

А. В. Никитин, М. Д. Коваленко

ПОЛУПОЛОСА, ЗАЩЕМЛЕННАЯ ПО ПРОДОЛЬНЫМ СТОРОНАМ. ТОЧНОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. Рассмотрена известная краевая задача для полуполосы, длинные стороны которой заштылены, т.е. перемещения здесь равны нулю, а на торце заданы напряжения. В предлагаемой работе дается точное решение задачи. Оно строится в виде разложений по функциям Фадля – Папковича. Однако коэффициенты разложений находятся не из решения бесконечной не распадающейся системы алгебраических уравнений, а в явном виде, при помощи систем функций, биортогональных к функциям Фадля – Папковича. Поэтому решение получается точным.

Ключевые слова: полуполоса, функции Фадля – Папковича, аналитические решения.

УДК: 539.3

1. Постановка задачи. Рассмотрим следующую краевую задачу теории упругости в полуполосе $\Pi : x \geq 0, |y| \leq 1$:

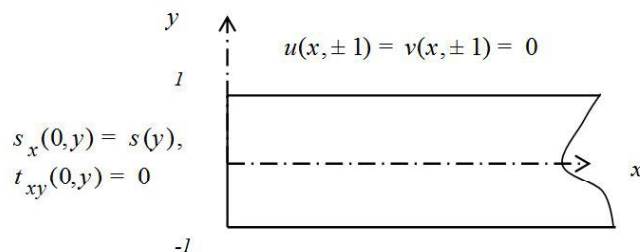


Рис. 1. Заштыленная полуполоса

Будем считать, что на длинных сторонах полуполосы $y = \pm 1$ продольные $u(x, y)$ и поперечные $v(x, y)$ перемещения равны нулю, т. е.

$$u(x, \pm 1) = v(x, \pm 1) = 0, \quad (1.1)$$

а на торце $x = 0$ заданы нормальные и касательные напряжения (рис. 1)

$$\sigma_x(0, y) = \sigma(y), \tau_{xy}(0, y) = \tau(y). \quad (1.2)$$

Поступила 10.11.2014

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (код проекта 08-13-00118).

Удовлетворим граничным условиям (1.1) с помощью соотношений метода начальных функций [1]:

$$\begin{cases} L_{UU}(1)U_0(x) + L_{UY}(1)Y_0(x) = 0 \\ L_{VU}(1)U_0(x) + L_{VY}(1)Y_0(x) = 0 \end{cases}, \quad (1.3)$$

где $L_{UU}(1), L_{UY}(1), \dots$ – соответствующие операторы метода начальных функций, определенные при $y = 1$. Вводя разрешающую функцию $F(x)$ по формулам

$$U_0(x) = L_{UY}(1)F(x), \quad Y_0(x) = -L_{UU}(1)F(x), \quad (1.4)$$

тождественно удовлетворим первому уравнению (1.3), а второе примет такой вид:

$$(L_{VU}(1)L_{UY}(1) - L_{VY}(1)L_{UU}(1))F(x) = 0. \quad (1.5)$$

Раскрывая выражения для дифференциальных операторов, получим

$$\frac{(3 - \nu) \sin 2\alpha}{8\alpha} - \frac{1 + \nu}{4} = 0. \quad (1.6)$$

Разыскивая решение обыкновенного дифференциального уравнения бесконечного порядка (1.5) в виде

$$F(x) = e^{\lambda x}, \quad (1.7)$$

получим трансцендентное характеристическое уравнение

$$L(\lambda) = \frac{(3 - \nu) \sin 2\lambda}{8\lambda} - \frac{1 + \nu}{4} = 0. \quad (1.8)$$

Оно имеет два вещественных корня $\pm\lambda_1$ и бесконечное множество комплексных корней $\{\pm\lambda_k, \pm\bar{\lambda}_k\}_{k=2}^{\infty} = \Lambda$. В таблице 1 для иллюстрации приведены значения первых 5 корней уравнения (1.8), у которых $Re\lambda_k < 0$.

Таблица 1

№ корня λ_k	$Re\lambda_k = c_k$	$Im\lambda_k = b_k$
1	-0.947747133516995	0
2	-3.79089897751953	-1.02335732321128
3	-6.97383851621760	-1.32418968179723
4	-10.13593380316843	-1.508955002915726
5	-13.29009003306721	-1.643198413758431

Тогда функция $F(x)$ имеет такой вид:

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k x}, \quad (1.9)$$

где $a_k (k \geq 1)$ – неизвестные коэффициенты разложений, причем, $Ima_1 = 0$. Подставляя функцию $F(x)$ в формулы (1.4), найдем начальные функции, а затем, в соответствии с зависимостями метода начальных функций, – все перемещения и напряжения.

$$U(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k \xi(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x},$$

$$V(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k \chi(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x},$$

$$\begin{aligned}\sigma_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_x(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k s_x(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ \sigma_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_y(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k s_y(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k t_{xy}(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k t_{xy}(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}.\end{aligned}\quad (1.10)$$

Функции Фадля – Папковича $\xi(\lambda_k, y)$, $\chi(\lambda_k, y)$ и т.д. имеют такой вид:

$$\begin{aligned}\xi(\lambda_k, y) &= -\frac{1}{4}(1 + \nu)(\sin \lambda_k \cos \lambda_k y - y \cos \lambda_k \sin \lambda_k y) \\ \chi(\lambda_k, y) &= \left[\frac{\nu + 1}{4} \sin \lambda_k + \frac{\nu - 3}{4\lambda_k} \cos \lambda_k \right] \sin \lambda_k y + \frac{\nu + 1}{4} y \cos \lambda_k \cos \lambda_k y, \\ s_x(\lambda_k, y) &= \left[-\nu \cos \lambda_k - \frac{1 + \nu}{2} \lambda_k \sin \lambda_k \right] \cos \lambda_k y + \frac{1 + \nu}{2} \lambda_k y \cos \lambda_k \sin \lambda_k y, \\ s_y(\lambda_k, y) &= \left[\frac{1 + \nu}{2} \lambda_k \sin \lambda_k - \cos \lambda_k \right] \cos \lambda_k y - \frac{1 + \nu}{2} \lambda_k y \cos \lambda_k \sin \lambda_k y, \\ t_{xy}(\lambda_k, y) &= \left[\frac{\nu - 1}{2} \cos \lambda_k + \frac{1 + \nu}{2} \lambda_k \sin \lambda_k \right] \sin \lambda_k y + \frac{1 + \nu}{2} \lambda_k y \cos \lambda_k \cos \lambda_k y.\end{aligned}\quad (1.11)$$

2. Построение систем функций, биортогональных к функциям Фадля – Папковича

Удовлетворим с помощью выражений (1.10) граничным условиям на торце полуполосы (1.2), полагая, что касательные напряжения равны нулю. В результате получим систему из двух функциональных уравнений, из которых должны быть определены неизвестные коэффициенты разложений $\{a_k, \bar{a}_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\begin{aligned}\sigma(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_x(\lambda_k, y) + \bar{a}_k s_x(\bar{\lambda}_k, y), \\ 0 &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k t_{xy}(\lambda_k, y) + \bar{a}_k t_{xy}(\bar{\lambda}_k, y).\end{aligned}\quad (2.1)$$

Искомые коэффициенты разложений определяются отсюда в явном виде с помощью биортогональных систем функций. Общая схема решения краевых задач в полуполосе следующая. Вначале изучаются разложения только одной функции по какой-либо одной системе функций Фадля – Папковича. К ней строится биортогональная система функций, с помощью которой находятся коэффициенты разложений. Полученные так разложения одной функции называются разложениями Лагранжа. Разложения Лагранжа являются аналогами разложений в тригонометрические ряды Фурье и играют такую же роль при определении коэффициентов разложений, какую ряды Фурье играют в решениях Файлона и Рибьера. В краевых разложениях двух функций, в отличие от разложения Лагранжа одной функции, нужно найти такой набор коэффициентов $\{a_k, \bar{a}_k\}_{k=1}^{\infty}$, который был бы общим для этих двух разложений. Недостающий необходимый произвол при этом обеспечивается существованием чисто мнимых векторов, входящих в состав разложений по функциям Фадля – Папковича. Так как их проекции на вещественное направление равны нулю, то эти разложения называются нуль-рядами. В окончательных выражениях для напряжений и перемещений в полуполосе нуль-ряды нужно выделять, приводя тем самым формулы к разложениям Лагранжа. В классических решениях Файлона – Рибьера тригонометрические системы функций двукратно полны, что обеспечивает необходимый произвол в этом случае. Нуль-рядов здесь нет, т.к. базисные

функции вещественны. Поэтому ситуация оказывается тривиальной: удовлетворяя заданным на торце полуполосы нормальным напряжениям, получим равенство, содержащее два набора (для каждого номера $k = 1, 2, \dots$) неизвестных коэффициентов разложений. Второе граничное условие (для касательных напряжений) фактически позволяет установить связь между каждой парой неизвестных коэффициентов.

Биортогональные системы функций $U_k(y)$, $T_k(y)$ и т.д. находятся как решения функциональных уравнений

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda, y) U_k(y) dy &= \int_{-\infty}^{\infty} t_{xy}(\lambda, y) T_k(y) dy = \frac{\lambda^3 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\lambda, y) V_k(y) dy &= \int_{-\infty}^{\infty} s_x(\lambda, y) X_k(y) dy = \frac{\lambda^2 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} s_y(\lambda, y) Y_k(y) dy &= \frac{\lambda^4 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $\xi(\lambda, y)$, $\chi(\lambda, y)$ и т. д. – функции, порождающие соответствующие функции Фаддья – Папковича.

При $\lambda = \lambda_m$ из уравнений (2.2) получаются соотношения биортогональности:

$$\begin{aligned} \int_T \chi(\lambda_m, t) V_k(t) dt &= \int_T s_x(\lambda_m, t) X_k(t) dt = \begin{cases} N_k & (\lambda_m = \lambda_k), \\ 0 & (\lambda_m \neq \lambda_k); \end{cases} \\ \int_T \xi(\lambda_m, t) U_k(t) dy &= \int_T t_{xy}(\lambda_m, t) T_k(t) dy = \begin{cases} \lambda_k N_k & (\lambda_m = \lambda_k), \\ 0 & (\lambda_m \neq \lambda_k); \end{cases} \\ \int_T s_y(\lambda_m, t) Y_k(t) dt &= \begin{cases} \lambda_k^2 N_k & (\lambda_m = \lambda_k), \\ 0 & (\lambda_m \neq \lambda_k); \end{cases} \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$N_k = \lambda_k L'(\lambda_k)/2.$$

$L'(\lambda_k)$ – производная функции $L(\lambda)$, определенная при $\lambda = \lambda_k$. Для комплексных значений λ прямая интегрирования $(-\infty, \infty)$ в формулах (2.2) заменяется T -образным контуром, лежащим в плоскости $z = x + iy$ и составленным из отрезка мнимой оси $y \in [-1, 1]$ и луча $x \in (-\infty, 0]$ (подробнее об этом в статье [2]).

Из уравнений (2.2) также вытекают такие равенства, справедливые при всех $\overline{\lambda_m}$:

$$\begin{aligned} \int_T \xi(\overline{\lambda_m}, t) U_k(t) dt &= \int_T \xi(\lambda_m, t) \overline{U_k(t)} dt = 0, \\ \int_T \chi(\overline{\lambda_m}, t) V_k(t) dt &= \int_T \chi(\lambda_m, t) \overline{V_k(t)} dt = 0, \\ \int_T s_x(\overline{\lambda_m}, t) X_k(t) dt &= \int_T s_x(\lambda_m, t) \overline{X_k(t)} dt = 0, \\ \int_T t_{xy}(\overline{\lambda_m}, t) T_k(t) dt &= \int_T t_{xy}(\lambda_m, t) \overline{T_k(t)} dt = 0, \\ \int_T s_y(\overline{\lambda_m}, t) Y_k(t) dt &= \int_T s_y(\lambda_m, t) \overline{Y_k(t)} dt = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Элементы $U_k(y)$, $V_k(y)$, $X_k(y)$, $T_k(y)$ и $Y_k(y)$ биортогональных систем функций можно представить в виде сумм финитных, равных нулю вне отрезка $|y| \leq 1$, и нефинитных частей. Причем, нечетные и четные нефинитные части ортогональны соответственно функциям $\{\sin q_m y\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{\cos q_m y\}_{m=1}^{\infty}$, $q_m = (2m-1)\pi/2$. При решении краевых задач, как правило, используются финитные части биортогональных функций, поэтому важно знать их явное представление. Покажем, как строятся финитные части на двух примерах. Построим вначале функцию $x_k(y)$ – финитную часть биортогональной функции $X_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots$). Полагая в соотношении биортогональности

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_x(\lambda, y) X_k(y) dy = \frac{\lambda^2 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \quad (2.5)$$

$\lambda = q_m$ и учитывая, что все $\cos q_m y$ ортогональны нефинитным частям функций $X_k(y)$, получим

$$\int_{-1}^1 s_x(q_m, y) x_k(y) dy = \frac{q_m^2 L(q_m)}{q_m^2 - \lambda_k^2} \quad (2.6)$$

или

$$\int_{-1}^1 \cos(q_m y) x_k(y) dy = -\frac{(-1)^m q_m}{2(q_m^2 - \lambda_k^2)}. \quad (2.7)$$

Но

$$\int_{-1}^1 \cos(q_m y) \cos(\lambda_k y) dy = -\frac{2(-1)^m q_m \cos \lambda_k}{q_m^2 - \lambda_k^2}. \quad (2.8)$$

Сравнивая (2.7), (2.8), заключаем, что

$$x_k(y) = \frac{\cos \lambda_k y}{4 \cos \lambda_k}. \quad (2.9)$$

Построим функцию $t_k(y)$ – финитную часть функции $T_k(y)$. Полагая в соответствующем равенстве (2.2) $\lambda = q_m$, получим

$$\int_{-1}^1 t_{xy}(q_m, y) t_k(y) dy = \frac{q_m^3 L(q_m)}{q_m^2 - \lambda_k^2} \quad (2.10)$$

или

$$\int_{-1}^1 \sin(q_m y) t_k(y) dy = \frac{(-1)^m}{2} \left(1 + \frac{\lambda_k^2}{q_m^2 - \lambda_k^2}\right). \quad (2.11)$$

Учитывая, что

$$-\frac{1}{4} \int_{-1}^1 \sin(q_m y) \frac{\lambda_k \sin(\lambda_k y)}{\cos \lambda_k} dy = \frac{(-1)^m \lambda_k^2}{2(q_m^2 - \lambda_k^2)},$$

$$-\frac{1}{4} \int_{-1}^1 \sin(q_m y) [\delta(y-1) - \delta(y+1)] dy = \frac{(-1)^m}{2} \quad (2.12)$$

и сравнивая (2.12) с (2.11), находим

$$t_k(y) = -\frac{1}{4} \left(\frac{\lambda_k \sin \lambda_k y}{\cos \lambda_k} + [\delta(y-1) - \delta(y+1)] \right) \quad (2.13)$$

где δ – дельта функция. Заметим, что $t_k(y) = x'_k(y)$

Из формулы (2.2)

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_x(\lambda, y) X_k(y) dy = \frac{\lambda^2 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \quad (2.14)$$

разлагая функции, стоящие в левой и правой частях равенства (2.14), в ряды по степеням λ и полагая $\lambda \rightarrow 0$, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} (-\nu) X_k(y) dy = 0, \quad (2.15)$$

т. е. все функции $X_k(y)$ ($k = 1, 2, \dots$) ортогональны к $(-\nu)$. В силу этого, ряды по системе функций $\{s_x(\lambda_k, y)\}_{k=1}^{\infty}$, в общем, будут отличаться от раскладываемой функции на некоторую постоянную, за исключением случая, когда функция $\sigma(y)$ самоуравновешена. Приняв в формуле (2.14) $\lambda_k = 0$ при $\lambda_k \rightarrow 0$ получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} (-\nu) X_0(y) dy = \frac{1-\nu}{2}. \quad (2.16)$$

Финитную часть функции $X_0(y)$ найдем, воспользовавшись по прежнему уравнением (2.14), в котором примем $\lambda_k = 0$, $\lambda = q_m$. Тогда вместо (2.14) получим такое уравнение:

$$\int_{-1}^1 \frac{(1+\nu)}{2} q_m (-1)^m \cos(q_m y) x_0(y) dy = -\frac{(1+\nu)}{4}. \quad (2.17)$$

Откуда видно, что

$$x_0(y) = \frac{1}{4}. \quad (2.18)$$

3. Решение краевой задачи. Схема определения неизвестных коэффициентов a_k ($k = 1, 2, \dots$) из разложений (2.1) следующая. Продолжим равенства (2.1) на всю вещественную ось следующим образом: функции, стоящие справа – аналитически, а функции стоящие слева – периодически с периодом, равным 4. После этого спроектируем их на вещественные подпространства: первое на $X_m(y) + \overline{X_m(y)}$, второе – на $T_m(y) + \overline{T_m(y)}$, и рассмотрим интегралы

$$\int_T s_x(\lambda_k, t) [X_m(t) + \overline{X_m(t)}] dt, \quad \int_T t_{xy}(\lambda_k, t) [T_m(t) + \overline{T_m(t)}] dt \quad (3.1)$$

$$\int_T s_x(\bar{\lambda}_k, t) [X_m(t) + \overline{X_m(t)}] dt, \quad \int_T t_{xy}(\bar{\lambda}_k, t) [T_m(t) + \overline{T_m(t)}] dt \quad (3.2)$$

$$\int_{-1}^1 \sigma(y) \left[X_m(y) + \overline{X_m(y)} \right] dy \quad (3.3)$$

В последнем интеграле $\sigma(y)$ – периодическая функция, которую можно представить тригонометрическим рядом по системе функций $\cos q_m y$ ($m = 0, 1, 2, \dots$). Но эти функции, как было сказано выше, ортогональны к нефинитным частям функций $X_k(y)$ ($k = 1, 2, \dots$). Поэтому вместо (3.3) получим

$$\sigma_m^* = \int_{-1}^1 \sigma(t) \left[x_m(t) + \overline{x_m(t)} \right] dt = \sigma_m + \overline{\sigma_m}. \quad (3.4)$$

Учитывая соотношения биортогональности (2.3) и (2.4), в результате получим следующую систему из двух алгебраических уравнений ($k = 1, 2, \dots$):

$$\begin{cases} \sigma_k^* = a_k N_k + \overline{a_k N_k}, \\ \tau_k^* = a_k N_k \lambda_k + \overline{a_k N_k \lambda_k}. \end{cases} \quad (3.5)$$

Решая ее, найдем

$$a_k = \frac{\sigma_k^* \overline{\lambda_k}}{(\lambda_k - \overline{\lambda_k}) N_k}. \quad (3.6)$$

Подставляя эти выражения в формулы (1.10) и избавляясь в них от нуль-рядов (разложений чисто мнимых функций) так, как это сделано в статье [2], получим искомые выражения для напряжений и перемещений в полуполосе ($c_k = \operatorname{Re} \lambda_k < 0$, $b_k = \operatorname{Im} \lambda_k$):

$$\begin{aligned} U(x, y) &= -\frac{\xi(\lambda_1, y) e^{c_1 x}}{N_1 \lambda_1} \sigma_1 c_1 (1 + c_1 x) + \\ &- \sum_{k=2}^{\infty} \left[2 \operatorname{Re} \left[\frac{\xi_{xy}(\lambda_k, y) e^{c_k x}}{N_k \lambda_k} \sigma_k \overline{\lambda_k} \left(\cos(b_k x) + c_k \frac{\sin(b_k x)}{b_k} \right) \right] \right], \\ V(x, y) &= \frac{\chi(\lambda_1, y) e^{c_1 x}}{N_1} \sigma_1 (1 - c_1 x) + \\ &+ \sum_{k=2}^{\infty} \left[2 \operatorname{Re} \left[\frac{\chi(\lambda_k, y) e^{c_k x}}{N_k} \sigma_k \left(\cos(b_k x) - c_k \frac{\sin(b_k x)}{b_k} \right) \right] \right], \\ \sigma_x(x, y) &= \frac{s_x(\lambda_1, y) e^{c_1 x}}{N_1} \sigma_1 (1 - c_1 x) + \\ &+ \sum_{k=2}^{\infty} \left[2 \operatorname{Re} \left[\frac{s_x(\lambda_k, y) e^{c_k x}}{N_k} \sigma_k \left(\cos(b_k x) - c_k \frac{\sin(b_k x)}{b_k} \right) \right] \right], \\ \sigma_y(x, y) &= -\frac{s_y(\lambda_1, y) e^{c_1 x}}{N_1 \lambda_1^2} \sigma_1 (1 - c_1 x) c_1^2 + \\ &- \sum_{k=2}^{\infty} \left[2 \operatorname{Re} \left[\frac{s_y(\lambda_k, y) e^{c_k x}}{N_k \lambda_k^2} \sigma_k (\lambda_k \overline{\lambda_k}) \left(\cos(b_k x) + c_k \frac{\sin(b_k x)}{b_k} \right) \right] \right], \\ \tau_{xy}(x, y) &= -\frac{t_{xy}(\lambda_1, y) e^{c_1 x}}{N_1 \lambda_1} \sigma_1 c_1^2 x - \sum_{k=2}^{\infty} \left[2 \operatorname{Re} \left[\frac{t_{xy}(\lambda_k, y) e^{c_k x}}{N_k \lambda_k} \sigma_k (\lambda_k \overline{\lambda_k}) \frac{\sin(b_k x)}{b_k} \right] \right], \end{aligned} \quad (3.7)$$

Слагаемые, стоящие перед знаками суммирования, отвечают отрицательному вещественному корню. Они получаются из соответствующих представлений, стоящих внутри сумм при $b_k \rightarrow 0$.

Рассмотрим пример. Пусть на торце полуполосы нормальные напряжения представлены ступенчатой самоуравновешенной функцией

$$\sigma(y) = \begin{cases} \frac{1}{2d} & |y| \leq d \\ -\frac{1}{2d} & 2d \geq |y| > d \\ 0 & 2d < |y| \leq 1 \quad (0 < d < 1). \end{cases} \quad (3.8)$$

Тогда

$$\sigma_k = \frac{2}{2d} \int_0^d \frac{\cos \lambda_k y}{4 \cos \lambda_k} dy - \frac{2}{2d} \int_d^{2d} \frac{\cos \lambda_k y}{4 \cos \lambda_k} dy = \frac{2 \sin d\lambda_k - \sin 2d\lambda_k}{4d\lambda_k \cos \lambda_k}. \quad (3.9)$$

Подставляя числа (3.9) в формулы (3.7), получим полное решение краевой задачи. Ниже оно проиллюстрировано графиками распределения напряжений (рис. 2), а также продольных и поперечных перемещений (рис. 3) на торце полуполосы и в сечении $x = 0.02$ (рис. 4, 5). На рис. 6 показано поведение напряжений в заделке.

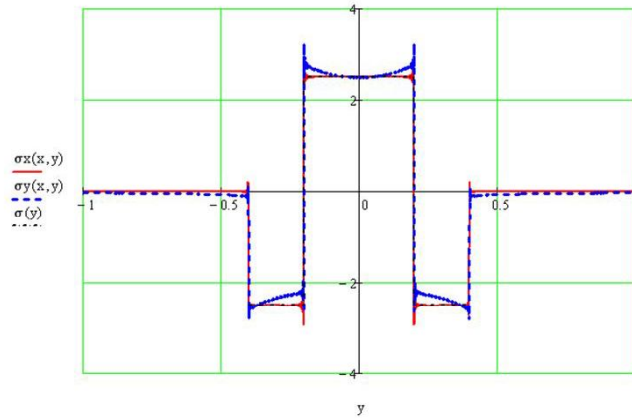


Рис. 2. Напряжения и раскладываемая функция на торце полуполосы

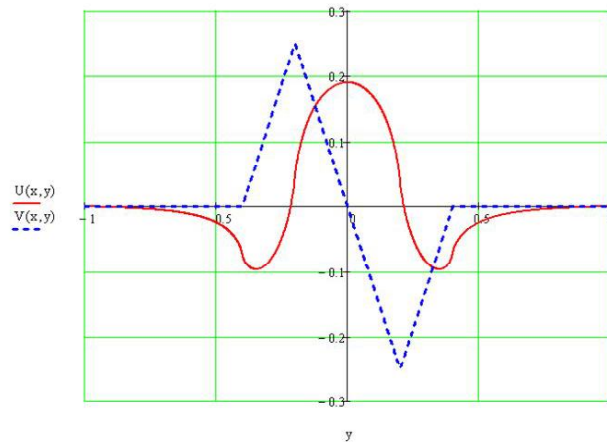
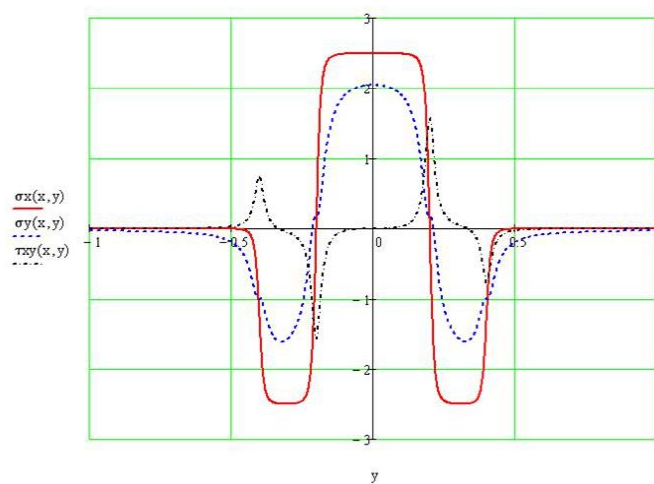
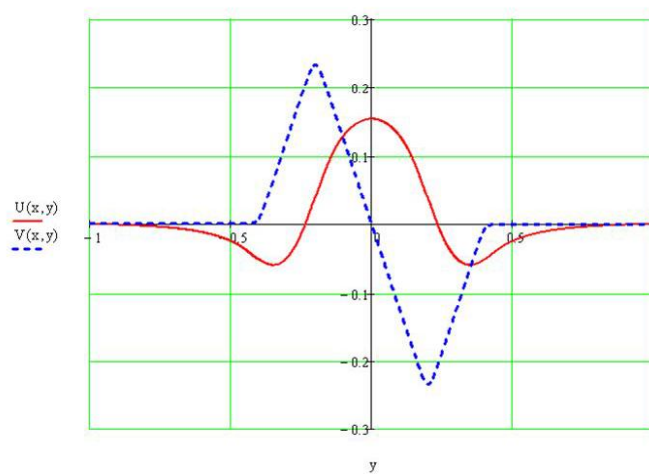


Рис. 3. Распределение продольных и поперечных перемещений на торце полуполосы

Рис. 4. Распределение напряжений в сечении $x = 0.02$ Рис. 5. Распределение перемещений сечения $x = 0.02$

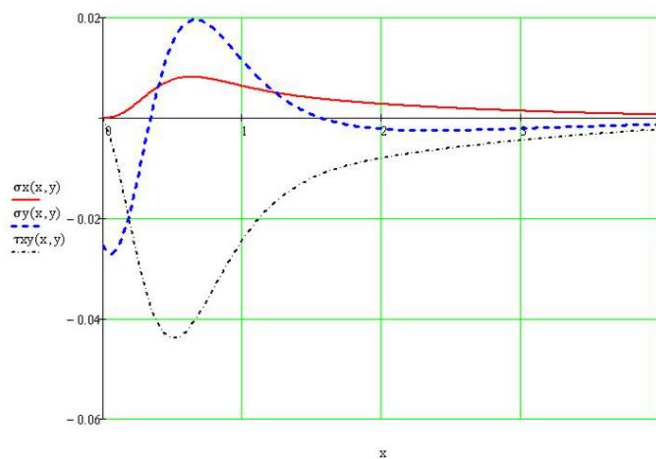


Рис. 6. Распределение напряжений в заделке

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Власов, В. В. Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики / В. В. Власов. – М. : Стройиздат, 1975. – 224 с.
[2] Коваленко, М. Д. Разложения по функциям Фадля – Папковича в полосе. Основы теории / М. Д. Коваленко, Т. Д. Шуляковская // Известия РАН. МТТ. – 2011. – № 5. – С. 78–98.

Коваленко Михаил Денисович,

доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук, г. Москва

e-mail: kov08@inbox.ru

Никитин Андрей Витальевич,

аспирант кафедры математического анализа, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: ligalas5@mail.ru

A. V. Nikitin, M. D. Kovalenko

**SEMI-STRIP BEND WITH THE FREE LONGITUDINAL EDGES AT WHICH
END FACE THE MOMENT OF DEFLECTION AND THE GENERALIZED
TRANSVERSAL FORCE ARE SET. PRECISE SOLUTION OF A BOUNDARY
VALUE PROBLEM**

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. The well known boundary value problem for the semi-strip, the long sides of which are fixed, ie displacement is equal to zero. And at the end face the normal strain given. In the present paper we give an exact solution of the problem. It is constructed in the form of expansions on the Fadley – Papkovich functions. However, the expansions coefficients are not the solution of the infinite algebraic equations system. We determine they using the biorthogonal systems of functions. Therefore, the solutions are exact.

Keywords: semi-strip, Fadley – Papkovich functions, analytical solutions.

REFERENCES

[1] *Vlasov, V. V.* Method of initial functions in theory tasks elasticity and construction mechanics / V. V. Vlasov. – M. : Stroyizdat, 1975. – 224 p.

[2] *Kovalenko, M. D.* Decomposition on Fadley – Papkovich’s functions in a strip. Theory bases / M. D. Kovalenko, T. D. Shulyakovskaya // News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of a solid body. – 2011. – № 5. – P. 78–98.

Kovalenko, Mikhail Denisovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow

Nikitin, Andrey Vitalevich

Postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary