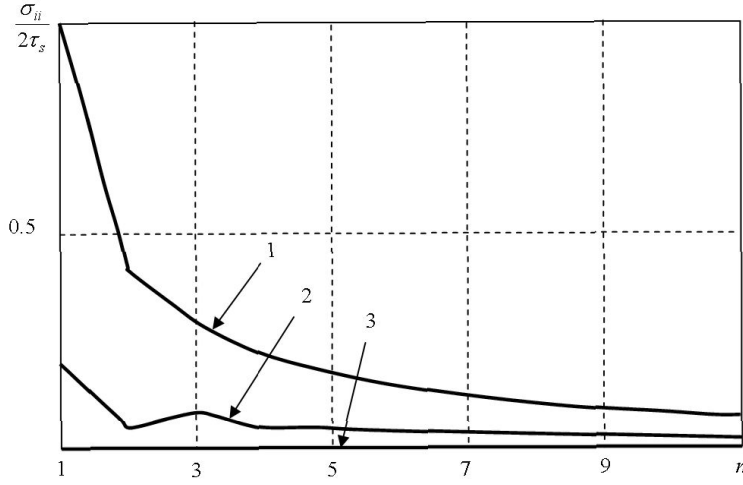


Рис. 4.

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^L \hat{\sigma}_{12}(\xi) \frac{1}{(x-\xi)} d\xi + 4 \int_0^L \hat{\sigma}_{11}(\xi) \ln \frac{|x-\xi|}{L-\xi} d\xi - 4 P_{(k)}^{\wedge 2} \ln \left(\frac{x+a}{L+a} \right) = \\ = \frac{\pi(2\hat{\tau}_s + \hat{\sigma}_{22})(1-2\nu)}{2} + (\varepsilon_{11}^e - \varepsilon_{33}^e), \quad x < l_p; \\ \frac{\partial \hat{\sigma}_{22}}{\partial x} = -2 \hat{\sigma}_{21}, \quad x < l_p; \\ \hat{\sigma}_{11} = 2 \hat{\tau}_s, \quad x < l_p. \end{array} \right. \quad (39)$$

Уравнения, описывающие переход второго элемента из упругого в пластическое состояние:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \hat{\sigma}_{22}}{\partial x} = -2 \hat{\sigma}_{21}, \quad x = l_p; \\ \hat{\sigma}_{11} = 2 \hat{\tau}_s, \quad x = l_p; \\ \int_0^L \hat{\sigma}_{12}(\xi) \frac{1}{(x-\xi)} d\xi - 2 P_{(k)}^{\wedge 2} \ln \frac{x+a}{L+a} + 2 \int_0^L \hat{\sigma}_{11}(\xi) \ln \frac{|x-\xi|}{L-\xi} d\xi = \\ = \frac{1}{2} \pi(1-\nu)(\sigma_{11}(x) + \sigma_{22}(x)), \quad x = l_p; \\ A \hat{\sigma}_{22} - B \hat{\sigma}_{11} = \int_0^L \hat{\sigma}_{12}(\xi) \frac{1}{(x-\xi)} d\xi, \quad x = l_p. \end{array} \right. \quad (40)$$

Уравнения, описывающие упругую область:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \hat{\sigma}_{22}}{\partial x} = -2 \hat{\sigma}_{21}, \quad x \geq l_p; \\ \int_0^L \hat{\sigma}_{12}(\xi) \frac{1}{(x-\xi)} d\xi - 2 P_{(k)}^{\wedge 2} \ln \frac{x+a}{L+a} + 2 \int_0^L \hat{\sigma}_{11}(\xi) \ln \frac{|x-\xi|}{L-\xi} d\xi = \\ = \frac{1}{2} \pi(1-\nu)(\sigma_{11}(x) + \sigma_{22}(x)), \quad x \geq l_p; \\ A \hat{\sigma}_{22} - B \hat{\sigma}_{11} = \int_0^L \hat{\sigma}_{12}(\xi) \frac{1}{(x-\xi)} d\xi, \quad x \geq l_p. \end{array} \right. \quad (41)$$

Введем обозначения:

$$\int_0^L \hat{\sigma}_{11}(\xi) \ln \frac{|x-\xi|}{L-\xi} d\xi = \sum_{i=0}^{i=n-1} \sigma_{11}^{(i)} \left[\int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \ln |x-\xi| d\xi - \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \ln (L-\xi) d\xi \right] = \sum_{i=0}^{i=n-1} \sigma_{11}^{(i)} \varphi^{(i)}(x), \quad (42)$$

$$\int_0^L \hat{\sigma}_{12}(\xi) \frac{1}{x-\xi} d\xi = \int_0^L \hat{\sigma}_{12} \frac{1}{x-\xi} d\xi = \sum_{i=0}^{i=n-1} \psi^{(i)}(x) \sigma_{12}^{(i)}, \quad (43)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi^{(i)}(x) &= (x_j - \xi_i) \ln |x_j - \xi_i| - (x_j - \xi_{i+1}) \ln |x_j - \xi_{i+1}| - \\ &\quad - (n - \xi_i) \ln |n - \xi_i| + (n - \xi_{i+1}) \ln |n - \xi_{i+1}|, \\ \psi^{(i)}(x) &= -\ln \left| \frac{x_j - \xi_{i+1}}{x_j - \xi_i} \right|. \end{aligned} \quad (44)$$

Подставив (42), (43) и (44) в (39)–(41) получим соответственно:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{i=n-1} \psi^{(i)}(x) \sigma_{12}^{(i)} + 4 \sum_{i=0}^{i=n-1} \sigma_{11}^{(i)} \varphi^{(i)}(x) - \frac{\pi \sigma_{22}^{(k)} (1-2\nu)}{2} - 4 P_{(k)}^{\wedge 2} \ln \left(\frac{x_k+a}{n+a} \right) = \\ = \pi \tau_s (1-\nu) + (\varepsilon_{11}^e - \varepsilon_{33}^e), \quad k=1; \\ \sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k-1)} = -2\sigma_{21}^{(k)}, \quad k=1; \\ \sigma_{11}^{(k)} = 2\tau_s, \quad k=1; \\ \sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k-1)} = -2\sigma_{21}^{(k)}, \quad k=2; \\ \sigma_{11}^{(k)} = 2\tau_s, \quad k=2; \\ 2 \sum_{i=0}^{i=n-1} \sigma_{11}^{(i)} \varphi^{(i)}(x) - 0.5\pi(1-\nu)\sigma_{11}^{(k)} + \sum_{i=0}^{i=n-1} \psi^{(i)}(x) \sigma_{12}^{(i)} - \\ - 0.5\pi(1-\nu)\sigma_{22}^{(k)} - 2P_{(k)}^{\wedge 2} \ln \frac{x_k+a}{n+a} = 0, \quad k=2; \\ B\sigma_{11}^{(k)} + \sum_{i=0}^{i=n-1} \psi^{(i)}(x) \sigma_{12}^{(i)} - A\sigma_{22}^{(k)} = 0, \quad k=2; \\ \sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k-1)} = -2\sigma_{21}^{(k)}, \quad k=3, \dots, n; \\ 2 \sum_{i=0}^{i=n-1} \sigma_{11}^{(i)} \varphi^{(i)}(x) - 0.5\pi(1-\nu)\sigma_{11}^{(k)} + \sum_{i=0}^{i=n-1} \psi^{(i)}(x) \sigma_{12}^{(i)} - \\ - 0.5\pi(1-\nu)\sigma_{22}^{(k)} - 2P_{(k)}^{\wedge 2} \ln \frac{x_k+a}{n+a} = 0, \quad k=3, \dots, n; \\ B\sigma_{11}^{(k)} + \sum_{i=0}^{i=n-1} \psi^{(i)}(x) \sigma_{12}^{(i)} - A\sigma_{22}^{(k)} = 0, \quad k=3, \dots, n. \end{cases}$$

На рис. 5 представлено распределение поля напряжений на первых 11 элементах $n = 5000$). Кривая 1 соответствует распределению напряжений σ_{11} , кривая 2 – описывает распределение напряжений σ_{22} .

Из графика видно, что на первом элементе $\sigma_{11} < \sigma_{22}$. Таким образом, при переходе от первого шага ко второму напряжению σ_{22} , в рамках критерия (10), меняется от $0.2 \hat{\tau}_s$

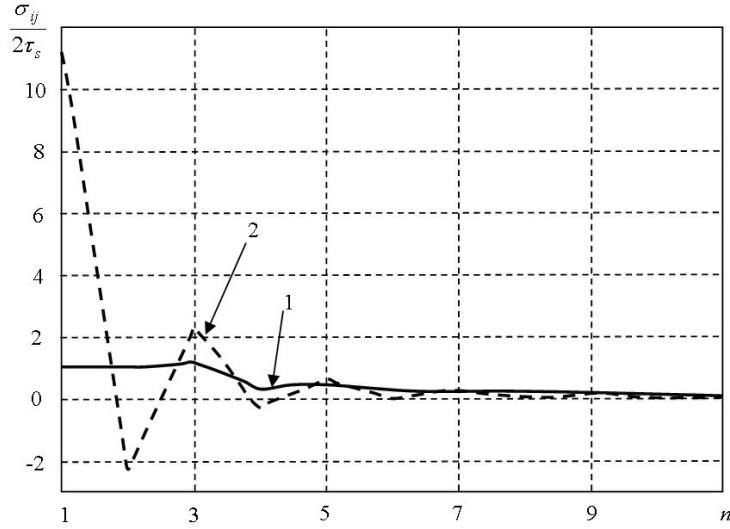


Рис. 5.

до $2\hat{\tau}_s$. Следовательно, в данном переходе должно выполняться равенство: $\sigma_{22} = 2\hat{\tau}_s$. Это соответствует смене условия (10) на соотношение полной пластичности [3,5]:

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = 2\hat{\tau}_s, \quad (45)$$

где $\hat{\tau}_s = \beta\tau_s$ – соответствующий безразмерный предел текучести данного вида плоского состояния.

С учетом уравнения равновесия (7) из (45) получаем, что по границе со слоем в пластической области касательные напряжения равны нулю $\hat{\sigma}_{12} = 0$. И, следовательно, для области пластического течения слоя имеем:

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_{11} = 2\hat{\tau}_s, \\ \hat{\sigma}_{22} = 2\hat{\tau}_s, \\ \hat{\sigma}_{12} = 0. \end{cases} \quad (46)$$

В упругой области, где $x > l_p$ и $\hat{\sigma}_{11} < 2\hat{\tau}_s$ к системе (46) добавляется система (15). Основными неизвестными систем (46) и (15), как и в случае плоского деформированного состояния, являются компоненты тензора напряжения, а так же длина пластической области.

При определении напряженного состояния слоя по выражениям (8)-(10) могут быть найдены соответствующие упругие деформации слоя. В пластической области, в силу однородности напряженного состояния (46), деформации будут постоянны по всей длине пластической зоны и равны деформациям на момент перехода из упругого состояния слоя в пластическое.

Дискретная модель будет состоять из трех подсистем.

1. Уравнения, описывающие пластическую область (дискретный аналог системы (46)):

$$\begin{cases} \sigma_{11}^{(k)} = 2 \hat{\tau}_s, & k = 1, \dots, l; \\ \sigma_{22}^{(k)} = 2 \hat{\tau}_s, & k = 1, \dots, l; \\ \sigma_{21}^{(k)} = 0, & k = 1, \dots, l. \end{cases}$$

2. Уравнения, описывающие переход $l + 1$ элемента из упругого состояния в пластическое (дискретный аналог системы (15) и условие достижения на элементе напряжением $\hat{\sigma}_{11}$ предела текучести):

$$\begin{cases} \sigma_{11}^{(k)} = 2 \hat{\tau}_s, & k = l + 1; \\ \sum_{i=1}^n \sigma_{12}^{(i)}(x_{(i)}) \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \frac{1}{(x_{(i)} - \xi)} d\xi + 2 \sum_{i=1}^n \sigma_{11}^{(i)}(x_{(i)}) \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \ln \frac{|x_{(i)} - \xi|}{L - \xi} d\xi - \\ \quad - 2P_{l+1} \ln \left(\frac{x+a}{n+a} \right) = \frac{\pi(\sigma_{11}^{(k)}(x_{(k)}) + \sigma_{22}^{(k)}(x_{(k)}))^{(1-\nu)}}{2}, & k = l + 1; \\ A\sigma_{22}^{(k)}(x_{(k)}) - B\sigma_{11}^{(k)}(x_{(k)}) = \sum_{i=1}^n \sigma_{12}^{(i)}(x_{(i)}) \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \frac{1}{(x_{(i)} - \xi)} d\xi, & k = l + 1; \\ \sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k-1)} = -2\sigma_{21}^{(k)}, & k = l + 1. \end{cases}$$

3. Уравнения, описывающие упругую область (дискретный аналог системы (15)):

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \sigma_{12}^{(i)}(x_{(i)}) \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \frac{1}{(x_{(i)} - \xi)} d\xi + 2 \sum_{i=1}^n \sigma_{11}^{(i)}(x_{(i)}) \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \ln \frac{|x_{(i)} - \xi|}{L - \xi} d\xi - \\ \quad - 2P_{l+1} \ln \left(\frac{x+a}{n+a} \right) = \frac{\pi(\sigma_{11}^{(k)}(x_{(k)}) + \sigma_{22}^{(k)}(x_{(k)}))^{(1-\nu)}}{2}, & k = l + 2, \dots, n; \\ A\sigma_{22}^{(k)}(x_{(k)}) - B\sigma_{11}^{(k)}(x_{(k)}) = \sum_{i=1}^n \sigma_{12}^{(i)}(x_{(i)}) \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \frac{1}{(x_{(i)} - \xi)} d\xi, & k = l + 2, \dots, n; \\ \sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k-1)} = -2\sigma_{21}^{(k)}, & k = l + 2, \dots, n. \end{cases}$$

Рис. 6 отображает распределение напряжений, отнесенных к пределу текучести, по элементам при переходе третьего элемента в пластическое состояние (нагрузка P_3) для плоского напряженного состояния. Кривая 1 определяет напряжение σ_{11} , кривая 2 соответственно σ_{22} при $2\tau_s/E = 3 \cdot 10^{-3}$.

На рис. 7 показана зависимость длины пластической зоны от приложенной нагрузки. График 1 соответствует плоскому напряженному состоянию, график 2 построен для состояния плоской деформации. Сила P_1 определяет достижение критерия текучести на первом элементе.

В заключении сформулируем выводы по работе.

1. Модель трещиноподобного дефекта в виде физического разреза позволила описать развитие зоны предразрушения в пределах слоя конечной толщины в рамках упругопластической модели. В этом случае, напряженное состояние слоя, а также длина его пластической области получается из решения соответствующих краевых задач, которые показали существенную разницу напряженного состояния и длины пластической зоны от вида плоской задачи.

2. Учет напряжений, действующих ортогонально отрыву (в данной работе σ_{22}) в слое конечной толщины, определил принципиальное различие в характере пластического течения. В состоянии плоского деформирования при упругом

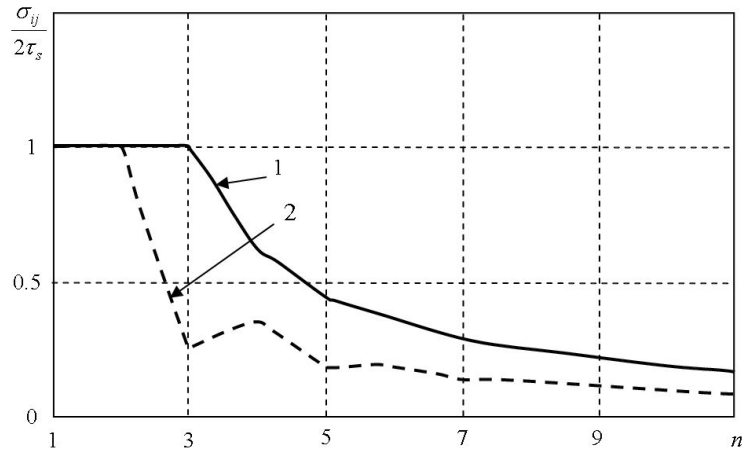


Рис. 6.

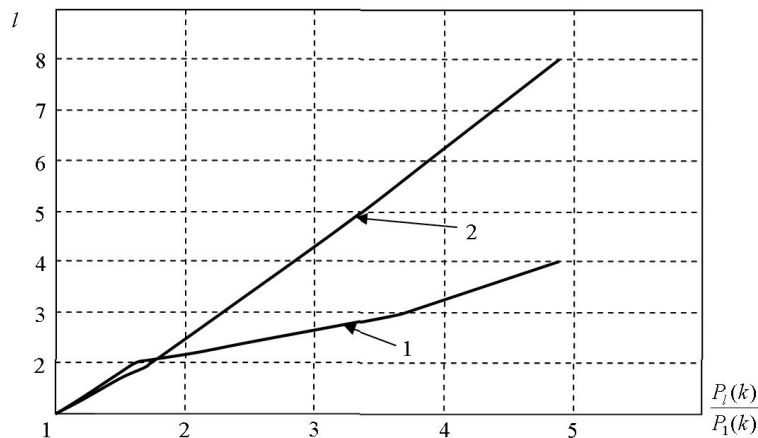


Рис. 7.

нагрузении $\sigma_{11} > \sigma_{33} \geq \sigma_{22}$. Переход в пластическое деформирование по максимальному касательному напряжению определяется равенством: $\sigma_{11} - \sigma_{22} = 2\tau_s$, что при решении приводит к превышению напряжений в окрестности вершины разреза над пределом текучести. Для плоского напряженного состояния при упругом деформировании $\sigma_{11} > \sigma_{22} \geq \sigma_{33} = 0$. Критерий Треска запишется в виде: $\sigma_{11} = 2\tau_s$. В этом случае напряжения в зоне пластического течения не превосходят предел текучести. Если толщину слоя считать нулевой, что соответствует модельному представлению трещиноподобного дефекта в виде математического разреза, то при упругом деформировании из асимптотических представлений линейной теории упругости получим: $\sigma_{11} = \sigma_{22}$ как при плоском деформировании, так и в плоском напряженном состоянии. Это предполагает один и тот же механизм пластического течения, реализуемый для плоского напряженного состояния.

3. С использованием соотношений теории течения и поставлена и решена связанная упругопластическая задача о развитии тонкой пластической зоны в окрестности трещиноподобного дефекта для плоского деформирования и случая плоского напряженного состояния.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Глаголев, В. В.* Определение термомеханических характеристик процесса разделения / В. В. Глаголев, А. А. Маркин // Известия РАН. Механика твердого тела. – № 6. – 2007. – С. 101-112.
- [2] *Гаврилкина, М. В.* К решению одной задачи механики разрушения / М. В. Гаврилкина, В. В. Глаголев, А. А. Маркин // ПМТФ. – № 4. – 2007. – С. 121-127.
- [3] *Ивлев, Д. Д.* О выводе соотношений, определяющих пластическое течение при условии полной пластичности / Д. Д. Ивлев // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1959. – № 3. – С. 137.
- [4] *Ильюшин, А. А.* Механика сплошной среды / А. А. Ильюшин. – М. : Изд-во МГУ, 1990. – 310 с.
- [5] *Ишлинский, А. Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 701 с.
- [6] *Крауч, С.* Методы граничных элементов в механике твердого тела : пер. с. англ. / Крауч С., Старфилд А. – М. : Мир, 1987. – 328 с.
- [7] *Леонов, М. Я.* Развитие мельчайших трещин в твердом теле / М. Я. Леонов, В. В. Панасюк // Прикладная механика. – 1959. – Т. 5. – № 4. – С. 391-401.
- [8] *Лурье, А. И.* Теория упругости / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1970. – 939 с.
- [9] *Новожилов, В. В.* О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности / В. В. Новожилов // ПММ. – 1969. – № 2. – С. 212-222.
- [10] *Нотт, Д. Ф.* Основы механики разрушения / Д. Ф. Нотт. – М. : Металлургия, 1978. – 256 с.
- [11] *Dugdale, D. S.* Yielding of steel sheets containing slits / D. S. Dugdale // J. Mech. and Phys. Solids. – 1960. – V. 8. – № 2. – P. 100-108.
- [12] *Irvin, G. R.* Linear fracture mechanics, fracture transition, and fracture control / G. R. Irvin // Engn. Fracture Mechanics. – 1968. – V. 1. – P. 241-257.

ABOUT ONE REPRESENTATION OF THE PROBLEM OF DAGDAYL

Tula state university

Abstract. Description of plastic deformation in the context of flow theory is a classic way of mechanics of continua. But a solution of the problems is found in the context of a hard plastic model when it's ignored elastic deformation as compared with plastic. Target connected elastoplastic settings mate vagueness of tensions and deformations for the field of plastic deformation. However in various cases this problem is avoid. In the article is investigated the important problem of mechanics of destruction which consists of modeling of behavior plastic thin zone depending on the view of plane problem. In the classic way [7,11] thin plastic zone associate with an influence of cohesion force of constant activity, which don't connect with change from elastic to plastic condition. In the article plastic field is applied to deformable solid and its condition is rote in the context of the expression mechanics of continua. In the article – is obtained of principle difference tensy in the apex of a split from view plane problem.

Keywords: character dimension, boundary integral equation, linear elasticity, ideally elastic-plastic model

Глаголев Вадим Вадимович

доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры "Математическое моделирование" Тульского государственного университета 300600, г. Тула, пр. Ленина 92, ТулГУ

e-mail: vadim@tsu.tula.ru

Мерцалова Татьяна Анатольевна

аспирант кафедры "Математическое моделирование" Тульского государственного университета 300600, г. Тула, пр. Ленина 92, ТулГУ

e-mail: tania@tula.ru

Glagolev Vadim Vadimovich

doctor of sciences, senior lecturer, professor of chair "Mathematical modelling" of the Tula state university 300600, Tula, Lenin's 92 avenue

Mertsalova Tatyana Anatolevna

post-graduate student of chair "Mathematical modelling" of the Tula state university 300600, Tula, Lenin's 92 avenue