

А. А. Петров, В. Г. Теличко, А. А. Трещев

## ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ ТОНКИХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН ИЗ РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩИХСЯ МАТЕРИАЛОВ В УСЛОВИЯХ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ

*Тульский государственный университет*

**Аннотация.** Предлагается математическая модель расчета изгиба тонких прямоугольных пластин, выполненных из разнородных материалов, свойства которых зависят от изменений температуры. Получены разрешающие уравнения и численное решение методом конечных элементов с использованием пакета FlexPDE 5 (PDE Solutions Inc.).

**Ключевые слова:** Механика материалов, изгиб тонких пластин, термомеханическое нагружение, разнородные материалы, связанная задача термоупругости, метод конечных элементов.

УДК: 539.734

За сорок лет интенсивного развития механики материалов, учитывающей чувствительность их механических характеристик к виду напряженного состояния, было предложено достаточно большое количество определяющих соотношений разнородных сред, базирующихся на различных технических гипотезах. Однако, несмотря на всю глубину теоретических проработок моделей теории деформирования разнородных сред, совершенно недостаточно внимания уделено зависимости от вида напряженного состояния такой характеристики материала, как коэффициент линейного температурного расширения и в целом разномодульной теории упругости. Между тем как, например, в работах П. Е. Харта [3] было показано, что для некоторых марок графита коэффициенты линейного температурного расширения могут различаться на 100 и более процентов в зависимости от вида реализованного напряженного состояния.

В работе Н. М. Матченко и А. А. Трещева [1] в рамках закона теплопроводности Фурье и классических условий динамического равновесия получены основные дифференциальные уравнения разномодульной теории термоупругости: уравнение теплопроводности, включающее в связанном случае учет влияния вида напряженного состояния, и уравнения динамического равновесия. Также в этой работе решены следующие задачи термоупругости: о плоском деформированном состоянии полого разномодульного цилиндра при нестационарных термосиловых воздействиях, об осесимметричном напряженно-деформированном состоянии полого разномодульного цилиндра при стационарных термосиловых воздействиях.

---

Поступила 31.03.2008

Используя аналогичную методику, в данной работе получены разрешающие уравнения для решения связанной задачи о расчете плосконапряженного состояния прямоугольных пластин из материалов с усложненными свойствами в условиях термомеханического нагружения.

Уравнения состояния термоупругого изотропного разнсопротивляющегося материала представлены следующими формулами:

$$e_{ij} = \frac{2}{3}\tilde{b}_2\sigma_{ij} + \frac{2}{3}(\tilde{b}_1 - \tilde{b}_2)\sigma\delta_{ij} + \frac{1}{3}b_{t2}\delta_{ij}\theta^\circ + T_{tij}, \quad (1)$$

$$L = (b_{t1}\xi + \beta_{t2})\sigma + b_{t1}\eta\tau + \frac{d\Gamma}{dT}, \quad (2)$$

$$T_{tij} = \frac{1}{3} \left[ 2\tilde{b}_3\xi(1 + 0,5\eta^2) + \frac{\eta^2}{\xi}(\tilde{b}_4\eta^2 + 1,5\sqrt{2\tilde{b}_5}) - \tilde{b}_5\eta^3 \cos 3\varphi \right] \sigma\delta_{ij} + \\ + \frac{1}{3} \left[ 2(\tilde{b}_4\xi + \tilde{b}_5\eta \cos 3\varphi) - (\tilde{b}_3\xi^2 + \tilde{b}_4\eta^2) - \tilde{b}_5(3 - \eta\xi^2) \cos 3\varphi + 3\sqrt{2\tilde{b}_5}\mu_{ij} \right] \times, \quad (3) \\ \times S_{ij} + \frac{1}{3}(\sqrt{3}b_{t1}\alpha_{ij} + \delta_{ij}b_{t2})\theta^\circ$$

где  $e_{ij}$  – деформации,  $\sigma_{ij}$  – напряжения,  $\tilde{b}_i$ ,  $b_{ti}$  – константы потенциала [1],  $\alpha_{ij}$  – нормированные напряжения,  $\cos 3\varphi$  – фазовый инвариант,  $\eta$  и  $\xi$  – гармонические функции, которые трактуются как нормированные нормальные и касательные напряжения на октаэдрической площадке,  $L$  – плотность энтропии,  $\Gamma$  – потенциал Гиббса,  $T$  – температура тела.

Выражения (1) – (3) можно получить, применив операции дифференцирования по формулам  $e_{ij} = -\frac{\partial\Gamma}{\partial\sigma_{ij}}$  и  $L = \frac{\partial\Gamma}{\partial T}$  к термодинамическому потенциалу Гиббса  $\Gamma = \Gamma(\sigma_{ij}, T)$  [1].

Обрацая для выражений деформаций (1) линейные члены уравнений, получим

$$\sigma_{ij} = (D_1 + D_2)e_{ij} - 3D_2e\delta_{ij} - D_3\theta^0\delta_{ij} - H_{ij}, \quad (4)$$

где  $e = \frac{1}{3}(e_{11} + e_{22} + e_{33})$ ,  $\sigma_{ij} = (D_1 + D_2)e_{ij} - 3D_2e\delta_{ij} - D_3\theta^0\delta_{ij} - H_{ij}$ ,  $D_1 = \frac{A+C}{(A-C)(A+2C)} = \frac{(\tilde{b}_1 - \tilde{b}_2)}{\tilde{b}_1\tilde{b}_2}$ ,  $D_2 = \frac{C}{(A-C)(A+2C)} = \frac{(\tilde{b}_1 - \tilde{b}_2)}{2\tilde{b}_1\tilde{b}_2}$ ,  $D_3 = \frac{A_t}{A+2C} = 2b_{t2}/9\tilde{b}_1$ ,  $H_{ij} = (D_1 + D_2)T_{ij} - D_2T\delta_{ij}$ ,  $T = T_{ij}\delta_{ij}$ ,  $A_t = 0,5(\alpha_{t1}^+ + \alpha_{t1}^-)$ ,  $B_t = 0,5(\alpha_{t1}^+ - \alpha_{t1}^-)$ ,  $\alpha_{t1}^+$ ,  $\alpha_{t1}^-$  – коэффициенты линейного теплового расширения в продольном и поперечном направлениях соответственно.

Рассматривая плоское напряженное состояние с параметрами  $\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ , из формулы (4) можно выразить деформации  $e_{33}$ ,  $e_{23}$  и  $e_{23}$ :

$$e_{33} = \frac{1}{D_1}(H_{33} + \theta^0 D_3 D_2(e_{11} + e_{22})), \quad e_{13} = \frac{H_{13}}{D_1 + D_2}, \quad e_{23} = \frac{H_{23}}{D_1 + D_2}. \quad (5)$$

Таким образом, можно получить зависимости для любой поверхности пластины в форме:

$$\sigma_{11} = (D_1 + D_2)e_{11} - D_2 \left( e_{11} + e_{22} + \frac{1}{D_1}(H_{33} + \theta^0 D_3 + D_2(e_{11} + e_{22})) \right) - D_3 - H_{11}, \\ \sigma_{22} = (D_1 + D_2)e_{22} - D_2 \left( e_{11} + e_{22} + \frac{1}{D_1}(H_{33} + \theta^0 D_3 + D_2(e_{11} + e_{22})) \right) - D_3 - H_{22}, \\ \sigma_{12} = (D_1 + D_2)e_{22} - H_{12}. \quad (6)$$

Для этой же поверхности имеют место гипотезы Кирхгофа в форме

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} + x_3 \chi_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \chi_{ij} = -w_{,ij}. \quad (7)$$

Учитывая записанное выше, можно перейти к определениям усилий в срединной поверхности по формулам:

$$N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} dx_3, \quad M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} x_3 dx_3. \quad (8)$$

Для этих усилий имеем уравнения статики (с учетом продольных усилий в срединной плоскости):

$$\begin{aligned} N_{11,1} + N_{12,2} &= 0, \\ N_{12,1} + N_{22,2} &= 0, \\ M_{11,11} + 2M_{12,12} + M_{22,22} &= -q(x_1, x_2) - N_{11}w_{,11} - 2N_{12}w_{,12} - N_{22}w_{,22}. \end{aligned} \quad (9)$$

Для температуры также имеется уравнение притока тепла в форме [1]:

$$\lambda \theta_{,ii}^{\circ} - C_{\sigma} \theta_{,t}^{\circ} - (3A_t \sigma_{,t} + B_t S_{,t}) T_0 + U = 0. \quad (10)$$

Уравнение (10) следует переписать в перемещениях с учетом отсутствия локальных источников тепла  $U$  и зависимостей:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{ij}, \quad S = \sqrt{\sigma_{ij} \sigma_{ij}}, \quad S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma, \quad \tau = \sqrt{\frac{1}{3} S_{ij} S_{ij}}, \\ S_0 &= \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}, \quad \xi = \frac{\sigma}{S_0}, \quad \eta = \frac{\tau}{S_0}, \quad S_0 = \frac{S}{\sqrt{3}}, \quad \xi^2 + \eta^2 = 1. \end{aligned}$$

где  $S$  – вектор полного напряжения.

Подставляя уравнение (8) в (9), и учитывая (4), (5), (6), (7) можно получить замкнутую систему уравнений равновесия пластины прямоугольной формы в перемещениях. Полученные уравнения равновесия и уравнение притока тепла образуют полную систему дифференциальных уравнений описывающих плосконапряженное состояние прямоугольных пластин в условиях термомеханического нагружения.

В связи с громоздкостью получаемых уравнений в общем виде, на практике, вывод разрешающих уравнений целесообразно осуществлять для конкретной задачи путем использования системы аналитических расчетов MAPLE 10 (Maplesoft, Waterloo Inc., Canada) используя конкретные значения параметров и констант.

Для демонстрации возможностей предлагаемой математической модели решалась задача со следующими исходными данными: прямоугольная пластина толщиной  $h = 4$  мм, квадратная, со стороной  $l = 100$  мм, материал графит АРВ [1, 3], жестко закреплена по контуру; пластина нагружалась равномерно распределенной нагрузкой  $q = 10$  кПа; также осуществлялся нагрев поверхности пластины с перепадом температур  $40^{\circ}\text{C}$ . Начальные температурные условия принимались следующие [1]:  $\Theta_{|t=0} = 50^{\circ}\text{C}$  – на нижней поверхности пластины;  $\Theta_{|t=0} = 10^{\circ}\text{C}$  – на верхней поверхности пластины, начальная температура пластины  $T_0 = 0^{\circ}\text{C}$ . Механические характеристики графита: модуль упругости  $E^+ = 10^4$  МПа;  $E^+/E^- = 0,8$ ;

коэффициент Пуассона  $\nu^+ = 0,2$ ;  $\nu^- = 0,3$ ; плотность  $\rho = 1700 \text{ кг / м}^3$ ; коэффициенты линейного теплового расширения  $\alpha_{t1}^+ = \alpha_{t1}^- = 4,0 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}$ ; коэффициент теплопроводности  $\lambda = 150 \text{ Вт / (м} \cdot \text{К)}$ ;  $C_\sigma = 500 \text{ Дж / (кг} \cdot \text{К)}$  — теплоемкость материала при постоянном напряжении [1].

После выполненных преобразований, с учетом исходных данных указанных выше, разрешающая система дифференциальных уравнений в частных производных приобрела следующий вид:

$$\begin{aligned}
 & 2.26 \cdot 10^7 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u_1(x_1, x_2, t) + 1.52 \cdot 10^7 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} u_2(x_1, x_2, t) + \\
 & \quad + 7.40 \cdot 10^6 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} u_1(x_1, x_2, t) = g_1(x_1, x_2, x_3, t), \\
 & 7.40 \cdot 10^6 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u_2(x_1, x_2, t) + 1.52 \cdot 10^7 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} u_1(x_1, x_2, t) + \\
 & \quad + 2.26 \cdot 10^7 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} u_2(x_1, x_2, t) = g_2(x_1, x_2, x_3, t), \\
 & 30.18 \cdot 10^2 \cdot \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} w(x_1, x_2, t) + 60 \cdot 10^2 \cdot \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} w(x_1, x_2, t) + \\
 & \quad + 30.18 \cdot 10^2 \cdot \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} w(x_1, x_2, t) + 2.71 \cdot 10^6 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} w(x_1, x_2, t) + \\
 & \quad + 2.7 \cdot 10^6 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} w(x_1, x_2, t) + q = g_3(x_1, x_2, x_3, t), \\
 & 15.3 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \theta(x_3, t) - 8.50 \cdot 10^5 \frac{\partial}{\partial t} \theta(x_3, t) - 1.05 \cdot 10^7 \frac{\partial^2}{\partial t \partial x_1} u_1(x_1, x_2, t) - \\
 & \quad - 1.05 \cdot 10^7 \frac{\partial^2}{\partial t \partial x_2} u_2(x_1, x_2, t) = g_4(x_1, x_2, x_3, t),
 \end{aligned} \tag{11}$$

где  $w(x_1, x_2, t)$  — функция вертикального прогиба;  $u_1(x_1, x_2, t)$  — функция перемещений срединной плоскости вдоль оси  $x_1$ ;  $u_2(x_1, x_2, t)$  — функция перемещений срединной плоскости вдоль оси  $x_2$ ;  $\theta(x_3, t)$  — функция температуры;  $g_i(x_1, x_2, x_3, t)$  ( $i = 1..4$ ) — компоненты разрешающей системы уравнений содержащие в себе нелинейные функции подробно описанные в работах [1, 2].

Механические граничные условия [1]:

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x_2} = 0, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 0. \tag{12}$$

Разрешающие уравнения (11) с начальными и граничными условиями представлены в форме, где все нелинейные члены выписаны в правых частях. Эта форма удобна для применения метода “упругих решений”, который и применялся для решения конкретной задачи. Решение системы дифференциальных уравнений осуществлялось в пакете FlexPDE 5 (PDE Solutions Inc., USA), с помощью которого на каждой итерации по методу “упругих решений” искомое частное решение системы (11) в рамках метода конечных элементов.

В процессе решения прослеживался процесс влияния температуры на механические характеристики материалов и напряженного состояния на распределение температуры по толщине пластинки, рассчитывалось распределение температуры по толщине пластинки, характеристики ее напряженно-деформированного состояния с учетом температурного воздействия. Рассмотрим полученные результаты.

На рис. 1 приведены вычисленные значения температурных напряжений  $\sigma_\theta$  для тонкой квадратной пластины вдоль ее диагонали, соответственно сверху и снизу для связанной и несвязанной задач термоупругости.

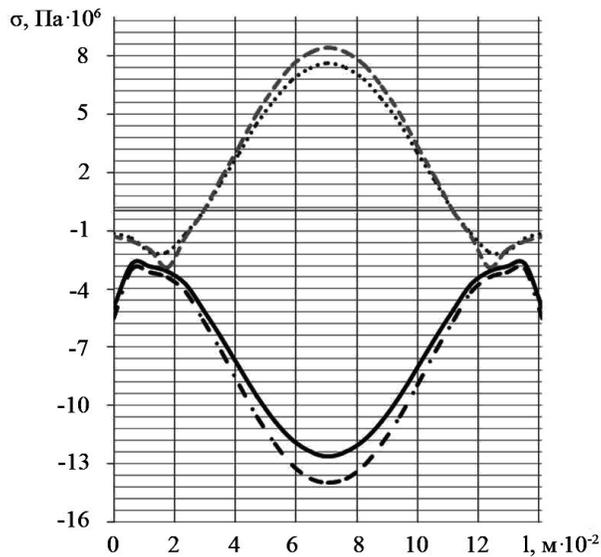


Рис. 1. Распределение температурных напряжений  $\sigma_\theta$  вдоль диагонали пластины. Для несвязанной задачи: ..... — напряжения на нижней поверхности, ———— — напряжения на верхней поверхности пластины; для связанной задачи: - - - - - — напряжения на нижней поверхности, - - - - - — напряжения на верхней поверхности пластины.

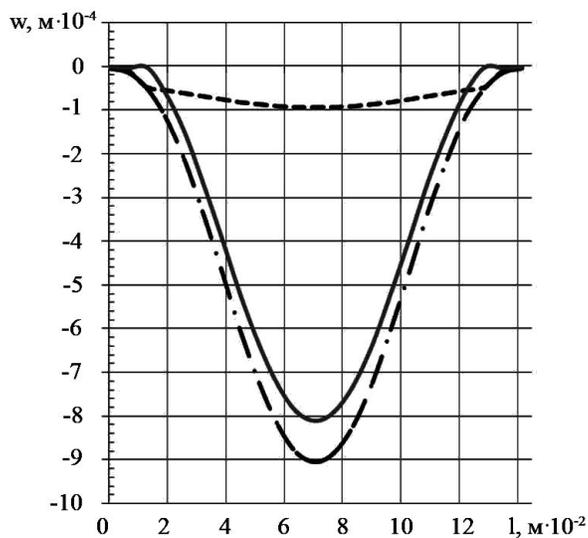


Рис. 2. Результаты расчета вертикальных прогибов пластины  $w$  при различных видах нагрузки вдоль диагонали пластины: ———— — с учетом только механического нагружения; - - - - - — с учетом только температурного воздействия, - - - - - — с учетом обоих факторов нагрузки

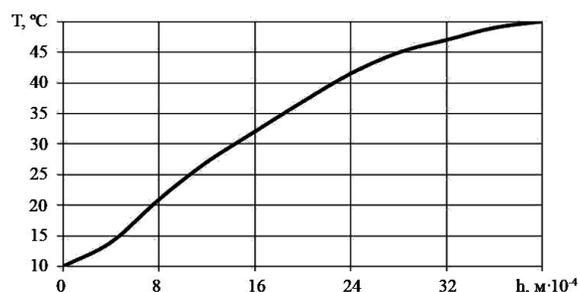


Рис. 3. Распределение температуры  $T$  по толщине  $h$  в центре плана пластины

Результаты расчета напряжений подтверждают гипотезу о том, что совместный учет взаимовлияния напряженного состояния и коэффициентов линейного температурного расширения является существенным для точности и достоверности результатов численного моделирования задач по определению напряженно-деформированного состояния пластин. Разница между решениями связанной и не связанной задач достигают 15 %.

На рис. 2 показано распределение прогибов  $w$  тонкой пластины вдоль ее диагонали. Из графика также можно сделать вывод, что учет совместного термосилового нагружения значительно влияет на результаты расчетов, позволяя получить более точное соответствие теории и эксперименту [1, 3].

На рис. 3 показано распределение температуры по толщине пластины.

Проведенные расчеты четко указывают на нелинейный характер деформирования конструкций из материалов с усложненными свойствами, а также подчеркивают важность решения задач термоупругости в связанной постановке, что позволяет добиться более точных и реалистичных результатов моделирования, по сравнению с уже известными способами решения подобных задач.

#### ЛИТЕРАТУРА

[1] *Hart, P. E.* The affect of pre-stressing on the thermal expansion and Young's modulus of graphite / P. E. Hart // Carbon. – 1972. – Vol. 107. – P. 233-236.

[2] *Матченко, Н. М.* Теория деформирования разносопротивляющихся материалов. Прикладные задачи теории упругости / Н. М. Матченко. – М. : РААСН ; Тула : ТулГУ, 2004. – 211 с.

[3] *Петров, А. А.* Плосконапряженное состояние пластин в условиях термомеханического нагружения / Петров А. А. , Теличко В. Г. // Сборник статей Международной научно-технической конференции "Композиционные строительные материалы. Теория и практика". – Пенза : ПГУАС-ПДЗ, 2007. – С. 229-232.

A. A. PETROV, V. G. TELICHKO, A. A. TRESHEV

**THE LATERAL BENDING OF THIN RECTANGULAR PLATES MADE FROM  
THE DIFFERENTLY RESISTANT MATERIALS UNDER THE CONDITIONS  
OF THERMOMECHANICAL LOADING**

**Abstract.** Is proposed the mathematical model of the calculation of the bend of the thin rectangular plates, made from the differently resistant materials, whose properties depend on changes in the temperature. Are obtained the resolving equations and numerical solution by the finite elements method with the use of a flexPDE 5 software (PDE solutions Inc.).

**Keywords:** The mechanics of materials, the bend of thin plates, thermomechanical loading, the differently resistant materials, the connected task of thermoelasticity, the method of finite elements.

*Петров Алексей Александрович*

*аспирант кафедры строительства, строительных материалов и конструкций Тульского государственного университета, г. Тула.*

**e-mail:** taa@uic.tula.ru

*Теличко Виктор Григорьевич*

*кандидат технических наук, доцент кафедры строительства, строительных материалов и конструкций Тульского государственного университета, г. Тула.*

**e-mail:** taa@uic.tula.ru

*Трещев Александр Анатольевич*

*доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой строительства, строительных материалов и конструкций Тульского государственного университета, г. Тула.*

**e-mail:** taa58@yandex.ru

*Petrov Alexey Aleksandrovich*

*post-graduate student of chair of building, building materials and designs of the Tula state university, Tula.*

*Telichko Victor Grigorevich*

*doctor of philosophy, the senior lecturer of chair of building, building materials and designs of the Tula state university, Tula.*

*Treshchev Alexander Anatolevich*

*doctor of sines, the professor, managing chair of building, building materials and designs of the Tula state university, Tula.*