

П. Н. Кузнецов

## УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ ВКЛЮЧЕНИЯМИ, ОГРАНИЧЕННЫМИ ЭКСЦЕНТРИЧЕСКИМИ ОКРУЖНОСТЯМИ, ПРИ ДВУОСНОМ РАСТЯЖЕНИИ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

**Аннотация.** В работе рассматривается двусосное упругопластическое напряженное состояние неоднородной плоскости, ослабленной круговым отверстием, подкрепленной включениями, ограниченными эксцентрическими окружностями. Рассматривается случай плоской деформации. Определяется граница упругопластической зоны, рассматривается влияние неоднородного включения на напряженное состояние плоскости. Отметим, что вопросам теории пластичности неоднородных сред посвящен ряд работ, среди которых отметим [2,4-6].

**Ключевые слова:** плоская деформация, тензор напряжений, пластичность, упругость, упругопластическая граница, неоднородное включение.

УДК: 539.374

Рассмотрим плоскость с включениями, ограниченными окружностями. Плоскость ослаблена круговым отверстием радиуса  $R$ , центр первой окружности  $O_1(a_1, b_1)$ , центр второй окружности  $O_2(a_2, b_2)$ , центр третьей окружности  $O_3(a_3, b_3)$  (рис. 1). Пределы текучести материалов включений равны  $k_1, k_2$  и  $k_3$ , предел текучести материала плоскости –  $k_4$ . Центр начала координат  $x, y$  совпадает с центром кругового отверстия. Пластина находится в состоянии двусосного растяжения под действием усилий на бесконечности  $p_1, p_2$  (рис. 1).

Уравнение контура  $L_1$  запишем в виде

$$(x + \delta a_1)^2 + (y + \delta b_1)^2 = R_1^2, \quad (1)$$

где точка  $O_1(a_1, b_1)$  – центр окружности, ограничивающей включение с пределом текучести  $k_1$ ,  $R_1$  – радиус окружности.

Уравнение контура  $L_2$  запишем в виде

$$(x + \delta a_2)^2 + (y + \delta b_2)^2 = R_2^2, \quad (2)$$

где точка  $O_2(a_2, b_2)$  – центр окружности, ограничивающей включение с пределом текучести  $k_2$ ,  $R_2$  – радиус окружности.

---

Поступила 20.02.2009

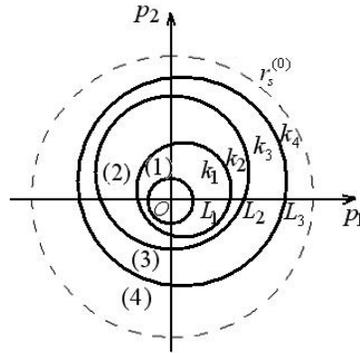


Рис. 1.

Уравнение контура  $L_3$  запишем в виде

$$(x + \delta a_3)^2 + (y + \delta b_3)^2 = R_3^2, \quad (3)$$

где точка  $O_3(a_3, b_3)$  – центр окружности, ограничивающей включение с пределом текучести  $k_3$ ,  $R_3$  – радиус окружности.

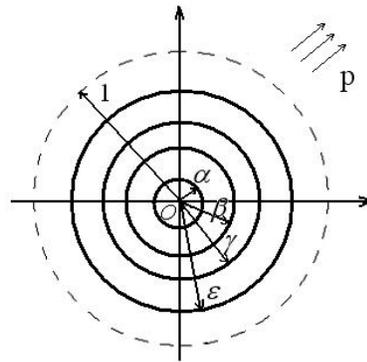


Рис. 2.

Решение будем искать в приближенном виде аналогично [1, 3-5]. Уравнение упругопластической границы запишем в виде

$$r = r_s^{(0)} + \delta r_{s1}, \quad (4)$$

где  $\delta$  – малый безразмерный параметр.

В дальнейшем, все величины, имеющие размерность длины, отнесем к величине  $r_s^{(0)}$ . Все величины, имеющие размерность напряжения, отнесем к пределу текучести  $k_1$ , обозначим:  $k_2/k_1 = \chi_1$ ,  $k_3/k_1 = \chi_2$ ,  $k_4/k_1 = \chi_3$ . Примем:  $\rho = r/r_s^{(0)}$ ,  $\rho' = r_{s1}/r_s^{(0)}$ . Величины  $a_1\delta/r_s^{(0)}$ ,  $b_1\delta/r_s^{(0)}$ ,  $a_2\delta/r_s^{(0)}$ ,  $b_2\delta/r_s^{(0)}$ ,  $a_3\delta/r_s^{(0)}$ ,  $b_3\delta/r_s^{(0)}$ ,  $(p_1 - p_2)/2k_1$  будем считать достаточно малыми, порядка  $\delta$  и обозначим

$$\frac{(p_1 - p_2)}{2k_1} = d_3\delta, \quad (5)$$

$$d_3 - const, \quad 0 \leq d_3 \leq 1.$$

В исходном нулевом приближении при  $\delta = 0$  имеем плоскость с круговым включением, ослабленным отверстием, равномерно растягиваемым на бесконечности усилиями  $p = (p_1 + p_2)/2k_1$  (рис. 2).

Радиус отверстия в безразмерном виде обозначим  $\alpha = R/r_s^{(0)}$ , радиус первой эксцентрической окружности –  $\beta = R_1/r_s^{(0)}$ , радиус второй эксцентрической окружности –  $\gamma = R_2/r_s^{(0)}$ , радиус третьей эксцентрической окружности –  $\varepsilon = R_3/r_s^{(0)}$ . Будем считать, что  $\varepsilon < 1$ .

Компоненты напряжения запишем в полярной системе координат  $\rho, \theta$ :  $\sigma_\rho, \sigma_\theta, \tau_{\rho\theta}$ . Решение будем искать в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \delta\sigma'_{ij}. \quad (6)$$

Припишем компонентам напряжения в зоне первого включения индекс "1" внизу, компонентам напряжения в зоне второго включения – индекс "2" внизу, в зоне третьего включения – индекс "3" внизу, вне зоны включения – индекс "4" внизу. Компонентам напряжения в пластической зоне припишем индекс "р" наверху, в упругой зоне – индекс "е" наверху.

Рассмотрим напряженное состояние в исходном нулевом приближении.

Исходное напряженное состояние является осесимметричным

$$\tau_{p\theta_1}^{(0)p} = 0, \quad \tau_{p\theta_2}^{(0)p} = 0, \quad \tau_{p\theta_3}^{(0)p} = 0, \quad \tau_{p\theta_4}^{(0)p} = 0. \quad (7)$$

В зоне 1, в зоне первого включения, условие пластичности примет вид

$$\sigma_{\rho_1}^{(0)p} - \sigma_{\theta_1}^{(0)p} = -2, \quad \sigma_{\theta_1}^{(0)p} > \sigma_{\rho_1}^{(0)p}. \quad (8)$$

В зоне 2, в зоне второго включения, условие пластичности запишется в виде

$$\sigma_{\rho_2}^{(0)p} - \sigma_{\theta_2}^{(0)p} = -2\chi_1. \quad (9)$$

В зоне 3, в зоне третьего включения, условие пластичности запишется в виде

$$\sigma_{\rho_3}^{(0)p} - \sigma_{\theta_3}^{(0)p} = -2\chi_2. \quad (10)$$

Вне зоны включения, в зоне 4, условие пластичности запишется в виде

$$\sigma_{\rho_4}^{(0)p} - \sigma_{\theta_4}^{(0)p} = -2\chi_3. \quad (11)$$

Уравнение равновесия имеет вид

$$\frac{d\sigma_\rho^{(0)}}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho^{(0)} - \sigma_\theta^{(0)}}{\rho} = 0. \quad (12)$$

Из (8)–(11) имеем

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho_1}^{(0)p} &= 2 \ln \rho + C_1, \quad \sigma_{\theta_1}^{(0)p} = 2 + 2 \ln \rho + C_1, \\
\sigma_{\rho_2}^{(0)p} &= 2\chi_1 \ln \rho + C_2, \quad \sigma_{\theta_2}^{(0)p} = 2\chi_1 \ln \rho + 2\chi_1 + C_2, \\
\sigma_{\rho_3}^{(0)p} &= 2\chi_2 \ln \rho + C_3, \quad \sigma_{\theta_3}^{(0)p} = 2\chi_2 \ln \rho + 2\chi_2 + C_3, \\
\sigma_{\rho_4}^{(0)p} &= 2\chi_3 \ln \rho + C_4, \quad \sigma_{\theta_4}^{(0)p} = 2\chi_3 \ln \rho + 2\chi_3 + C_4,
\end{aligned} \tag{13}$$

где  $C_1, C_2, C_3, C_4$  – постоянные.

Из условия  $\sigma_{\rho_1}^{(0)p} \Big|_{\rho=\alpha} = 0$ , определим постоянную  $C_1$

$$C_1 = -2 \ln \alpha.$$

Получим

$$\sigma_{\rho_1}^{(0)p} = 2 \ln \frac{\rho}{\alpha}, \quad \sigma_{\theta_1}^{(0)p} = 2 + 2 \ln \frac{\rho}{\alpha}. \tag{14}$$

Условие сопряжения компонент напряжений на границе первого включения запишется в виде

$$\sigma_{\rho_1}^{(0)p} \Big|_{\rho=\beta} = \sigma_{\rho_2}^{(0)p} \Big|_{\rho=\beta}. \tag{15}$$

Согласно (12)–(14) получим

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho_2}^{(0)p} &= 2\chi_1 \ln \frac{\rho}{\beta} + 2 \ln \frac{\beta}{\alpha}, \\
\sigma_{\theta_2}^{(0)p} &= 2\chi_1 \ln \frac{\rho}{\beta} + 2 \ln \frac{\beta}{\alpha} + 2\chi_1.
\end{aligned} \tag{16}$$

На границе  $\rho = \beta$  имеет место разрыв напряжений  $\sigma_{\theta}^{(0)p}$ :

$$\sigma_{\theta_2}^{(0)p} - \sigma_{\theta_1}^{(0)p} = 2(\chi_1 - 1). \tag{17}$$

Условие сопряжения компонент напряжений на границе второго включения запишется в виде

$$\sigma_{\rho_2}^{(0)p} \Big|_{\rho=\gamma} = \sigma_{\rho_3}^{(0)p} \Big|_{\rho=\gamma}. \tag{18}$$

Согласно (12), (15), (18) получим

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho_3}^{(0)p} &= 2\chi_2 \ln \frac{\rho}{\gamma} + 2\chi_1 \ln \frac{\gamma}{\beta} + 2 \ln \frac{\beta}{\alpha}, \\
\sigma_{\theta_3}^{(0)p} &= 2\chi_2 \ln \frac{\rho}{\gamma} + 2\chi_1 \ln \frac{\gamma}{\beta} + 2 \ln \frac{\beta}{\alpha} + 2\chi_2.
\end{aligned} \tag{19}$$

На границе  $\rho = \gamma$  имеет место разрыв напряжений  $\sigma_{\theta}^{(0)p}$ :

$$\sigma_{\theta_3}^{(0)p} - \sigma_{\theta_2}^{(0)p} = 2(\chi_2 - \chi_1). \tag{20}$$

Условие сопряжения компонент напряжений на границе третьего включения запишется в виде

$$\sigma_{\rho_3}^{(0)p} \Big|_{\rho=\varepsilon} = \sigma_{\rho_4}^{(0)p} \Big|_{\rho=\varepsilon}. \tag{21}$$

Согласно (12), (15), (21) получим

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho_4}^{(0)p} &= 2\chi_3 \ln \frac{\rho}{\varepsilon} + 2\chi_2 \ln \frac{\varepsilon}{\gamma} + 2\chi_1 \ln \frac{\gamma}{\beta} + 2 \ln \frac{\beta}{\alpha}, \\ \sigma_{\theta_4}^{(0)p} &= 2\chi_3 \ln \frac{\rho}{\varepsilon} + 2\chi_2 \ln \frac{\varepsilon}{\gamma} + 2\chi_1 \ln \frac{\gamma}{\beta} + 2 \ln \frac{\beta}{\alpha} + 2\chi_3.\end{aligned}\quad (22)$$

При  $\rho \rightarrow \infty$ , имеет место  $\sigma_{\rho}^{(0)e} = \sigma_{\theta}^{(0)e} = p$ .

Решение в упругой области будем искать в виде:

$$\sigma_{\rho}^{(0)e} = p - \frac{B}{\rho^2}, \quad \sigma_{\theta}^{(0)e} = p + \frac{B}{\rho^2}, \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)e} = 0. \quad (23)$$

Из условия сопряжения компонент напряжений на упругопластической границе будем иметь:

$$\sigma_{\rho_4}^{(0)p} \Big|_{\rho=1} = \sigma_{\rho}^{(0)e} \Big|_{\rho=1}, \quad \sigma_{\theta_4}^{(0)p} \Big|_{\rho=1} = \sigma_{\theta}^{(0)e} \Big|_{\rho=1}. \quad (24)$$

Из (23), (24) имеем

$$B = \chi_2, \quad p = 2\chi_1 \ln \frac{\gamma}{\beta} - 2\chi_2 \ln \gamma + 2 \ln \frac{\beta}{\alpha} + \chi_2. \quad (25)$$

Учитывая, что  $\alpha = R/r_s^{(0)}$ ,  $\beta = R_1/r_s^{(0)}$  и  $\gamma = R_2/r_s^{(0)}$  из (??) получим

$$r_s^{(0)} = \exp \left( \ln R_2 + \frac{p}{2\chi_2} - \frac{\chi_1}{\chi_2} \ln \frac{R_2}{R_1} - \frac{1}{\chi_2} \ln \frac{R_1}{R} - \frac{1}{2} \right). \quad (26)$$

Из (23), (25) имеем

$$\sigma_{\rho}^{(0)e} = p - \frac{\chi_3}{\rho^2}, \quad \sigma_{\theta}^{(0)e} = p + \frac{\chi_3}{\rho^2}. \quad (27)$$

Уравнение окружности (1) в первом приближении имеет вид

$$\rho = -a_1 \cos \theta - b_1 \sin \theta + R_1. \quad (28)$$

Контур кругового отверстия фиксирован, поэтому в зоне 1 величины  $\sigma_{ij1}^{\prime p} = 0$ .

Граничные условия на контуре  $L_1$  (рис. 1) запишутся в виде [1]

$$\begin{aligned}\left( \sigma_{\rho_1}^{\prime p} + \frac{d\sigma_{\rho_1}^{(0)p}}{d\rho} \rho'_{L_1} \right) \Big|_{\rho=\beta} &= \left( \sigma_{\rho_2}^{\prime p} + \frac{d\sigma_{\rho_2}^{(0)p}}{d\rho} \rho'_{L_1} \right) \Big|_{\rho=\beta}, \\ \left( \tau_{\rho\theta_1}^{\prime p} - \left( \sigma_{\theta_1}^{(0)p} - \sigma_{\rho_1}^{(0)p} \right) \frac{\rho'_{L_1}}{\beta} \right) \Big|_{\rho=\beta} &= \left( \tau_{\rho\theta_2}^{\prime p} - \left( \sigma_{\theta_2}^{(0)p} - \sigma_{\rho_2}^{(0)p} \right) \frac{\rho'_{L_1}}{\beta} \right) \Big|_{\rho=\beta},\end{aligned}\quad (29)$$

где точка наверху означает дифференцирование по  $\theta$ .

Из (29) следует

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho_2}^{\prime p} \Big|_{\rho=\beta} &= \frac{2}{\beta} (1 - \chi_1) (-a_1 \cos \theta - b_1 \sin \theta), \\ \tau_{\rho\theta_2}^{\prime p} \Big|_{\rho=\beta} &= -\frac{2}{\beta} (1 - \chi_1) (a_1 \sin \theta - b_1 \cos \theta).\end{aligned}\quad (30)$$

Согласно [1], из (30) получаем

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho 2}^{\prime p} \Big|_{\rho=\beta} &= \frac{2}{\rho} (1 - \chi_1) (-a_1 \cos \theta - b_1 \sin \theta), \\ \sigma_{\rho 2}^{\prime p} &= \sigma_{\theta 2}^{\prime p}, \\ \tau_{\rho \theta 2}^{\prime p} \Big|_{\rho=\beta} &= -\frac{2}{\rho} (1 - \chi_1) (a_1 \sin \theta - b_1 \cos \theta).\end{aligned}\quad (31)$$

Уравнение окружности (2) в первом приближении имеет вид

$$\rho = -a_2 \cos \theta - b_2 \sin \theta + R_2. \quad (32)$$

Граничные условия на контуре  $L_2$  запишутся в виде [1]

$$\begin{aligned}\left( \sigma_{\rho 2}^{\prime p} + \frac{d\sigma_{\rho 2}^{(0)p}}{d\rho} \rho'_{L_2} \right) \Big|_{\rho=\gamma} &= \left( \sigma_{\rho 3}^{\prime p} + \frac{d\sigma_{\rho 3}^{(0)p}}{d\rho} \rho'_{L_2} \right) \Big|_{\rho=\gamma}, \\ \left( \tau_{\rho \theta 2}^{\prime p} - \left( \sigma_{\theta 2}^{(0)p} - \sigma_{\rho 2}^{(0)p} \right) \frac{\rho'_{L_2}}{\gamma} \right) \Big|_{\rho=\gamma} &= \left( \tau_{\rho \theta 3}^{\prime p} - \left( \sigma_{\theta 3}^{(0)p} - \sigma_{\rho 3}^{(0)p} \right) \frac{\rho'_{L_2}}{\gamma} \right) \Big|_{\rho=\gamma}.\end{aligned}\quad (33)$$

Согласно [1], из (33) получаем

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho 3}^{\prime p} &= \left[ -a_1 \frac{2}{\rho} (1 - \chi_1) - a_2 \frac{2}{\rho} (\chi_1 - \chi_2) \right] \cos \theta + \\ &\quad + \left[ -b_1 \frac{2}{\rho} (1 - \chi_1) - b_2 \frac{2}{\rho} (\chi_1 - \chi_2) \right] \sin \theta, \\ \sigma_{\rho 3}^{\prime p} &= \sigma_{\theta 3}^{\prime p}, \\ \tau_{\rho \theta 3}^{\prime p} &= \left[ -a_1 \frac{2}{\rho} (1 - \chi_1) - a_2 \frac{2}{\rho} (\chi_1 - \chi_2) \right] \sin \theta + \\ &\quad + \left[ b_1 \frac{2}{\rho} (1 - \chi_1) + b_2 \frac{2}{\rho} (\chi_1 - \chi_2) \right] \cos \theta,\end{aligned}\quad (34)$$

Уравнение окружности (3) в первом приближении имеет вид

$$\rho = -a_3 \cos \theta - b_3 \sin \theta + R_3. \quad (35)$$

Граничные условия на контуре  $L_3$  запишутся в виде [1]

$$\begin{aligned}\left( \sigma_{\rho 3}^{\prime p} + \frac{d\sigma_{\rho 3}^{(0)p}}{d\rho} \rho'_{L_3} \right) \Big|_{\rho=\varepsilon} &= \left( \sigma_{\rho 4}^{\prime p} + \frac{d\sigma_{\rho 4}^{(0)p}}{d\rho} \rho'_{L_3} \right) \Big|_{\rho=\varepsilon}, \\ \left( \tau_{\rho \theta 3}^{\prime p} - \left( \sigma_{\theta 3}^{(0)p} - \sigma_{\rho 3}^{(0)p} \right) \frac{\rho'_{L_3}}{\varepsilon} \right) \Big|_{\rho=\varepsilon} &= \left( \tau_{\rho \theta 4}^{\prime p} - \left( \sigma_{\theta 4}^{(0)p} - \sigma_{\rho 4}^{(0)p} \right) \frac{\rho'_{L_3}}{\varepsilon} \right) \Big|_{\rho=\varepsilon}.\end{aligned}\quad (36)$$

Согласно [1], из (36) получаем

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho 4}^{\prime p} &= \left[ -a_1 \frac{2}{\rho} (1 - \chi_1) - a_2 \frac{2}{\rho} (\chi_1 - \chi_2) - a_3 \frac{2}{\rho} (\chi_2 - \chi_3) \right] \cos \theta + \\ &\quad + \left[ -b_1 \frac{2}{\rho} (1 - \chi_1) - b_2 \frac{2}{\rho} (\chi_1 - \chi_2) - b_3 \frac{2}{\rho} (\chi_2 - \chi_3) \right] \sin \theta, \\ \sigma_{\rho 4}^{\prime p} &= \sigma_{\theta 4}^{\prime p}, \\ \tau_{\rho \theta 4}^{\prime p} &= \left[ -a_1 \frac{2}{\rho} (1 - \chi_1) - a_2 \frac{2}{\rho} (\chi_1 - \chi_2) - a_3 \frac{2}{\rho} (\chi_2 - \chi_3) \right] \sin \theta + \\ &\quad + \left[ b_1 \frac{2}{\rho} (1 - \chi_1) + b_2 \frac{2}{\rho} (\chi_1 - \chi_2) + b_3 \frac{2}{\rho} (\chi_2 - \chi_3) \right] \cos \theta,\end{aligned}\quad (37)$$

Решение в упругой области будем искать в виде [1]

$$\begin{aligned}
\sigma_\rho^{'e} &= \frac{a_1''}{\rho^3} \cos \theta + \frac{b_1''}{\rho^3} \sin \theta + \left(1 - \frac{4}{\rho^2} + \frac{3}{\rho^4}\right) d_3 \cos 2\theta, \\
\sigma_\theta^{'e} &= -\frac{a_1''}{\rho^3} \cos \theta - \frac{b_1''}{\rho^3} \sin \theta + \left(1 + \frac{3}{\rho^4}\right) d_3 \cos 2\theta, \\
\tau_{\rho\theta}^{'e} &= \frac{a_1''}{\rho^3} \sin \theta + \frac{b_1''}{\rho^3} \cos \theta + \left(1 + \frac{2}{\rho^2} - \frac{3}{\rho^4}\right) d_3 \sin 2\theta.
\end{aligned} \tag{38}$$

Условия сопряжения напряжений в пластической и упругой областях при  $\rho = 1$  имеют вид

$$\sigma_{\rho 4}^{'p} \Big|_{\rho=1} = \sigma_\rho^{'e} \Big|_{\rho=1}, \quad \tau_{\rho\theta 4}^{'p} \Big|_{\rho=1} = \tau_{\rho\theta}^{'e} \Big|_{\rho=1}. \tag{39}$$

Из (37)–(39) имеем

$$\begin{aligned}
\sigma_\rho^{'e} &= \frac{2[-a_1(1-\chi_1)-a_2(\chi_1-\chi_2)-a_3(\chi_2-\chi_3)]}{\rho^3} \cos \theta + \\
&\quad + \frac{2[-b_1(1-\chi_1)-b_2(\chi_1-\chi_2)-b_3(\chi_2-\chi_3)]}{\rho^3} \sin \theta + \left(1 - \frac{4}{\rho^2} + \frac{3}{\rho^4}\right) d_3 \cos 2\theta, \\
\sigma_\theta^{'e} &= -\frac{2[-a_1(1-\chi_1)-a_2(\chi_1-\chi_2)-a_3(\chi_2-\chi_3)]}{\rho^3} \cos \theta - \\
&\quad - \frac{2[-b_1(1-\chi_1)-b_2(\chi_1-\chi_2)-b_3(\chi_2-\chi_3)]}{\rho^3} \sin \theta + \left(1 + \frac{3}{\rho^4}\right) d_3 \cos 2\theta, \\
\tau_{\rho\theta}^{'e} &= \frac{2[-a_1(1-\chi_1)-a_2(\chi_1-\chi_2)-a_3(\chi_2-\chi_3)]}{\rho^3} \sin \theta + \\
&\quad + \frac{2[-b_1(1-\chi_1)-b_2(\chi_1-\chi_2)-b_3(\chi_2-\chi_3)]}{\rho^3} \cos \theta + \left(1 + \frac{2}{\rho^2} - \frac{3}{\rho^4}\right) d_3 \sin 2\theta.
\end{aligned} \tag{40}$$

Величину  $\rho'$  определим из условия сопряжения

$$\left( \sigma_{\theta 4}^{'p} + \frac{d\sigma_{\theta 4}^{(0)p}}{d\rho} \rho' \right) \Big|_{\rho=1} = \left( \sigma_\theta^{'e} + \frac{d\sigma_\theta^{(0)e}}{d\rho} \rho' \right) \Big|_{\rho=1}. \tag{41}$$

Из (18), (25), (37), (40), (41) следует

$$\rho' = \frac{[a_1(1-\chi_1)+a_2(\chi_1-\chi_2)+a_3(\chi_2-\chi_3)] \cos \theta + [b_1(1-\chi_1)+b_2(\chi_1-\chi_2)+b_3(\chi_2-\chi_3)] \sin \theta + d_1 \cos 2\theta}{\chi_3}. \tag{42}$$

Таким образом, уравнение упругопластической границы имеет вид

$$\rho = 1 + \delta \left( \frac{[a_1(1-\chi_1)+a_2(\chi_1-\chi_2)+a_3(\chi_2-\chi_3)] \cos \theta + [b_1(1-\chi_1)+b_2(\chi_1-\chi_2)+b_3(\chi_2-\chi_3)] \sin \theta + d_1 \cos 2\theta}{\chi_3} \right). \tag{43}$$

В случае равномерного растяжения пластины в (43) следует положить  $d_1 = 0$ . В случае отсутствия эксцентриситета у первой окружности – положить  $a_1 = 0$ ,  $b_1 = 0$ . В случае отсутствия эксцентриситета у второй окружности – положить  $a_2 = 0$ ,  $b_2 = 0$ . В случае отсутствия эксцентриситета у третьей окружности – положить  $a_3 = 0$ ,  $b_3 = 0$ . При  $d_1 = a_2 = b_2 = a_3 = b_3 = 0$  имеет место включение, ограниченное двумя окружностями, одно из которых имеет эксцентриситет. При  $a_1 = b_1 = 1$ ,  $d_1 = a_2 = b_2 = a_3 = b_3 = 0$  из (43) следует

$$\rho = 1 + \delta \frac{(1-\chi_1) \cos \theta + (1-\chi_1) \sin \theta}{\chi_3}.$$

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. – М. : Наука, 1978. – 205 с.
- [2] *Ольшак, В.* Теория пластичности неоднородных сред / Ольшак В., Рыхлевский Я. – М. : Мир, 1964. – 56 с.
- [3] *Роштова, А. Н.* О предельных статически определимых условиях отрыва для сжимаемого анизотропного материала / А. Н. Роштова // Вестник Самарского государственного университета. – 2007. – № 6 (56). – С. 5-12.
- [4] *Тихонов, С. В.* Об упругопластическом состоянии толстостенной трубы из неоднородного материала под действием внутреннего давления / С. В. Тихонов // Вестник Самарского государственного университета, 2007. – № 6 (56). – С. 13-21.
- [5] *Целистова, Е. А.* Пространственное течение идеальнопластического слоя в случае неоднородных свойств материала / Е. А. Целистова // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. –1999. – № 7. – С. 45-47.
- [6] *Spenser, A. J. M.* Perturbation methods in plasticity. 1 : Plane strain of nonhomogeneous plastic solids / A. J. M. Spenser // J. Mech. and Phys. Solids. – 1961. – № 4.

*P. N. KUZNETSOV*

**ELASTOPLASTIC CONDITION OF PLAIN WITH APERTURES AND  
ECCENTRIC CIRCULAR NON-UNIFORM BODIES WITH BIAXIAL STRAIN**

*Chuvash state pedagogical university of I. J. Yakovleva*

**Abstract.** In the paper elastoplastic condition of plain with apertures and eccentric circular non-uniform bodies with biaxial strain is investigated. The flat deformation is observed. The elastoplastic limit, influence of elliptical non-uniform body on strained condition of a plain is investigated.

**Keywords:** plane deformation, stress tensor, plasticity, elasticity, elastoplastic limit, non-uniform body.

*Кузнецов Павел Николаевич*

*аспирант 2-го года обучения кафедры математического анализа Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева.*

*e-mail: kuznetsov\_pn@mail.ru*

*Kuznetsov Pavel Nikolaevich*

*post-graduate of the second year of dept. of mathematic analysis, Chuvash state pedagogical university of I. J. Yakovleva, Cheboxary, st. Karla Marksa, 38, 428000*