

С. В. Лавриков, О. А. Микенина, А. Ф. Ревуженко

## ОПИСАНИЕ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ НЕУПРУГИХ ТЕЛ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВЕКТОРА ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ И НЕАРХИМЕДОВОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Институт горного дела СО РАН, г. Новосибирск

**Аннотация.** В работе рассматривается общее описание плоского деформирования сред со структурой. Показано, что вместо тензора напряжений удобнее использовать вектор внутренних усилий. Моделирование структуры среды осуществляется на основе методов неархимедового анализа. Вводится пространство, координатные оси которого являются неархимедовыми прямыми. Строится замкнутая модель горного массива с двумя масштабными уровнями. Получено численное решение задачи о деформировании массива вблизи горизонтальной выработки.

**Ключевые слова:** плоская деформация, тензор напряжений, вектор внутренних усилий, внутренняя структура, неархимедово пространство, определяющие уравнения, замкнутая модель, горная порода, выработка, разупрочнение, алгоритм, численное моделирование.

УДК: 539.374

1. Внутренние усилия в твердых телах описываются с помощью тензора напряжений. Понятие напряжения является настолько привычным и удобным, что кажется, что оно является и единственно возможным для описания деформирования твердых тел. Можно, однако, указать один класс задач, в которых более естественным и удобным является альтернативный способ описания внутренних усилий. Во многих случаях модель плоского деформирования сводится к следующей системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} &= 0, & \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} &= 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= a_{11} \sigma_{11} + a_{12} \sigma_{22} + a_{13} \sigma_{12}, \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= a_{21} \sigma_{11} + a_{22} \sigma_{22} + a_{23} \sigma_{12}, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} &= a_{31} \sigma_{11} + a_{32} \sigma_{22} + a_{33} \sigma_{12}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}$  – компоненты тензора напряжений,  $u_1$ ,  $u_2$  – компоненты вектора перемещений,  $a_{11}$ , ...  $a_{33}$  – известные коэффициенты. Вместо смещений и напряжений в системе могут фигурировать их приращения. Тогда коэффициенты могут зависеть от напряжений, достигнутых на предыдущем шаге, а также от знака определенной комбинации приращений напряжений (в соответствии с

---

Поступила 12.02.2009

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, грант № 08-05-00543, и поддержке Сибирского Отделения РАН, интеграционный проект № 69.

критерием активного напряжения и разгрузки). В системе (1) первые два уравнения являются уравнениями равновесия, последующие три уравнения – это определяющие уравнения, связывающие напряжения с деформациями. Такая форма записи модели является классической. Однако, несмотря на это, данная форма записи является в определенном смысле патологической. Действительно, система (1) представляет собой пять дифференциальных уравнений, каждое из которых имеет первый порядок. Однако сводится она к уравнению не пятого, а четвертого порядка. Например, для упругого тела сводится к бигармоническому уравнению относительно функции Эри. Есть также признаки патологичности, связанные с механическим смыслом системы. В системе (1) “на равных” фигурируют все три напряжения  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}$ . Поэтому сам вид системы не исключает постановок краевых задач, когда, например, на границе  $x_1 = 0$  задается напряжение  $\sigma_{22}$ . С механической точки зрения подобные задачи, как известно, смысла не имеют. Однако при записи системы в форме (1) подобные “задачи” формально выглядят так же, как и задачи с заданными напряжениями  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{12}$ . Патологичность системы проявляется и при исследовании ее типа. Данные Коши для любой линии  $L$  всегда оказываются связанными между собой. Отсюда, конечно, не следует, что  $L$  – характеристика системы. Попытка же найти характеристики и соотношения на них наталкивается на значительные трудности. Все перечисленные признаки связаны между собой и приводят к одному выводу: модель (1) в своей сущности должна сводиться не к пяти, а только к четырем дифференциальным уравнениям первого порядка. Поэтому и независимых переменных должно быть не пять, а четыре. К искомой системе четырех “существенных” уравнений можно придти следующим образом. Зафиксируем некоторую точку  $O$ , принадлежащую телу, и соединим её с точкой  $A$  произвольной кривой  $OBA$ , также принадлежащей телу. Обозначим через  $\vec{f} = \{f_1, f_2\}$  усилие, которое действует на контур  $OBA$  со стороны нормали, показанной на рис. 1. Если взять другой контур  $OB'A$ , то усилие будет таким же (здесь необходимо предположить, что массовые силы отсутствуют). Таким образом, функция  $\vec{f}$  зависит только от координат точки  $A$ . Связь функции  $\vec{f}$  с напряжениями даётся формулами

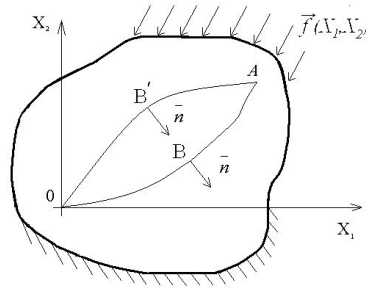


Рис. 1. Определение вектора внутренних усилий  $\vec{f}$

$$\sigma_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \quad \sigma_{12} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, \quad \sigma_{21} = -\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \quad \sigma_{22} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_1}. \quad (2)$$

Условие парности касательных напряжений приводит к уравнению

$$\operatorname{div} \vec{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0. \quad (3)$$

Таким образом, во всех построениях вектор  $\vec{f}$  может заменить тензор напряжений. При этом два уравнения равновесия относительно напряжений переходят в одно уравнение (3) относительно компонент вектора  $\vec{f}$ . Система (1) приобретает следующий вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} &= 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= a_{11} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - a_{12} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - a_{13} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= a_{21} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - a_{22} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + a_{23} \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} &= a_{31} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - a_{32} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - a_{33} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Данная система имеет целый ряд преимуществ перед стандартной системой (1). Во-первых, она содержит только четыре уравнения первого порядка и соответствующая матрица вырожденной не является. Исследование ее типа и вывод соотношений вдоль характеристик никаких трудностей не представляет. (Нетрудно заметить, что при  $a_{22} = 0$  второе уравнение содержит только производные по  $x_2$ ). Кинематическое и силовое описание процесса деформирования на языке (4) является симметричным: в обоих случаях речь идет о векторных полях  $\vec{u}$  ( $x_1, x_2$ ) и  $\vec{f}$  ( $x_1, x_2$ ). Появляется симметрия и в способе задания краевых условий. Например, задание на границе  $x_1 = 0$  вектора  $\vec{f}$  ( $x_2$ ) равносильно заданию напряжений  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{12}$  и “автоматически” исключает задание компоненты  $\sigma_{22}$ . Однако основное преимущество в использовании функции  $\vec{f}$  проявляется при описании деформирования сплошных сред со структурой.

**2.** Последовательное развитие моделей сплошных сред со структурой приводит к выводу о том, что для их адекватного описания многомасштабной структурой необходимо наделять само пространство. В механике используется концепция арифметического пространства (точка – это тройка вещественных чисел). Поэтому построение арифметического пространства со структурой сводится к построению числовой системы со многими масштабными уровнями. Будем опираться на числовую систему [1, глава 4], [4]. Опишем ее, используя идеи работы П.К. Рашевского [5].

В основе числовых систем лежит натуральный ряд

$$1, 2, 3, \dots, 10^{23}, 10^{23} + 1, \dots$$

Формально все числа данного ряда имеют одинаковый статус. Например, пара чисел 10, 11 является по статусу такой же, как и пара  $10^{23}$  и  $10^{23} + 1$ . При этом переход от чисел 10, 11, ... к числу  $10^{23}$  осуществляется по шагам. Прибавляя к 11 единицу, затем еще единицу, мы, в конце концов, приходим к числу  $10^{23}$ , затем к числу  $10^{23} + 1$  и т.д. Но это только теоретически. Практически же ясно, что переход к числу  $10^{23}$  всегда будет осуществляться скачком. При этом, если говорить о прикладной математике, то любому специалисту в этой области ясно, что и статус чисел  $10^{23}$ ,  $10^{23} + 1$  становится совсем не таким же как чисел 10, 11. Основная идея [5] состоит в том, что указанное различие должно быть введено и в теоретическую математику. Построения [1, 4] в определенном смысле выполнены именно в данном направлении.

Вернемся к натуральному числу  $10^{23}$ .  $10^{23}$  – это порядок числа молекул газа в закрытой трехлитровой емкости. Каким образом физик “добрался” до этого числа? Его можно представить таким образом. Вначале было число 1. Например, изучалось поведение одной молекулы газа в закрытой емкости. Затем было число 2 – изучалось столкновение двух молекул. Затем, может быть, были числа 3 и 4. И затем был совершен скачок сразу к числу  $10^{23}$ . Есть все основания считать, что в результате этого мы перешли к новой реальности. Раньше это были отдельные молекулы, теперь – это объемы газа в литрах. В этой новой реальности говорить о числах  $10^{23} + 1$ ,  $10^{23} + 2$  уже нет никакого смысла. Но в новой реальности имеют вполне определенный смысл числа  $0,5 \cdot 10^{23}$ ,  $2 \cdot 10^{23}$  и т.д. То есть мы видим, что в новой реальности число  $10^{23}$  выступает уже как масштаб этой реальности. (То же самое относится и к движению “вглубь”, например, от чисел 1,  $1/2$ ,  $1/3$  к числам нового масштаба  $1/10^{13}$ ,  $1/(2 \cdot 10^{13})$  и т.д.). Примем, что главным здесь является тот факт, что переход к новой реальности совершается не по шагам ( $1 + 1 + \dots + 1 = 10^{23}$ ), а обязательно скачком. Это означает, что реальности различных масштабных уровней всегда разделены барьером, который мы обозначаем многоточием.

Основное свойство данного “многоточия” состоит в том, что его невозможно преодолеть, двигаясь единичными шагами. Следует, однако, подчеркнуть, что это относится только к практической стороне дела. Теоретически же переход “по шагам” всегда возможен. Более того, именно эта возможность (через аксиому индукции) лежит в основе математического анализа. Следовательно, проблема состоит в том, чтобы построить такую числовую систему, в которой барьер между разными уровнями невозможно было бы преодолеть (единичными шагами) и теоретически. Такая постановка вопроса приводит к следующему однозначному выводу: в числовой системе со многими масштабными уровнями должно содержаться число, которое было бы больше любого натурального числа, получаемого последовательным прибавлением единицы к числу 1. Таким образом, в числовой системе со многими масштабами обязательно должно быть снято ограничение, диктуемое аксиомой Архимеда. Следовательно, числовая система должна содержать актуальное бесконечно большое и бесконечно малое числа ( $\omega$  и  $E = 1/\omega$ ). Данные числа и управляют переходами к новым масштабным уровням числовой системы.

Рассматривая числа из данной системы в качестве координат точек, можно придти к пространству, которое характеризуется иерархией масштабных уровней. В данном пространстве можно исследовать различные процессы, в том числе и процессы деформирования “сплошных” сред со структурой.

**3.** Ограничимся двумя масштабными уровнями – вещественным и первым микроуровнем. В плоском случае имеем

$$X_1 = x_1 + \xi_1, \quad X_2 = x_2 + \xi_2, \quad (5)$$

где  $X_1, X_2$  – декартовы координаты,  $\xi_1 = y_1 E$ ,  $\xi_2 = y_2 E$ , переменные  $x_1, x_2, y_1, y_2$  – это обычные вещественные числа, а  $E = 1/\omega$  – актуальное бесконечно малое число. Это означает, что  $0 < E < 1/n$  для любого натурального  $n = 1, 2, 3 \dots 10^{13}, \dots 10^{23}, \dots$ . Таким образом, в окрестности каждого вещественного числа появилась целая окрестность пространства “вглубь”, т.е. появился новый масштабный уровень.

Пусть  $\vec{u}$  – вектор перемещений. В классическом варианте вектор  $\vec{u}$  мог зависеть только от двух вещественных переменных (везде рассматривается плоская деформация). Производные от компонент вектора определяли тензор деформаций и

поворот. Теперь вектор перемещений зависит от четырех пространственных координат (и это, по-прежнему, в плоском случае):

$$\vec{u} = \vec{u}(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2). \quad (6)$$

Производные по переменным  $\xi_1, \xi_2$  определяют компоненты микродеформаций, производные по  $x_1, x_2$  – компоненты макродеформаций:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i} \right), \quad i, j = 1, 2.$$

Их разности (наряду с разностью поворотов) дают описание кинематики процессов, которые происходят на стыке разных масштабных уровней.

Вопрос о напряжениях гораздо сложнее. Ряд трудностей удаётся снять, если вместо напряжений ввести функцию  $\vec{f}$ , имеющую смысл главного вектора внутренних усилий.

Пусть функция  $\vec{f}$  зависит от четырёх переменных:  $f_1 = f_1(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2)$ ,  $f_2 = f_2(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2)$ . Её производные по  $x_1, x_2$  – это напряжения вещественного масштабного уровня, производные по  $\xi_1, \xi_2$  – напряжения микроуровня:

$$t_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial \xi_2}, \quad t_{12} = \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2}, \quad t_{21} = -\frac{\partial f_1}{\partial \xi_1}, \quad t_{22} = -\frac{\partial f_2}{\partial \xi_1}.$$

Отсюда сразу следуют условия совместности напряжений, которые получить другим способом было бы весьма затруднительно:

$$\frac{\partial t_{11}}{\partial x_2} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \xi_2}, \quad \frac{\partial t_{12}}{\partial x_2} = \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \xi_2}, \quad \frac{\partial t_{21}}{\partial x_1} = \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \xi_1}, \quad \frac{\partial t_{22}}{\partial x_1} = \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \xi_1}.$$

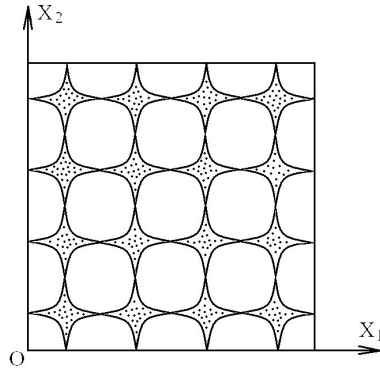


Рис. 2. Зёрненная структура геосреды на микроуровне

Перейдём к определяющим уравнениям. Как известно, для их формулировки необходимо привлечение экспериментальных данных, гипотез о механизме деформирования среды и т.д. Будем исходить из упруго-пластической модели горной породы [3]. Пусть эффективная регулярная упаковка несущих зёрен (частиц) ориентирована вдоль координатных осей (рис. 2). В неархимедовой плоскости (5) производным по координатам  $x_1, x_2$  соответствуют осреднённые деформации, взятые на базе, относящейся к центрам частиц. Производным по переменным  $\xi_1, \xi_2$

соответствуют деформации самих частиц (микродоформации). Различия в данных производных описывают проскальзывания на контактах между частицами.

Рассмотрим структуру определяющих уравнений. Влиянием поровой среды пренебрежём. Отсюда следует, что  $t_{ij} = \sigma_{ij}$ , или

$$\frac{\partial f_i}{\partial \xi_j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}. \quad (7)$$

Не видно большого смысла учитывать неоднородность деформаций и напряжений в пределах отдельных частиц. В [3] используются осреднённые характеристики частиц и предположение об их упругом поведении. С учётом (2), (7) закон Гука для плоской деформации можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} = e_{11} &= \frac{1-\nu}{2\mu} \cdot \frac{\partial f_1(x_1, x_2, 0, 0)}{\partial \xi_2} + \frac{\nu}{2\mu} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \xi_1}, \\ \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} = e_{22} &= -\frac{1-\nu}{2\mu} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \xi_1} - \frac{\nu}{2\mu} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \xi_2}, \\ \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} &= 2e_{12} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2}, \end{aligned} \quad (8)$$

здесь  $\nu, \mu$  – упругие постоянные.

Уравнения для проскальзываний между зёрнами [3] имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1(x_1, x_2, 0, 0)}{\partial x_1} &= \frac{\partial u_1(x_1, x_2, 0, 0)}{\partial \xi_1}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2}, \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} &= -\frac{1}{G_1} \frac{\partial f_1(x_1, x_2, 0, 0)}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} = -\frac{1}{G_2} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $G_1, G_2$  – пластические модули. Первые два уравнения констатируют отсутствие дилатансии, последние два – описывают независимые проскальзывания на контактах из различных семейств (см. рис. 2).

Подведем итог. Получена система, которая включает в себя одно уравнение вида (4, первое уравнение), четыре уравнения (7), три уравнения (8) и четыре уравнения (9), т.е. получено 12 уравнений относительно четырёх неизвестных функций  $f_i, u_i, i = 1, 2$ . Система, тем не менее, переопределённой не является. Всё дело в том, что каждая из функций зависит не от двух, а от четырёх аргументов:  $f_i = f_i(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2)$ ,  $u_i = u_i(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2)$ . Природа “дополнительных” уравнений связана именно с новыми пространственными переменными, которые появляются в неархимедовом случае. Например, пусть известно, что тело является линейно упругим на вещественном масштабном уровне. Этот факт описывается четырьмя уравнениями. Пусть, кроме того, известно, что имеет место непрерывность между вещественным и первым микроуровнем. Для описания этого факта требуется уже восемь уравнений

$$\frac{\partial f_i(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2)}{\partial x_j} = \frac{\partial f_i}{\partial \xi_j}, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j}. \quad (10)$$

Решение данных уравнений имеет вид:

$$f_i = f_i(x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2), \quad u_i = u_i(x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2). \quad (11)$$

Таким образом, восемь уравнений (10) содержат только ту информацию, что компоненты векторов  $\vec{f}$  и  $\vec{u}$  в действительности зависят не от четырёх, а только от двух пространственных переменных. В результате приходим к четырём уравнениям упругости относительно четырёх функций (11). Каждая из функций зависит только от двух пространственных координат. Система замкнута, задача корректна.

В рассматриваемой модели ситуация будет аналогичной. Из уравнений (8) следует, что

$$\begin{aligned} u_1 &= e_{11}(x_1, x_2) \cdot \xi_1 + e_{12}(x_1, x_2) \cdot \xi_2 - \Omega(x_1, x_2) \cdot \xi_2 + U_1(x_1, x_2), \\ u_2 &= e_{22}(x_1, x_2) \cdot \xi_2 + e_{12}(x_1, x_2) \cdot \xi_1 + \Omega(x_1, x_2) \cdot \xi_1 + U_2(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь  $\Omega, U_i$  – произвольные функции своих аргументов:  $\Omega$  имеет смысл собственного вращения зёрен,  $U_i$  – компонент перемещений центров зёрен. Подстановка (12) в (9) приводит к системе

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1(x_1, x_2, 0, 0)}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(x_1, x_2, 0, 0)}{\partial x_2} &= 0, \\ \frac{\partial U_1}{\partial x_1} &= e_{11}, \quad \frac{\partial U_2}{\partial x_2} = e_{22}, \\ \frac{\partial U_2}{\partial x_1} - e_{12} - \Omega &= -\frac{1}{G_1} \cdot \frac{\partial f_1(x_1, x_2, 0, 0)}{\partial x_1}, \\ \frac{\partial U_1}{\partial x_2} - e_{12} + \Omega &= -\frac{1}{G_2} \cdot \frac{\partial f_1(x_1, x_2, 0, 0)}{\partial x_1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, в результате получена система пяти уравнений относительно следующих пяти неизвестных функций:  $f_1, f_2, U_1, U_2, \Omega$ . Система замкнута. На части границы задается вектор  $\vec{u}(x_1, x_2, 0, 0)$ , на другой части вектор  $\vec{f}(x_1, x_2, 0, 0)$ . Последнее соответствует заданным граничным напряжениям.

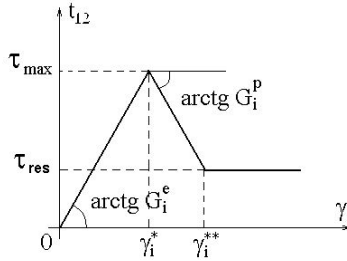


Рис. 3. Диаграмма межзёрненного проскальзывания

Определим теперь условия скольжения между зёрнами. Предположим, что эти условия представляют собой нелинейные зависимости касательных напряжений  $t_{ij}$  и величин проскальзывания  $\gamma_i = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  вдоль контактов,  $i, j = 1, 2; i \neq j$ . Здесь  $i$  – номер контакта из двух различных семейств. Скольжение включает в себя три стадии: упрочнение, разупрочнение и стадию остаточной прочности. Следует отметить, что проскальзывания вдоль контактов из различных семейств независимы, т.е. в общем случае  $\gamma_1 \neq \gamma_2$ . Диаграмма, характеризующая указанные условия, показана на рис. 3. В силу нелинейности диаграммы уравнения необходимо записать в приращениях:

$$\Delta t_{12} = G_1 \left( \frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \Delta u_1}{\partial x_2} \right), \quad \Delta t_{12} = G_2 \left( \frac{\partial \Delta u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_1} \right), \quad (14)$$

где пластические модули  $G_i$ , определяются через заданные константы  $\gamma_i^*, \gamma_i^{**}, G_i^e, G_i^p$  (см. рис. 3) следующим образом

$$G_i = \begin{cases} G_i^e, & 0 \leq \gamma_i < \gamma_i^*, \\ -G_i^p, & \gamma_i^* \leq \gamma_i < \gamma_i^{**}, \\ 0, & \gamma_i^{**} \leq \gamma_i, \end{cases} \quad i = 1, 2.$$

Следовательно, используя систему (13), переписанную в приращениях, условия (14) и (5), можно выписать определяющие уравнения модели в приращениях:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta U_1}{\partial x_1} &= \frac{1-\nu}{2\mu} \frac{\partial \Delta f_1}{\partial x_2} + \frac{\nu}{2\mu} \frac{\partial \Delta f_2}{\partial x_1}, \\ \frac{\partial \Delta U_2}{\partial x_2} &= -\frac{1-\nu}{2\mu} \frac{\partial \Delta f_2}{\partial x_1} - \frac{\nu}{2\mu} \frac{\partial \Delta f_1}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial \Delta U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \Delta U_2}{\partial x_1} &= \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} \right) \frac{\partial \Delta f_2}{\partial x_2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Как уже отмечалось, уравнения (15) записаны в системе координат, связанной с эффективной регулярной упаковкой зёрен. Это означает, что определяющие уравнения модели имеют форму (15) только в системе координат, ориентированной вдоль линий эффективной упаковки зёрен. Иными словами, приведённая модель описывает анизотропную среду. Для формулировки общей замкнутой системы определяющие уравнения необходимо перепроектировать в произвольную систему координат, повернутую относительно исходной на произвольный угол  $\alpha$ , который будет иметь смысл угла естественного напластования горных пород, и замкнуть ее уравнением равновесия (3). Таким образом, окончательно замкнутая модель в приращениях примет следующий вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Delta f_2}{\partial x_2} &= 0, \\ \frac{\partial \Delta U_1}{\partial x_1} &= A_{11} \frac{\partial \Delta f_1}{\partial x_2} - A_{12} \frac{\partial \Delta f_2}{\partial x_1} + A_{13} \frac{\partial \Delta f_2}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial \Delta U_2}{\partial x_2} &= A_{21} \frac{\partial \Delta f_1}{\partial x_2} - A_{22} \frac{\partial \Delta f_2}{\partial x_1} + A_{23} \frac{\partial \Delta f_2}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial \Delta U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \Delta U_2}{\partial x_1} &= A_{31} \frac{\partial \Delta f_1}{\partial x_2} - A_{32} \frac{\partial \Delta f_2}{\partial x_1} + A_{33} \frac{\partial \Delta f_2}{\partial x_2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь, как и ранее,  $\Delta U_1, \Delta U_2$  – приращения компонент вектора перемещений центров зёрен,  $\Delta f_1, \Delta f_2$  – приращения компонент вектора внутренних усилий. Коэффициенты  $A_{ij}$  зависят от напряжений и деформаций на предыдущем шаге нагружения:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{(1-\nu)}{2\mu} - \frac{q}{2} \sin^2(2\alpha), \quad A_{12} = \frac{-\nu}{2\mu} + \frac{q}{2} \sin^2(2\alpha), \quad A_{13} = q \sin(2\alpha) \cos(2\alpha), \\ A_{21} &= \frac{-\nu}{2\mu} + \frac{q}{2} \sin^2(2\alpha), \quad A_{22} = \frac{1-\nu}{2\mu} - \frac{q}{2} \sin^2(2\alpha), \quad A_{23} = -q \sin(2\alpha) \cos(2\alpha), \\ A_{31} &= q \sin(2\alpha) \cos(2\alpha), \quad A_{32} = -q \sin(2\alpha) \cos(2\alpha), \quad A_{33} = 1/\mu - 2q \cos^2(2\alpha), \end{aligned} \quad (17)$$

где  $q = -0.5 \left( 1/G_1 + 1/G_2 \right)$ ,  $\alpha$  – угол естественного напластования горных пород. В дальнейшем он считается известным из данных натуральных наблюдений.

Таким образом, уравнения (16), (17) представляют собой замкнутую модель для расчета одного шага по приращению параметра нагружения. Общее решение будем строить в виде суммы решений, полученных на каждом шаге нагружения.

Хорошо известно, что численные расчёты в задачах с учётом разупрочнения (ниспадающие ветви) могут приводить к парадоксальным результатам. Это связано с тем, что с физической точки зрения в среде могут происходить динамические скачки (динамическое неконтролируемое высвобождение накопленной упругой энергии), в то время как линейная для приращений численная схема не описывает динамические эффекты. Условие возникновения динамического скачка связано с



наклоном ниспадающей ветви диаграммы (параметр  $G^p$ ). Иными словами, существует критическое значение параметра  $G^p$ , такое, что если реальный параметр меньше критического, то деформирование протекает устойчиво. В противном случае в среде будут наблюдаться динамические эффекты.

В описанной выше модели для ситуации, когда один из контактов (в данном случае  $i$ -контакт) уже разупрочняется (ниспадающий участок), а другой ( $j$ -контакт) – продолжает упрочняться (восходящий участок), условие устойчивости формулируется в виде неравенства:

$$G_i^p < \frac{\mu \cdot G_j^e}{\mu + G_j^e}. \quad (18)$$

В случае, когда оба контакта вышли на стадию разупрочнения, условие устойчивости примет вид:

$$\frac{G_1^p \cdot G_2^p}{G_1^p + G_2^p} < \mu. \quad (19)$$

Выполнение условий (18) и (19) означает, что деформирование будет протекать устойчиво без динамических эффектов. В этом случае описанная схема расчёта приведёт к корректным результатам. Если же условия (18) и (19) не выполняются, тогда необходимо вносить корректировку в описанный численный алгоритм [4]. В данной работе ограничимся рассмотрением только устойчивого поведения.

4. На основе описанной модели разработаны конечно-элементный алгоритм и компьютерная программа, позволяющие численно исследовать плоское напряжённо-деформированное состояние массива горных пород. Рассмотрим задачу о деформировании горного массива вокруг горизонтальной протяжённой выработки. В качестве расчетной области рассмотрим зону  $r \leq R$ , окружающую выработку арочного сечения, как показано на рис. 4. Параметр нагружения определим в виде радиального перемещения  $V$ , заданного на внешней границе области деформирования  $r = R$ .  $V > 0$  соответствует направлению к центру выработки. Внутреннюю границу выработки будем считать от напряжений свободной. Краевые условия имеют следующий вид

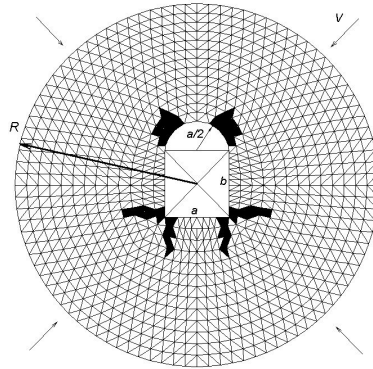


Рис. 4. Картина деформирования для угла анизотропии  $\alpha = 0^\circ$

$$\begin{aligned}\Delta U_r|_{r=R} &= -V, & \Delta \sigma_n|_{\Gamma} &= 0, \\ \Delta U_\theta|_{r=R} &= 0, & \Delta \tau_n|_{\Gamma} &= 0,\end{aligned}$$

где  $\Delta U_r, \Delta U_\theta$  – приращения компонент вектора перемещений в полярных координатах,  $\Delta \sigma_n, \Delta \tau_n$  – приращения соответственно нормального и касательного напряжений,  $\Gamma$  – внутренняя граница расчетной области, геометрия которой однозначно определяется заданными постоянными  $a, b$  в соответствии с рис. 4. Примем, что в начальный момент времени

$$\sigma_{ij}^0 = 0, \quad u_i^0 = 0, \quad \gamma_i^0 = 0,$$

верхний индекс означает номер итерации (номер шага нагружения).

Рассмотрим примеры расчетов. Выберем следующие параметры задачи

$$\begin{aligned}R/b &= 3, 5; & a/b &= 1 & \nu &= 0, 2; & \mu &= 5 \cdot 10^4 \text{ МПа}; \\ \gamma_1^* &= \gamma_2^* = 0, 001; & \gamma_1^{**} &= \gamma_2^{**} = 0, 01; \\ \tau_{\max} &= 50 \text{ МПа}; & \tau_{res} &= 0 \text{ МПа}; & \alpha &= 0^0.\end{aligned}$$

Выбранные параметры гарантируют выполнение условий устойчивости (18) и (19). Численное решение приводит к картине деформирования, показанной на рис. 4. Здесь незакрашенные области соответствуют ситуации, когда диаграмма контактного взаимодействия зёрен (см. рис. 3) находится на восходящем участке (стадия упрочнения), серым цветом отмечены области массива, в которых диаграмма вышла на ниспадающий участок (разупрочнение), черным цветом показаны области, соответствующие горизонтальному участку диаграммы (остаточная прочность). В процессе нагружения зоны разупрочнения и остаточной прочности зарождаются на поверхности выработки, причем вначале зарождается сразу четыре не связанные между собой зоны в направлениях анизотропии массива. При дальнейшем нагружении эти зоны последовательно одна за другой развиваются вглубь массива, окружающего выработку, имея тенденцию к объединению на поверхности выработки (см. рис. 4).

Из приведенного рисунка видно, что если в начальный момент времени напряженное состояние определяется в основном геометрией выработки, то в дальнейшем существенное влияние на него оказывает анизотропия массива: области разупрочнения и остаточной прочности развиваются в виде полос, наклонённых к оси  $Ox_1$  под углом напластования пород  $\alpha$  и ортогональном ему направлению.

В рассмотренных примерах расчёта угол напластования массива был принят равным  $\alpha = 0^0$ . Такие же картины будут наблюдаться в случае  $\alpha = 90^0$  в силу взаимной ортогональности различных семейств контактов. В этом смысле противоположная ситуация будет иметь место при значении  $\alpha = 45^0$ . Результат расчетов для угла напластования пород  $\alpha = 45^0$  показан на рис. 5.

### Выводы:

1. Классическая форма записи системы уравнений плоского деформирования является вырожденной, так как пять дифференциальных уравнений первого порядка (два уравнения равновесия и три уравнения связи между напряжениями и деформациями) сводятся к одному уравнению только четвертого порядка. Поэтому вместо тензора напряжений удобнее использовать вектор внутренних усилий. В

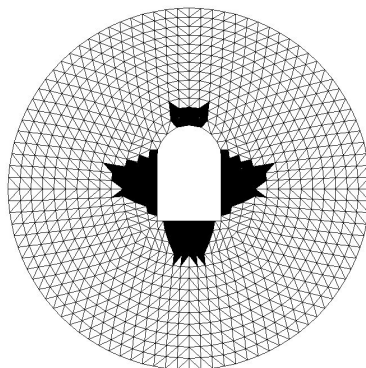


Рис. 5. Картина деформирования для угла анизотропии  $\alpha = 45^\circ$

этом случае модель сводится к системе четырёх уравнений, которая является более приемлемой для исследования и последующих обобщений.

2. Последовательное развитие моделей сред со структурой приводит к необходимости наделять внутренней структурой саму независимую переменную, а значит, и само пространство. Показано, что с использованием подобных (неархимедовых) переменных можно строить замкнутые модели горных пород.

3. Рассмотрена конкретная модель, включающая в себя два структурных уровня, учитывающая анизотропию и возможность разупрочнения на контактах между упругими несущими зёрнами. Численно решена задача о деформировании массива в зоне, окружающей горизонтальную протяжённую выработку. Построены картины деформирования, отражающие развитие областей разупрочнения и областей потери сдвиговой прочности.

#### ЛИТЕРАТУРА

[1] *Андреев, А. Н.* Механика - от дискретного к сплошному / А. Н. Андреев и др. – Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2008. – 343с.

[2] *Лавриков, С. В.* Моделирование процессов деформирования массива горных пород с использованием методов неархимедового анализа / С. В. Лавриков, О. А. Микенина, А. Ф. Ревуженко // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. – 2008. – № 1. – С. 3-16.

[3] *Рашевский, П. К.* О догмате натурального ряда / П. К. Рашевский // Успехи математических наук. – 1973. – №. 28. – Вып. 4 (172). – С. 243-246.

[4] *Ревуженко, А. Ф.* Механика упругопластических сред и нестандартный анализ / П. К. Ревуженко. – Новосибирск : Изд-во Новосибир. ун-ета, 2000. – 423 с.

[5] *Лавриков, С. В.* Концепция неархимедова многомасштабного пространства и модели пластических сред со структурой / С. В. Лавриков и др. // Физическая мезомеханика. – 2008. – Т. 11. – № 3. – С. 45-60.

S.V. LAVRIKOV, O.A. MIKENINA, A.F. REVUZHENKO

**DESCRIPTION OF PLANE DEFORMATION OF NON-ELASTIC BODIES  
USING THE VECTOR OF INTERNAL FORCES AND NON-ARCHIMEDEAN  
MATHEMATICAL ANALYSIS**

*Mining Institute of Siberian Branch of RAS, Novosibirsk*

**Abstract.** In the paper the general description of plane deformation of media with structure is considered. It is shown that it is more convenient to use the vector of internal forces instead stress tensor. The modeling of medium structure is carried out on the basis of methods of non-Archimedean analysis. The space, coordinate axes of which are non-Archimedean straight lines is introduced. The closed model of mining rock with two scale levels is designed. The numerical solution of the problem about deformation of rock massive near horizontal opening is obtained.

**Keywords:** plane deformation, stress tensor, vector of internal forces, internal structure, non-Archimedean space, constitutive equations, closed model, mining rock, opening, softening, algorithm, numerical simulation.

*Лавриков Сергей Владимирович*

*кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института горного дела СО РАН г. Новосибирск*

**e-mail:** lvk64@mail.ru

*Микенина Ольга Александровна*

*кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник Института горного дела СО РАН г. Новосибирск*

**e-mail:** revuzhenko@yandex.ru

*Ревуженко Александр Филиппович*

*доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией Института горного дела СО РАН г. Новосибирск*

**e-mail:** revuzhenko@yandex.ru

*Lavrikov Sergey Vladimirovich*

*doctor of philosophy, senior scientific employee of Institute of mining of the Siberian Branch of the Russian Academy of Science, Novosibirsk*

*Mikenina Olga Aleksandrovna*

*doctor of philosophy, younger scientific employee of Institute of mining of the Siberian Branch of the Russian Academy of Science, Novosibirsk*

*Revuzhenko Alexander Filippovich*

*doctor of science, professor, managing laboratory of Institute of mining of the Siberian Branch of the Russian Academy of Science, Novosibirsk*