

А. В. Горский, П. В. Горский

## О ВДАВЛИВАНИИ ПЛОСКОГО КРУГОВОГО В ПЛАНЕ ШТАМПА В ИДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО С УЧЕТОМ КРУТЯЩИХ УСИЛИЙ

*Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева*

**Аннотация.** Рассмотрена осесимметричная задача о вдавливании плоского кругового в плане штампа в идеальное жесткопластическое полупространство при действии крутящих усилий. Показано, что существует зависимость между величиной центральной жесткой области и характером крутящих усилий. Приведены условия отсутствия центральной жесткой области.

**Ключевые слова:** пластичность, условие полной пластичности, жесткопластическое полупространство, осесимметричный, закручивающие усилия, вдавливание, плоский круговой в плане штамп, центральная жесткая область.

УДК: 539.374

Рассматривается общая осесимметричная задача о вдавливании плоского кругового в плане штампа в идеальное жесткопластическое полупространство при действии радиальных и окружных контактных касательных напряжений  $\tau_{rz}, \tau_{r\theta}, \tau_{\theta z} \neq 0$ . В [1,2] приведены решения задачи о начальном пластическом течении идеально пластического полупространства при вдавливании гладкого плоского и сферического штампов. В [3] приведено численное решение задачи о давлении плоского круглого в плане штампа на идеально пластическое полупространство с учетом контактного трения ( $\tau_{rz} \neq 0, \tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = 0$ ), моделируемого по Прандтлю и Кулону, изменяющегося от нуля до предельного значения, при котором центральная жесткая область распространяется по всей контактной границе штампа. Согласно [1] при  $\tau_{rz} \neq 0, \tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = 0$  под штампом образуется центральная жесткая область, которая растет с увеличением контактного трения.

Ниже рассматривается задача о вдавливании кругового в плане штампа в идеальное жесткопластическое полупространство при условии полной пластичности, контактное трение моделируется по Прандтлю. Добавление крутящих усилий при вдавливании плоского круглого штампа ( $\tau_{\theta z} \neq 0$ ) приводит к уменьшению величины центральной жесткой области под штампом. Центральная жесткая область уменьшается с ростом угла  $\alpha$ , где  $\operatorname{tg} \alpha = \tau_{\theta z} / \tau_{rz}$ , и исчезает, начиная с некоторого значения угла  $\alpha$ . Приводятся численное решение и графики зависимости минимального значения угла  $\alpha$  от контактного напряжения  $\tau = \sqrt{\tau_{rz}^2 + \tau_{\theta z}^2}$ , при котором центральная жесткая область будет отсутствовать.

### 1. Основные уравнения

---

Поступила 10.05.2008

Рассмотрим задачу о начальном пластическом течении при давлении с кручением плоского круглого в плане штампа на несжимаемое идеально пластическое полупространство по нормали к его границе с учетом радиальных и окружных контактных касательных напряжений фиг. 1. Введем цилиндрическую систему координат  $\{\rho, \theta, z\}$ , начало поместим в центр штампа  $O$ . За единицу длины примем радиус штампа  $R$ , за единицу напряжения – предел текучести при одноосном сжатии  $2k = 1$ , за единицу скорости – скорость вдавливания штампа по нормали к границе полупространства  $W$ .

Согласно [1, 2] задача решается при условии полной пластичности. В рассматриваемой задаче радиальная скорость пластического течения положительна, следовательно, условие полной пластичности имеет вид:

$$\sigma_2 = \sigma_3, \quad \sigma_3 = \sigma_1 + 1, \quad (1)$$

где  $\sigma_i$ - компоненты главных напряжений, для  $\sigma_i$  выполняется  $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3$ . Направления главных напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  лежат на плоскости  $\{r, z\}$ .

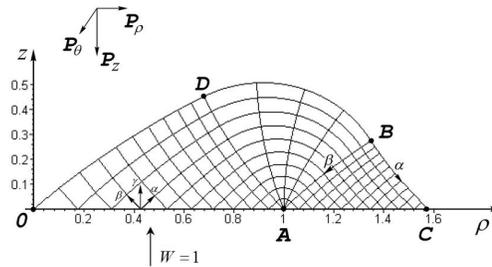


Рис. 1.

Компоненты напряжений  $\sigma_\rho, \tau_{\rho\theta}, \dots$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= \sigma + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}(1 + \cos \psi) \cos^2 \xi, & \tau_{\rho\theta} &= -\frac{1}{2} \sin \psi \cos \xi, \\ \sigma_\theta &= \sigma + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}(1 - \cos \psi), & \tau_{\rho z} &= -\frac{1}{2}(1 + \cos \psi) \sin \xi \cos \xi, \\ \sigma_z &= \sigma + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}(1 + \cos \psi) \sin^2 \xi, & \tau_{\theta z} &= -\frac{1}{2} \sin \psi \sin \xi, \\ \sigma &= \frac{1}{3}(\sigma_\rho + \sigma_\theta + \sigma_z). \end{aligned} \quad (2)$$

Среднее напряжение  $\sigma$  при условии пластичности (1) имеет вид

$$\sigma = \sigma_2 - \frac{1}{3}. \quad (3)$$

Из (2) имеем:

$$(\sigma_\rho - \sigma_z)^2 + 4\tau_{\rho z}^2 = \frac{1}{4}(1 + \cos \psi)^2.$$

Предположим, что имеет место общая осесимметричная задача. Согласно [5, 6]:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\rho, z), \quad \xi = \xi(\rho, z), \quad \psi = \psi(\rho, z). \quad (4)$$

Уравнения равновесия имеют вид:

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z} + R_1 = 0, \quad \frac{\partial \tau_{\rho \theta}}{\partial \rho} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + R_3 = 0, \quad \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + R_2 = 0, \quad (5)$$

где  $R_1, R_2, R_3$  определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = -\frac{1}{2\rho} [(1 + \cos \psi) \cos^2 \xi - (1 - \cos \psi)], \\ R_2 &= \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} = -\frac{(1 + \cos \psi) \sin \xi \cos \xi}{2\rho}, \\ R_3 &= \frac{2\tau_{\rho \theta}}{\rho} = -\frac{\sin \psi \cos \xi}{\rho}. \end{aligned} \quad (6)$$

Компоненты скоростей деформации связаны с компонентами скоростей перемещений  $u, v, w$  формулами Коши:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\rho &= \frac{\partial u}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{\rho}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_{\rho\theta} = \frac{1}{2} \left[ \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{v}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right], \\ \varepsilon_{\theta z} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \varepsilon_{\rho z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \rho} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Поле скоростей перемещений должно удовлетворять условию несжимаемости:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{\rho} = 0, \quad (8)$$

и условиям изотропии:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) \left( \frac{n_3^2 - n_1^2}{2n_1 n_3} \right) - \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{n_2}{2n_1} - \frac{\partial v}{\partial z} \frac{n_2}{2n_3} - \frac{n_2}{2\rho n_1} v = 0, \\ -\frac{\partial u}{\partial \rho} - \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) \frac{n_3}{2n_1} + \frac{\partial v}{\partial \rho} \left( \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1 n_2} \right) + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{n_3}{2n_2} + \frac{u}{\rho} + \frac{n_2^2 - n_1^2}{2\rho n_1 n_2} v = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Обозначим

$$S_1 = \frac{u}{\rho}, \quad S_2 = -\frac{n_2}{2\rho n_1} v, \quad S_3 = \frac{u}{\rho} + \frac{n_2^2 - n_1^2}{2\rho n_1 n_2} v, \quad (10)$$

где  $n_1, n_2, n_3$  – направляющие косинусы главного напряжения  $\sigma_1$  определяются соотношениями:

$$n_1 = \cos \frac{\psi}{2} \cos \xi, \quad n_2 = \sin \frac{\psi}{2}, \quad n_3 = \cos \frac{\psi}{2} \sin \xi. \quad (11)$$

При условии полной пластичности (1) уравнения равновесия (5), (6) и условия несжимаемости (8) и изотропии (9) для скоростей перемещений приводят к уравнениям гиперболического типа [5, 7] с тремя характеристиками, совпадающими с линиями скольжения  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  на плоскости  $\{r, z\}$ :

$$\left( \frac{dz}{d\rho} \right)_{\alpha, \beta} = \operatorname{tg} \left[ \xi \mp \left( \frac{\pi}{4} + \mu \right) \right], \quad \operatorname{tg} 2\mu = \frac{1 - \cos \psi}{2\sqrt{\cos \psi}}, \quad (12)$$

$$\left( \frac{dz}{d\rho} \right)_\gamma = \operatorname{tg} \xi. \quad (13)$$

Дифференциальные соотношения вдоль линий скольжения (12), (13) для среднего напряжения  $\sigma$  и углов  $\xi$  и  $\psi$  имеют вид:

$$d\sigma \pm \frac{1}{2} \frac{1 + \cos \psi}{\sqrt{\cos \psi}} d\xi + \left( R_1 + R_2 \left( \frac{dz}{d\rho} \right)_{\alpha, \beta} + \frac{\sin \psi}{C_{\alpha, \beta} \sqrt{\cos \psi}} R_3 \right) d\rho = 0, \quad \text{вдоль } \alpha, \beta \quad (14)$$

и

$$d\sigma + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\psi}{2} d\psi + \left( R_1 + R_2 \left( \frac{dz}{d\rho} \right)_{\gamma} - \frac{\operatorname{ctg} \frac{\psi}{2}}{\cos \xi} R_3 \right) d\rho = 0, \quad \text{вдоль } \gamma, \quad (15)$$

где  $C_{\alpha,\beta} = \cos \xi \sqrt{\cos \psi} \pm \sin \xi$  и  $R_1, R_2, R_3$  определяются соотношениями (6).

Дифференциальные соотношения вдоль линий скольжения (12), (13) для скоростей перемещений  $u, v, w$  имеют вид:

$$\begin{aligned} du + \left( \frac{dz}{d\rho} \right)_{\alpha,\beta,\gamma} dw + f_{\alpha,\beta,\gamma} dv + \frac{1}{1-\sin^2 \frac{\xi}{2}} \left[ (S_1 + S_2) \cos^2 \frac{\psi}{2} \sin^2 \xi + \right. \\ \left. + S_3 \cos^2 \frac{\psi}{2} (\sin^2 \xi - \cos^2 \xi) - 2 \cos^2 \frac{\psi}{2} \cos \xi \sin \xi (S_1 + S_2 + 2S_3) \left( \frac{dz}{d\rho} \right)_{\alpha,\beta,\gamma} + \right. \\ \left. + \cos^2 \frac{\psi}{2} (S_1 \cos^2 \xi - S_2 \sin^2 \xi + S_3 (\cos^2 \xi - \sin^2 \xi)) \left( \frac{dz}{d\rho} \right)_{\alpha,\beta,\gamma}^2 \right] d\rho = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$f_{\alpha,\beta,\gamma} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \cos \psi}{\cos \xi (1 - (1 + \cos \psi) \cos^2 \xi) + \sin \xi (1 - (1 + \cos \psi) \sin^2 \xi) \left( \frac{dz}{d\rho} \right)_{\alpha,\beta,\gamma}}.$$

При  $\psi = 0$  соотношения (12) и (14) для  $\alpha$  и  $\beta$  характеристик (12) при соответствующей замене переходят соотношения, приведенные в [1, 2].

Соотношение вдоль  $\gamma$  характеристики (15) преобразуем к виду (17), откуда следует  $d\psi = 0$  при  $\psi = 0$

$$2 \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \left[ d\sigma + \left( R_1 + R_2 \left( \frac{dz}{d\rho} \right)_{\gamma} \right) d\rho \right] + d\psi + \frac{2 \sin \psi}{\rho} d\rho = 0. \quad (17)$$

Соотношения (12), (16) при  $\psi = 0$  для линий скольжения  $\alpha$  и  $\beta$  при соответствующей замене переходят в соотношения, приведенные в [3, 4].

Соотношение вдоль  $\gamma$  линии скольжения (13), (16) преобразуем к виду (18)

$$\begin{aligned} - \frac{dv}{\cos \xi} + \operatorname{tg} \psi (du + \operatorname{tg} \xi dw) - \\ - \frac{1}{\rho} \frac{v \cos \frac{\psi}{2} \sin \psi \cos \xi (1 - 2 \cos^2 \frac{\psi}{2}) + 2u \cos^2 \frac{\psi}{2} \sin \frac{\psi}{2} \sin \psi}{2 \sin \frac{\psi}{2} \cos \psi \cos^2 \frac{\xi}{2} \cos \xi} d\rho = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Соотношение (18) при  $\psi \rightarrow 0$  переходит в соотношение:

$$dv - \frac{v}{\rho \cos^2 \frac{\xi}{2}} d\rho = 0. \quad (19)$$

Система уравнений (12)–(15) является статически определимой. Задав граничные условий для напряжений на свободной границе и под штампом можно определить граничные условия для  $\sigma$ ,  $\xi$  и  $\psi$  из условия полной пластичности (1) и соотношений для напряжений (2). Совместное решение системы уравнений (12)–(15) позволяет построить линии скольжения и поле напряжений. Затем определяются граничные условия для скоростей перемещений и по соотношениям (16) и (19) вычисляется поле скоростей перемещений в пластической области. Поля напряжений и скоростей перемещений должны удовлетворять условию неотрицательности диссипативной функции

$$D = \sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3 \geq 0, \tag{20}$$

где  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  – главные скорости деформаций.

**2. Граничные условия**

Граница  $AC$  полупространства около штампа свободна от внешних усилий. Из соотношений (2) и условия полной пластичности (1) следует, что на свободной границе среды  $\sigma_z = 0$ , а  $\sigma_\rho < 0$ . Так как направления  $\rho$  и  $z$  являются для точек свободной границы главными и  $\sigma_1 < \sigma_3$ , то для этих точек  $\sigma_z = \sigma_3 = 0$ ,  $\sigma_\rho = \sigma_1 = -1$ . Тогда из равенства главных напряжений  $\sigma_2 = \sigma_3$  условия полной пластичности (1) следует  $\sigma_\theta = \sigma_2 = 0$ . В итоге получаем:

$$\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_\theta = \sigma_z = 0, \quad \sigma_1 = \sigma_\rho = -1. \tag{21}$$

Из соотношения (2), (3) получаем:

$$\sigma = -1/3, \quad \xi = 0, \quad \psi = 0 \quad \text{на } AC \text{ рис. 1.} \tag{22}$$

Согласно соотношениям (2) и рис. 1 контактное трение под штампом определяется соотношением:

$$\tau = \sqrt{\tau_{\rho z}^2 + \tau_{\theta z}^2}, \quad \tau = \sqrt{(k(1 + \cos \psi) \sin \xi \cos \xi)^2 + (k \sin \psi \sin \xi)^2}, \quad 0 < \psi < \pi/2. \tag{23}$$

В сингулярной точке  $A$  изменение среднего напряжения от свободной границы к границе штампа определяется интегрированием уравнения (14) на вырожденной  $\alpha$ -характеристике для внешнего и внутреннего случаев соответственно:

$$\sigma = -\frac{1}{3} - \int_0^\xi \frac{1 + \cos \psi}{2\sqrt{\cos \psi}} d\xi. \tag{24}$$

Согласно [3] для задачи давления плоского круглого штампа на идеально пластическое полупространство с учетом контактного трения ( $\tau_{\rho z} \neq 0, \tau_{\rho\theta} = \tau_{\theta z} = 0$ ) напряжения контактного трения приводят к образованию жесткой области  $OEG$  в центральной части границы контакта, движущейся вместе со штампом. Ниже приведен рис. 2 из [3]: на нем показано поле линий скольжения в пластической области при вдавливании штампа в полупространство с учетом контактного трения.

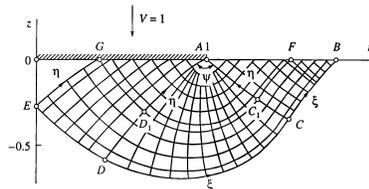


Рис. 2. Поле линий скольжения в пластической области при вдавливании штампа в полупространство с учетом контактного трения [3].

Согласно [3] в случае возникновения жесткой области возникает задача определения границы  $EG$  центральной жесткой области для поля линий скольжения, которое зависит от двух параметров: координат  $r_F$  и  $r_B$  точек  $F$  и  $B$  границы  $AB$ . Точка  $E$  находящаяся на оси симметрии находится исходя из условий:

$$\rho_E(\rho_B, \rho_F) = 0, \quad \varphi_E(\rho_B, \rho_F) + \frac{\pi}{4} = 0 \quad (dz/d\rho = \operatorname{tg} \varphi \quad \text{для } \xi). \quad (25)$$

Решение системы уравнений (25) определяет линии скольжения и поле напряжений в пластической области с жесткопластическими границами  $EG$  и  $EDCB$ . Координаты точек  $B$  и  $F$  находятся методом вариации их значений во входных данных вычислительной программой. Численное решение, результаты и алгоритмы решения этой задачи приведены в [3].

Для общей осесимметричной задачи, в случае построения поля характеристик через верх и введенных обозначениях, система уравнений (25) имеет вид [7]:

$$\rho_E(\rho_B, \rho_F) = 0, \quad \varphi_E(\rho_B, \rho_F) - \frac{\pi}{4} = 0 \quad (dz/d\rho = \operatorname{tg} \varphi \quad \text{для } \alpha), \quad (26)$$

где  $\varphi = \xi - (\frac{\pi}{4} + \mu)$ ,  $\operatorname{tg} 2\mu = \frac{1 - \cos \psi}{2\sqrt{\cos \psi}}$ .

На рис. 3а приведено поле характеристик для осесимметричной задачи для  $\tau = 0.85$ , рис. 3б – общей осесимметричной задачи для  $\tau = 0.85$  и  $\operatorname{tg} \alpha = \tau_{\theta z} / \tau_{\rho z}$ ,  $\alpha = 80.27^\circ$ . С увеличением угла веера  $\psi$  при сингулярной точке  $A$  (рис. 2) угол между  $\alpha$  и  $\beta$  характеристика растет от  $\pi/2$  до  $\pi$  при  $\psi = \pi/2$  в соотношениях (12) и (26) (угол веера при точке  $A$  и угол  $\psi$  в соотношениях (12) не совпадают). Согласно рис. 3 следует, что с увеличением угла  $\alpha$  (с добавлением усилий кручения) при  $\tau = \operatorname{const}$  центральная жесткая область под штампом будет уменьшаться.

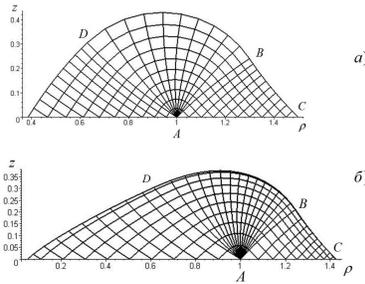


Рис. 3. а)  $\psi = 0$ ,  $\tau = 0.85$ ,  $\xi = 1.7903$ ,  $\alpha = 0^\circ$  б)  $\psi = 1$ ,  $\tau = 0.85$ ,  $\xi = 1.6646$ ,  $\alpha = 80.27^\circ$

### 3. Влияние крутящих усилий на образование центральной жесткой области

Критерием появления центральной жесткой области является условие пересечения  $\alpha$  характеристикой оси  $Oz$  под углом не меньшим  $45^\circ$ . Согласно рис. 1 и 3, условиям (26) и уравнению  $\alpha$  характеристики (12) следует, что условием отсутствия образования центральной жесткой области является:

$$\xi - \mu < \frac{\pi}{4}, \quad \text{где} \quad \operatorname{tg} 2\mu = \frac{1 - \cos \psi}{2\sqrt{\cos \psi}}. \quad (27)$$

Решением уравнения  $\xi - \mu = \frac{\pi}{4}$  является график зависимости углов  $\xi$  и  $\psi$  рис. 4, приведенный ниже.

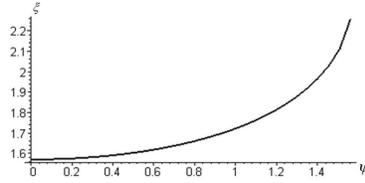


Рис. 4. График зависимости углов  $\xi$  и  $\psi$  решения уравнения (27).

Согласно соотношениям (2) контактное трение под штампом определяется соотношением:

$$\tau = \sqrt{\tau_{\rho z}^2 + \tau_{\theta z}^2}, \quad \tau = \sqrt{(-1/2(1 + \cos \psi) \sin \xi \cos \xi)^2 + (-1/2 \sin \psi \sin \xi)^2}, \quad 0 < \psi < \pi/2. \quad (28)$$

Получив решение неравенства (27) (рис. 4) и воспользовавшись соотношениями (2) можно построить область, определяющую контактное напряжение под штампом, для которого центральная жесткая область будет отсутствовать (рис. 5).

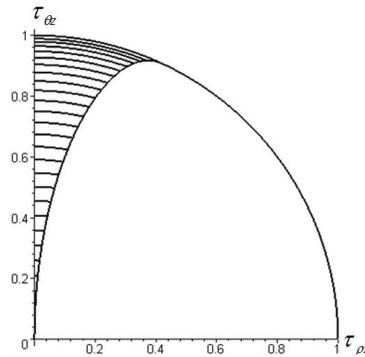


Рис. 5. Условие отсутствия образования центральной жесткой области.

Добавление крутящих усилий при вдавливании плоского круглого штампа ( $\tau_{\theta z} \neq 0$ ) приводит к уменьшению величины центральной жесткой области под штампом. Центральная жесткая область уменьшается с ростом угла  $\alpha$ , где  $\text{tg } \alpha = \tau_{\theta z} / \tau_{\rho z}$ , и исчезает, начиная с некоторого значения угла  $\alpha$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\tau_{\theta z}}{\tau_{\rho z}} = \frac{\sin \psi \sin \xi}{(1 + \cos \psi) \sin \xi \cos \xi}. \quad (29)$$

График зависимости предельных значений угла  $\alpha$  для постоянных контактных напряжений  $\tau = \sqrt{\tau_{\rho z}^2 + \tau_{\theta z}^2} = \text{const}$  приведен ниже .

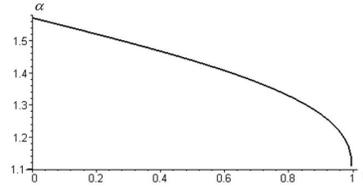


Рис. 6. График предельных значений угла  $\alpha$  для постоянных контактных напряжений  $\tau = \sqrt{\tau_{rz}^2 + \tau_{\theta z}^2} = const.$

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ишлинский, А. Ю.* Осесимметричная задача теории пластичности и проба Бринелля / А. Ю. Ишлинский // ПММ. – 1944. – Т. 8. – Вып. 3. – С. 201-224.
- [2] *Ишлинский, А. Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2001. – 704 с.
- [3] *Непершин, Р. И.* Давление плоского круглого штампа на идеально пластическое полупространство с учетом контактного трения / Р. И. Непершин // МГТТ. – 2005. – № 5. – С. 150-158.
- [4] *Друянов, Б. А.* Теория технологической пластичности / Б. А. Друянов, Р. И. Непершин. – М. : Машиностроение, 1990. – 272 с.
- [5] *Горский, А. В.* О характеристических соотношениях для напряжений и скоростей перемещений общей плоской, осесимметрической и сферической задач теории идеальной пластичности / А. В. Горский, П. В. Горский // Научно-информационный вестник докторантов, аспирантов, студентов. 2003. – Т. 1. – № 1. – С. 10-20
- [6] *Горский, П. В.* О вдавливании кругового штампа в неоднородное жесткопластическое полупространство / П. В. Горский // Известия ТулГУ. Серия Математика. Информатика – Тула : Издательство ТулГУ, 2004. – Т. 10, вып. 3.– С. 62-75.
- [7] *Горский, А. В.* Об определении поля напряжений и скоростей перемещений идеально пластического течения в случае общей осесимметричной задачи / А. В. Горский, П. В. Горский // IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике : аннотации докладов. Т. 3. – Нижний Новгород : Изд-во ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2006. – С. 74-75.

A. V. Gorski, P. V. Gorski

**ABOUT INDENTATION OF CIRCULAR STAMP WITH A FLAT BASIS IN RIGID-PLASTIC HALF-SPACE UNDER THE ACTION OF TWISTING STRESS**

*Chuvash state pedagogical university of I. J. Jakovleva*

**Abstract.** Considered the axisymmetric problem of indentation of circular stamp with a flat basis in rigid-plastic half-space under the action of twisting stress. Pointed out the relation between size of a central rigid zone and twisting stress sort. The conditions of central rigid zone disappearance are given

**Keywords:** plasticity, plasticity condition, rigid-plastic half-space, axisymmetric, twisting stress, indentation, circular stamp with flat basis, central rigid zone.

*Горский Алексей Владимирович*

*кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики и вычислительной техники, ГОУ ВПО "Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева", г. Чебоксары, ул. К. Маркса 38, 428000*

*e-mail: gorski@mail.ru*

*Горский Павел Владимирович*

*кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики и вычислительной техники, ГОУ ВПО "Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева", г. Чебоксары, ул. К. Маркса 38, 428000*

*e-mail: gorski@mail.ru*

*Gorsky Alexey Vladimirovich*

*doctor of philosophy, senior lecturer of chair of computer science and computer facilities, Chuvash state pedagogical university of I.J. Jakovleva, K.Marx's 38 street, 428000*

*Gorsky Pavel Vladimirovich*

*doctor of philosophy, senior lecturer of chair of computer science and computer facilities, Chuvash state pedagogical university of I.J. Jakovleva, K.Marx's 38 street, 428000*