Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2009. № 1. С. 130–133

И. П. Григорьев

О СЖАТИИ ПЛОСКОГО ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ С УЧЕТОМ СИЛ ТЯЖЕСТИ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. В работе рассматривается сжатие плоского идеальнопластического слоя жесткими шероховатыми плитами с учетом силы тяжести. Сжатие идеальнопластического слоя шероховатыми плитами без учета силы тяжести рассмотрено в [1,2] и др.

Ключевые слова: пластичность, идеальная, упругость, напряжения, скорости деформации, предел текучести, тяжесть, слой, давление.

УДК: 539.374

1. Рассмотрим идеальнопластический слой толщиной $2h$, сжатый жесткими шероховатыми плитами, находящихся в поле силы тяжести g (рис. 1). Условие пластичности примем в виде

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2,\ k - const, \tag{1}$$

где $\sigma_x,\ \sigma_y,\ \tau_{xy}$– компоненты напряжения, k– предел текучести на сдвиг.

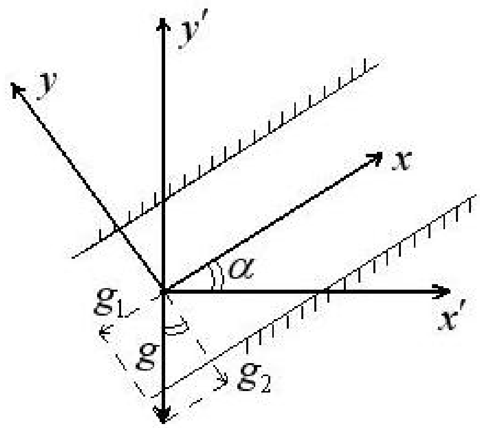

Рис. 1.

Поступила 15.01.2009

Уравнения равновесия запишем в виде

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = -g\sin\alpha, \ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -g\cos\alpha, \ g - const, \tag{2}$$

где $g_1 = -g\sin\alpha, \ g_2 = -g\cos\alpha$ – составляющие силы тяжести.

В дальнейшем перейдем к безразмерным величинам, все величины, имеющие размерность длины, будем считать отнесенными к величине h, размерность напряжения – к величине k.

Положим

$$\tau_{xy} = y. \tag{3}$$

Из (2), (3) получим

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -g\sin\alpha - 1, \ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -g\cos\alpha. \tag{4}$$

Из (4) следует

$$\sigma_x = (-g\sin\alpha - 1) + f(x), \ \sigma_y = (-g\cos\alpha)\,y + \varphi(x). \tag{5}$$

Из (1), (3) найдем

$$\sigma_x - \sigma_y = 2\sqrt{1-y^2}. \tag{6}$$

Из (3), (5), (6) получим

$$\begin{aligned} &\sigma_x = (-g\sin\alpha - 1)\,x + C + (-g\cos\alpha)\,y + 2\sqrt{1-y^2}, \quad C - const, \\ &\sigma_y = (-g\sin\alpha - 1)\,x + C + (-g\cos\alpha)\,y, \ \tau_{xy} = y. \end{aligned} \tag{7}$$

Кинематика течения определяется из уравнений

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y = 0, \ \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{\varepsilon_{xy}}{\tau_{xy}}, \ \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \ \varepsilon_y = \frac{\partial \upsilon}{\partial y}, \ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right), \tag{8}$$

где $\varepsilon_x, \ \varepsilon_y, \ \varepsilon_{xy}$ – компоненты скорости пластической деформации, $u, \ \upsilon$ – компоненты скорости перемещения.

Согласно (3), (6), (8), уравнения, определяющие кинематику течения, не зависят от силы тяжести.

Полагая

$$\upsilon = y, \tag{9}$$

из (3), (6), (8), (9) получим

$$u = -x + \frac{1}{2}\sqrt{1-y^2} + C_1, \ \upsilon = y, \ C_1 - const. \tag{10}$$

2. Уравнения (1), (2) допускают другой вид решения. Положим

$$\tau_{xy} = (-g\sin\alpha)\,y. \tag{11}$$

Из (2), (11) найдем

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -g\cos\alpha. \tag{12}$$

Из (12) следует

$$\sigma_x = f(y),\ \sigma_y = (-g\cos\alpha)\, y + \varphi(x). \tag{13}$$

Из (1), (11) найдем

$$\sigma_x - \sigma_y = 2\sqrt{1 - ((-g\sin\alpha)\, y)^2}. \tag{14}$$

Из (11), (13), (14) получим

$$\begin{aligned} &\sigma_x = (-g\cos\alpha)\, y + C_1 + 2\sqrt{1 - ((-g\sin\alpha)\, y)^2},\ \mathrm{C}_1 - const,\\ &\sigma_y = (-g\cos\alpha)\, y + C_1,\ \tau_{xy} = (-g\cos\alpha)\, y. \end{aligned} \tag{15}$$

Согласно (14) максимальное значение касательного напряжения $\tau_{\max} = 1$ достигается при

$$y = \frac{1}{-g\sin\alpha}. \tag{16}$$

Согласно (15) сдавливающее давление σ_y на границе плиты $y = 1$ является постоянным

$$\sigma_y = -g\cos\alpha + C_1 - const. \tag{17}$$

3. В общем случае решение следует искать в виде

$$\tau_{xy} = (1 - g\sin\alpha)\, y. \tag{18}$$

Из (2), (18) получим

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} = -1,\ \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} = -g\cos\alpha. \tag{19}$$

Из (19) следует

$$\sigma_x = -x + f(y),\ \sigma_y = (-g\cos\alpha)\, y + \varphi(x). \tag{20}$$

Из (1), (18) найдем

$$\sigma_x - \sigma_y = 2\sqrt{1 - [(1 - g\sin\alpha)\, y]^2}. \tag{21}$$

Из (18), (20), (21) получим

$$\begin{aligned} &\sigma_x = -x + C_2 + (-g\cos\alpha)\, y + 2\sqrt{1 - [(1 - g\sin\alpha)\, y]^2},\\ &\sigma_y = -x + C_2 + (-g\sin\alpha)\, y,\ \tau_{xy} = (1 - g\sin\alpha)\, y. \end{aligned} \tag{22}$$

Под действием силы тяжести касательное напряжение τ_{xy} (18) уменьшается, сдавливающее усилие σ_y линейно изменяется вдоль оси x, на границе плиты $y = 1$ касательное напряжение $\tau_{xy} = (1 - g\sin\alpha) < \tau_{\max} = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука,1966.

[2] *Качанов, Л. М.* Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М. : Наука,1969. – 420 с.

I. P. Grigoryev

ABOUT PRESSING OF FLAT IDEAL PLASTIC LAYER WITH TAKING INTO ACCOUNT GRAVITY

Chuvash state pedagogical university of I. J. Jakovleva

Abstract. In the paper the pressing of flat ideal plastic layer with hard rough plate with taking into account gravity is investigated. The pressing of flat ideal plastic layer with rough plate without taking into account gravity is investigated in [1, 2].

Keywords: plasticity, ideal, elasticity, stress, fluidity limit, deformation's speed, gravity, layer, pressure.

Григорьев Иван Павлович

кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры машиноведения Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

`e-mail:` sergio2100@mail.ru

Grigoryev Ivan Pavlovich

doctor of philosophy, senior teacher of chair of machins of Chuvash state pedagogical university of I. J. Jakovlev, Cheboxary