*Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева*
*Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 2(66). С. 4–18*

*С. И. Сенашов, А. Н. Яхно, Л. В. Яхно*

# ДЕФОРМАЦИЯ ЛИНИЙ СКОЛЬЖЕНИЯ ДЛЯ ДВУМЕРНОЙ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

*Сибирский государственный аэрокосмический университет им. академика Решетнева*

*Университет Гвадалахары*

***Аннотация.*** Рассматривается гиперболическая система уравнений плоской идеальной пластичности с условием текучести Сен-Венана - Мизеса. Характеристики этой системы деформируются под действием точечных преобразований, допускаемых группой, что позволяет построить новые аналитические решения. Обсуждается механический смысл полученных характеристических полей. Описывается общий алгоритм преобразования решений гиперболической системы двух квазилинейных однородных уравнений от двух независимых переменных.

***Ключевые слова***: граничная задача для гиперболических систем уравнений в частных производных первого порядка, групповой анализ, пластичность, точные решения дифференциальных уравнений.

*УДК*: 539.375

## 1. Введение

В настоящее время групповой анализ систем дифференциальных уравнений является важным методом отыскания аналитических решений нелинейных задач. Если система дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) инвариантна относительно группы Ли точечных преобразований $G$, то иногда можно построить некоторые точные решения этой системы, которые инвариантны относительно подгрупп группы $G$.

Под действием допускаемой группы решение системы ДУЧП отображается в семейство решений, если оно не является инвариантым решением группы, т.е. если поверхность решений не является инвариантной поверхностью группы. Для некоторых дифференциальных уравнений удобно вначале постороить все инвариантные решения и затем попытаться преобразовать их, применяя остальные симметрии из $G$. Иногда это единственный путь для получения явных формул. Эта процедура называется *размножением*, *деформацией* или *генерацией* решений (см. [2], [4], [6], [11]).

Поступила 02.03.2009

Работа выполнена в рамках «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 гг.(№1121)»

Работа выполнена в рамках АВЦП «Развитие потенциала высшей школы» (проект 2.1.1/3023)

Для нелинейной системы ДУЧП, которая может быть линеаризована посредством некоторого преобразования $T$, существует много результатов по размножению решений. Природа преобразования $T$ может быть различной: обратимое и необратимое, локальное и нелокальное преобразование и т. п. Схема размножения решений с использованием принципа суперпозиции в общем случае может быть представлена так:

1. Пусть $U^1$ – решение нелинейной и $\chi^1 = T(U^1)$ – решение соответствующей линеаризованной системы уравнений.

2. Линейная система всегда допускает бесконечномерную группу симметрий $G_\infty$ , так как всегда можно добавить к данному решению любое другое частное решение. Действуя соответствующим точечным преобразованием на $\chi^1$, мы получим другое решение $\chi^2$ линейной системы.

3. Обратным преобразованием $T^{-1}$ переводим решение $\chi^2$ в новое решение $U^2$ для нелинейной системы: $U^2 = T^{-1}(\chi^2)$.

Безусловно, возникает много вопросов по виду $\chi^1, T, T^{-1}$ и об областях, где эти преобразования невырождены, но прежде всего появляется вопрос о физическом смысле получаемого решения $U^2$.

В свою очередь, классический групповой анализ, будучи полуобратным методом решения ДУЧП, не предоставляет прямого алгоритма отыскания решений краевых задач. Есть некоторые результаты об инвариантности (частичной инвариантности) граничных условий относительно допускаемых симметрий [6].

Если нелинейная система ДУЧП является гиперболической, то она обладает двумя семействами характеристик, вид которых зависит от вида решения. В настоящей работе предложено действовать групповым преобразованием на характеристики системы вместо действия на ее решения, что позволяет получить новые решения системы двумерных уравнений идеальной пластичности среды Сен-Венана – Мизеса, а также определить соответствующие граничные условия.

Работа состоит из пяти частей. Первая часть – это введение. Во второй части приводятся некоторые понятия о системе квазилинейных ДУЧП и вводится понятие деформированных характеристик. В третьей части описывается система плоской пластичности, ее симметрии и некоторые известные решения. В четвертой части строятся новые решения и устанавливаются соответствующие граничные условия. Принцип суперпозиции обсуждается в пятой части работы.

## 2. Гиперболическая квазилинейная система

Система квазилинейных однородных уравнений в частных производных первого порядка двух независимых переменных $x$, $y$ и двух функций $u_1$, $u_2$ имеет вид [8]:

$$\begin{aligned} a_{11}(u_1,u_2)\tfrac{\partial u_1}{\partial x} + a_{12}(u_1,u_2)\tfrac{\partial u_2}{\partial x} + b_{11}(u_1,u_2)\tfrac{\partial u_1}{\partial y} + b_{12}(u_1,u_2)\tfrac{\partial u_2}{\partial y} = 0,\\ a_{21}(u_1,u_2)\tfrac{\partial u_1}{\partial x} + a_{22}(u_1,u_2)\tfrac{\partial u_2}{\partial x} + b_{21}(u_1,u_2)\tfrac{\partial u_1}{\partial y} + b_{22}(u_1,u_2)\tfrac{\partial u_2}{\partial y} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

или в матричной форме

$$A\frac{\partial U}{\partial x} + B\frac{\partial U}{\partial y} = 0, \tag{2}$$

где $A = \|a_{ij}\|$, $B = \|b_{ij}\|$, $i, j = 1, 2$, $U = (u_1, u_2)^T$.

Если матрица $A$ невырожденная, то система (2) может быть записана в нормальной форме

$$\frac{\partial U}{\partial x} + M\frac{\partial U}{\partial y} = 0, \tag{3}$$

где $M = \|m_{ij}(u_1, u_2)\|$.

Пусть система (3) является гиперболической. Тогда матрица $M$ имеет два различных собственных значения $\lambda_1$ и $\lambda_2$, получаемых как корни уравнения:

$$det(M - \lambda E) = 0: \quad \lambda_{1,2} = \frac{m_{11} + m_{22} \pm \sqrt{(m_{11} - m_{22})^2 + 4m_{12}m_{21}}}{2}.$$

Этим собственным значениям соответствуют собственные векторы $l_1 = \left(l_1^1, l_1^2\right)$ и $l_2 = (l_2^1, l_2^2)$. Рассмотрим дифференциальные формы

$$\omega_k = l_k^1(u_1, u_2)du_1 + l_k^2(u_1, u_2)du_2 = 0, \quad k = 1, 2,$$

которые могут быть в принципе проинтегрированы, т. к. в этом случае всегда существует интегрирующий множитель. Принимая соответствующие два интеграла $\Phi_k(u_1, u_2) = \mathrm{const}$ за инварианты Римана $r_k = \Phi_k(u_1, u_2)$, система (3) принимает вид:

$$\begin{array}{l} \frac{\partial r_1}{\partial x} + \lambda_1(u_1, u_2)\frac{\partial r_1}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial r_2}{\partial x} + \lambda_2(u_1, u_2)\frac{\partial r_2}{\partial y} = 0. \end{array} \tag{4}$$

Система (3) имеет два семейства действительных характеристик, заданные уравнениями

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lambda_1(u_1, u_2), \ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lambda_2(u_1, u_2), \tag{5}$$

которые определены, если известно некоторое решение системы (3). Из уравнения (4) видно, что инварианты Римана постоянны для любого решения системы (3) вдоль соответствующего семейства характеристик.

Пусть известны два решения системы (3): $u_1 = u_1^0(x, y)$, $u_2 = u_2^0(x, y)$, тогда есть два способа построения характеристических полей. Первый заключается в решении уравнений (5)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lambda_1\left(u_1^0(x, y), u_2^0(x, y)\right), \ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lambda_2\left(u_1^0(x, y), u_2^0(x, y)\right).$$

Второй состоит в фиксировании постоянных для инвариантов Римана:

$$r_1(u_1, u_2) = C_1, \quad r_2(u_1, u_2) = C_2 \tag{6}$$

в выражении из (6) функции $u_1$ или $u_2$ в явном виде, например, $u_1$:

$$u_1 = h_1(u_2, C_1), \quad u_1 = h_2(u_2, C_2), \tag{7}$$

и в получении уравнений для семейств характеристик, подставляя (7) в данное решение:

$$h_k\left(u_2^0(x, y), C_k\right) = u_1^0(x, y), \quad k = 1, 2.$$

Если базис алгебры Ли точечных симметрий, допускаемых системой (3), состоит из инфинитезимальных операторов $X_i$ $(i = 1, \ldots, r)$:

$$X_i = \xi_i^1(x,y,u_1,u_2)\frac{\partial}{\partial x} + \xi_i^2(x,y,u_1,u_2)\frac{\partial}{\partial y} + \eta_i^1(x,y,u_1,u_2)\frac{\partial}{\partial u_1} + \eta_i^2(x,y,u_1,u_2)\frac{\partial}{\partial u_2},$$

то преобразования $S$ соответствующей группы Ли $G_r$

$$\begin{array}{l} x' = f_1(x,y,u_1,u_2,a_i), \ \ y' = f_2(x,y,u_1,u_2,a_i), \\ u_1' = g_1(x,y,u_1,u_2,a_i), \ \ u_2' = g_2(x,y,u_1,u_2,a_i), \\ f_1|_{a_i=0} = x, \ f_2|_{a_i=0} = y, \ g_1|_{a_i=0} = u_1, \ g_2|_{a_i=0} = u_2 \end{array} \tag{8}$$

переводят систему (3) в себя. Это значит, что если $U = (u_1, u_2)$ – решение системы (3), тогда функция $U'$, получаемая применением преобразования $S : U \to U' = (u_1', u_2')$, является другим решением для (3), всякий раз когда $U'$определено [7]. Здесь $a_i \in P$ – некоторый групповой параметр.

Любому решению $U = (u_1, u_2)$ системы (3) можно сопоставить его орбиту $U_G$ [6], определяемую как множество всех решений, получаемых из $U$ применением всех преобразований (8) допускаемой группы $G_r$. Решение $U = (u_1, u_2)$ называется $H$-инвариантным, если $u_1' = u_1$, $u_2' = u_1$ для некоторой подгруппы $H$ из $G_r$, т. е. когда орбита $U_H$ совпадает с самим решением $U$.

Более формально, если имеется симметрия $S \notin H$ и *начальное* $H$- инвариантное решение $U^0 = \left(u_1^0(x,y), u_2^0(x,y)\right)$, то, действуя (8) на $U^0$, мы получим неявную формулу для функций $u_1$ и $u_2$

$$\begin{array}{l} g_1(x,y,u_1,u_2,a_i) = u_1^0\left(f_1(x,y,u_1,u_2,a_i), f_2(x,y,u_1,u_2,a_i)\right), \\ g_2(x,y,u_1,u_2,a_i) = u_2^0\left(f_1(x,y,u_1,u_2,a_i), f_2(x,y,u_1,u_2,a_i)\right). \end{array} \tag{9}$$

Формула (9) задает семейство решений, зависящее от группового параметра $a_i$. Будем называть это семейство $S$*-решением*, как полученное из начального решения $U^0$ посредством симметрии $S$. Если параметр $a_i$ равен нулю, то $S$-решение совпадает с начальным. Изменение группового параметра как параметра семейства $S$-решений должно быть достаточно малым для получения физически осмысленных решений.

Как отмечается в [2], при размножении регулярного решения даже при малых значениях $a_i$ можно получить многозначные решения или решения с особенностями. Такие обобщенные $S$-решения широко используются в анализе рапространения разрывов, ударных волн и т.п. Физический смысл этих решений определяется из постановки задачи.

Из (9), учитывая (7), можно получить семейство *деформированных* характеристик или $S$*-характеристики*, задаваемые следующими соотношениями ($k = 1, 2$)

$$\begin{array}{l} g_1\left(x,y,h_k,u_2,a_i\right) = u_1^0\left(f_1(x,y,h_k,u_2,a_i), f_2(x,y,h_k,u_2,a_i)\right), \\ g_2\left(x,y,h_k,u_2,a_i\right) = u_2^0\left(f_1(x,y,h_k,u_2,a_i), f_2(x,y,h_k,u_2,a_i)\right). \end{array}$$

Характеристики системы (3) являются плоскими кривыми, в то время как ее решения представляют собой пространственные поверхности. Поэтому анализировать действие симметрий на характеристики проще, чем анализировать размноженные решения. Удобно наблюдать, изменяя значение группового параметра, за эволюцией характеристических кривых под действием симметрий, определяя таким образом как подходящие граничные условия, так и механический смысл соответствующего $S$-решения.

**3. Плоская пластичность**

Рассмотрим классическую систему плоской идеальной пластичности [3], состоящую из двух уравнений равновесия и условия пластичности Сен-Венана – Мизеса

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \tfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0,\ \tfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \tfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \\ &(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2, \end{aligned} \tag{10}$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ – компоненты тензора напряжений, $k$ – постоянная пластичности. Система (10) описывает напряженное состояние пластически деформируемого материала.

Заменой, предложенной М. Леви

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma - k\sin 2\theta, \\ \sigma_y &= \sigma + k\sin 2\theta, \\ \tau_{xy} &= k\cos 2\theta, \end{aligned}$$

система (10) сводится к квазилинейной системе:

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial \sigma}{\partial x} - 2k\left(\tfrac{\partial \theta}{\partial x}\cos 2\theta + \tfrac{\partial \theta}{\partial y}\sin 2\theta\right) = 0, \\ &\tfrac{\partial \sigma}{\partial y} - 2k\left(\tfrac{\partial \theta}{\partial x}\sin 2\theta - \tfrac{\partial \theta}{\partial y}\cos 2\theta\right) = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

в которой $\sigma$ – гидростатическое давление, $\theta + \pi/4$ – угол между первым главным направлением тензора напряжений и осью $ox$.

Система (11) является гиперболической. Соотношения (5) задают характеристики:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = tg\theta,\ \ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -ctg\theta,$$

которые в математической теории пластичности известны как линии скольжения. Соответствующие инварианты Римана равны

$$r_1 \equiv \alpha = \frac{\sigma}{2k} - \theta,\ \ r_2 \equiv \beta = \frac{\sigma}{2k} + \theta. \tag{12}$$

Система (4) принимает вид

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial \alpha}{\partial x} + tg\left(\tfrac{\beta - \alpha}{2}\right)\tfrac{\partial \alpha}{\partial y} = 0, \\ &\tfrac{\partial \beta}{\partial x} - ctg\left(\tfrac{\beta - \alpha}{2}\right)\tfrac{\partial \beta}{\partial y} = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Применяя преобразования годографа $x = x(\alpha, \beta)$, $y = y(\alpha, \beta)$ к системе (13), можно получить соответствующую линеаризованную систему

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial y}{\partial \alpha} + ctg\theta\tfrac{\partial x}{\partial \alpha} = 0, \\ &\tfrac{\partial y}{\partial \beta} - tg\theta\tfrac{\partial x}{\partial \beta} = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Переходя в (14) к новым зависимым переменным $u$, $v$, предложенным С.Г. Михлиным

$$\begin{aligned} x &= u\cos\theta - v\sin\theta, \\ y &= u\sin\theta + v\cos\theta, \end{aligned} \tag{15}$$

приводим систему (14) к виду

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{2} = 0, \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{u}{2} = 0. \tag{16}$$

Известно [4, 9], что система (11) допускает бесконечномерную алгебру высших симметрий. Алгебра Ли $L$ допускаемых точечных преобразований образована следующими операторами:

$$\begin{array}{l} X_1 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta},\ X_3 = \frac{\partial}{\partial \sigma}, \\ X_4 = \xi_1(x,y,\sigma,\theta)\frac{\partial}{\partial x} + \xi_2(x,y,\sigma,\theta)\frac{\partial}{\partial y} - 4k\theta\frac{\partial}{\partial \sigma} - \frac{\sigma}{k}\frac{\partial}{\partial \theta}, \\ X_5 = \xi(\sigma,\theta)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(\sigma,\theta)\frac{\partial}{\partial y}, \end{array} \tag{17}$$

где

$$\xi_1 = x\cos 2\theta + y\sin 2\theta + y\frac{\sigma}{k},\ \xi_2 = x\sin 2\theta - y\cos 2\theta - x\frac{\sigma}{k},$$

и $(x = \xi, y = \eta)$ – произвольное решение линейной системы

$$\begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial \theta} - 2k\left(\frac{\partial x}{\partial \sigma}\cos 2\theta + \frac{\partial y}{\partial \sigma}\sin 2\theta\right) = 0, \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} - 2k\left(\frac{\partial x}{\partial \sigma}\sin 2\theta - \frac{\partial y}{\partial \sigma}\cos 2\theta\right) = 0, \end{array} \tag{18}$$

получаемой из (11) применением преобразований годографа $x = x(\sigma,\theta)$, $y = y(\sigma,\theta)$.

Группы точечных преобразований, соответствующие операторам (17), переводят систему (11) в себя. Эти группы следующие ($a_i$ – достаточно малые групповые параметры, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 5$):

1. $X_1$ соответствует группе растяжений в плоскости $xy$: $x' = e^{a_1}x,\ y' = e^{a_1}y$;

2. $X_2$ порождает группу вращений:

$$x' = x\cos a_2 + y\sin a_2,\ y' = -x\sin a_2 + y\cos a_2,\ \theta' = \theta + a_2;$$

3. $X_3$ образует группу переноса относительно функции $\sigma$: $\sigma' = \sigma + a_3$;

4. $X_5$ соответствует группе обобщенных переносов в плоскости $xy$:

$$x' = x + a_5\xi(\sigma,\theta),\ y' = y + a_5\eta(\sigma,\theta) \tag{19}$$

и образует бесконечномерный идеал алгебры $L$.

5. Однопараметрическая группа преобразований, задаваемая оператором $X_4$, имеет следующий вид:

$$\begin{array}{l} x' = ue^{a_4}\cos\theta' - ve^{-a_4}\sin\theta', \\ y' = ue^{a_4}\sin\theta' + ve^{-a_4}\cos\theta', \\ \sigma' = 2k\left(\frac{\sigma}{2k}ch2a_4 - \theta sh2a_4\right), \\ \theta' = -\left(\frac{\sigma}{2k}sh2a_4 - \theta ch2a_4\right), \end{array} \tag{20}$$

где $u$ и $v$ – это функции из (15)

$$\begin{array}{l} u = x\cos\theta + y\sin\theta, \\ v = -x\sin\theta + y\cos\theta. \end{array}$$

Можно показать, что преобразования (20) действуют на переменные линейной системы (16) как растяжения

$$\begin{array}{l} u' = e^{a_4}u,\ v' = e^{-a_4}v, \\ \alpha' = e^{2a_4}\alpha,\ \beta' = e^{-2a_4}\beta, \end{array}$$

поэтому преобразования (20) можно назвать *квазирастяжением*.

**4. Размножение решений**

Система идеальной плоской пластичности (11) исследуется на протяжении многих лет. Упомянем некоторые из ее точных решений: a) решение Прандтля и его обобщения; b) решение для кругового отверстия, нагруженного только равномерно распределенным нормальным давлением; c) решение Надаи для пластического региона вокруг кругового отверстия нагруженного постоянным касательным напряжением; d) решение для сходящегося канала с прямыми границами и e) спирально-симметричное решение для каналов с границами в виде логарифмических спиралей [1]. Для некоторых краевых задач этой системы были построены аналитические решения с использованием законов сохранения в [4, 10]. Опишем процесс деформирования решений системы (11).

**1.** Решение Л. Прандтля, как указано в [3], явилось в свое время основой теоретического анализа прикладных задач обработки металлов давлением. Оно может быть интерпретировано как решение, описывающее напряжения в прямоугольном слое жестко-пластического материала, сжимаемого шероховатыми плитами. Слой предполагается тонким, т. е. его длина гораздо больше толщины. В терминах функций $\sigma$, $\theta$ для системы (11) это решение имеет вид

$$\begin{aligned} &\sigma = -p_1 - k\tfrac{x}{h} + k\sqrt{1 - \tfrac{y^2}{h^2}}, \\ &y = h\cos 2\theta, \end{aligned} \tag{21}$$

где $2h = \mathrm{const}$ – толщина слоя, прямые линии $y = \pm h$ являются границами плит, $p_1 = \mathrm{const}$ – значение гидростатического давления при $x = 0$. Граничные условия имеют вид

$$\theta|_{y=h} = \pi n,\ n \in Z,\ \sigma|_{y=h} = -p_1 - k\frac{x}{h}.$$

Характеристиками решения Прандтля являются циклоиды, параметрическое уравнение которых следующее:

$$\begin{aligned} &x = h(\mp 2\theta - \sin 2\theta) - h\left(2C_i + \tfrac{p_1}{k}\right), \\ &y = h\cos 2\theta, \quad i = 1, 2, \quad \theta \in \left(0, \tfrac{\pi}{2}\right), \end{aligned}$$

здесь инварианты Римана (12) постоянны: $\alpha = \mathrm{const} = C_1$, $\beta = \mathrm{const} = C_2$. Каждое семейство циклоид имеет огибающую $y = \pm h$ (рис. 1).

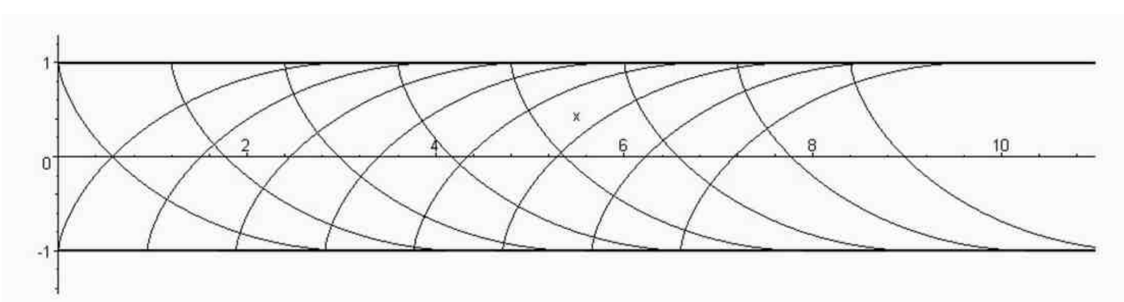


Рис. 1. Начальные характеристики (циклоиды) решения Прандтля

Решение (21) является инвариантым относительно подалгебры $X_3 + \gamma X_5$, где оператор $X_5$ имеет коэффициенты $\xi = 1$, $\eta = 0$. Действительно, действуя соответствующей группой преобразований на (21), получим только другое значение константы $p_1$. Растяжения, соответствующие оператору $X_1$, только изменяют постоянную $h$. Применение вращения $X_2$ не дает ничего нового с механической точки зрения, получаются повернутые параллельные плиты, сжимаемые в направлении друг друга.

Решение Прандтля получило многочисленные дополнения и обобщения различными авторами (см. [3]). Обобщим его, используя действие квазирастяжений (20). В терминах преобразованных переменных $x'$, $y'$, $\sigma'$, $\theta'$ решение Прандтля имеет тот же вид (так как симметрия квазирастяжения допускается исходной системой)

$$\begin{aligned} &\sigma' = -p_1 - k\tfrac{x'}{h} + k\sqrt{1 - \tfrac{y'^2}{h^2}}, \\ &y' = h\cos 2\theta'. \end{aligned} \tag{22}$$

Чтобы получить $S$-решение в виде (9), необходимо заменить $x'$, $y'$, $\sigma'$, $\theta'$ соответствующими соотношениями из (20).

Подставляя $x'$, $y'$, выраженные из (22), в значения для $u'$ и $v'$

$$\begin{aligned} &e^{a_4}u = u' = x'\cos\theta' + y'\sin\theta', \\ &e^{-a_4}v = v' = -x'\sin\theta' + y'\cos\theta' \end{aligned}$$

и учитывая (15), получим

$$\begin{aligned} &e^{a_4}(x\cos\theta + y\sin\theta) = -h\sin\theta' - \tfrac{h}{k}(\sigma' + p_1)\cos\theta', \\ &e^{-a_4}(-x\sin\theta + y\cos\theta) = h\cos\theta' + \tfrac{h}{k}(\sigma' + p_1)\sin\theta'. \end{aligned} \tag{23}$$

Выражая явно $x$, $y$ из (23), имеем $S$-решение в виде:

$$\begin{aligned} &x = -h(e^{a_4}\sin\theta\cos\theta' + e^{-a_4}\cos\theta\sin\theta') - \tfrac{h}{k}(\sigma' + p_1)(e^{a_4}\sin\theta\sin\theta' + e^{-a_4}\cos\theta\cos\theta'), \\ &y = h(e^{a_4}\cos\theta\cos\theta' - e^{-a_4}\sin\theta\sin\theta') + \tfrac{h}{k}(\sigma' + p_1)(e^{a_4}\cos\theta\sin\theta' - e^{-a_4}\sin\theta\cos\theta'), \end{aligned} \tag{24}$$

где $\theta = \frac{\sigma'}{2k}sh2a_4 + \theta' ch2a_4$.

Для получения деформированных характеристик необходимо положить в (24)

$$\sigma' = 2k(K_1 + \theta'), \quad \theta = K_1 sh2a_4 + \theta' e^{2a_4} \tag{25}$$

для первого семейства и

$$\sigma' = 2k(K_2 - \theta'), \quad \theta = K_2 sh2a_4 + \theta' e^{-2a_4} \tag{26}$$

для второго семейства линий скольжения. Здесь $K_1$ и $K_2$ - некоторые константы. Таким образом получим параметрические уравнения линий скольжения, в которых параметром является величина $\theta'$.

Окончательно $S$-характеристика первого семейства имеет вид

$$\begin{aligned} &x = -\tfrac{h}{k}\left[2k(K_1 + \theta') + p_1\right]\left[cha_4\cos(\theta - \theta') - sha_4\cos(\theta + \theta')\right] - \\ &-h\left[sha_4\sin(\theta - \theta') + cha_4\sin(\theta + \theta')\right], \\ &y = -\tfrac{h}{k}\left[2k(K_1 + \theta') + p_1\right]\left[cha_4\sin(\theta - \theta') - sha_4\sin(\theta + \theta')\right] - \\ &-h\left[-sha_4\cos(\theta - \theta') - cha_4\cos(\theta + \theta')\right], \\ &\qquad\qquad \theta = K_1 sh2a_4 + \theta' e^{2a_4}. \end{aligned} \tag{27}$$

$S$-характеристика второго семейства выражается аналогично

$$\begin{array}{l} x = -\frac{h}{k}\left[2k(K_2-\theta')+p_1\right]\left[cha_4\cos(\theta-\theta')-sha_4\cos(\theta+\theta')\right]- \\ -h\left[sha_4\sin(\theta-\theta')+cha_4\sin(\theta+\theta')\right], \\ y = -\frac{h}{k}\left[2k(K_2-\theta')+p_1\right]\left[cha_4\sin(\theta-\theta')-sha_4\sin(\theta+\theta')\right]- \\ -h\left[-sha_4\cos(\theta-\theta')-cha_4\cos(\theta+\theta')\right], \\ \qquad\qquad \theta = K_2 sh2a_4+\theta' e^{-2a_4}. \end{array} \tag{28}$$

Построим огибающие семейства (27). Для этого необходимо исключить параметр $K_1$, имея в виду, что для этого семейства $\frac{\partial y}{\partial K_1} = \frac{\partial x}{\partial K_1} tg\theta$. Это легко сделать, дифференцируя второе уравнение в (23) и учитывая (25).

После соответствующих вычислений получим, что уравнения (27) задают огибающую первого семейства при

$$K_1 = -\theta' - \frac{p_1}{2k} + \left(\frac{e^{2a_4}}{sh2a_4} - \frac{1}{2}\right) tg\theta', \quad a_4 \neq 0.$$

Аналогично, учитывая, что для второго семейства характеристик $\frac{\partial y}{\partial K_2} = -\frac{\partial x}{\partial K_2} ctg\theta$, и дифференцируя первое уравнение в (23) со значениями (26), получим, что уравнения (28) задают огибающую второго семейства линий скольжений при

$$K_2 = \theta' - \frac{p_1}{2k} - \left(\frac{e^{-2a_4}}{sh2a_4} + \frac{1}{2}\right) ctg\theta', \quad a_4 \neq 0.$$

Таким образом, поле характеристик (27), (28) можно интерпретировать как описывающее пластическое состояние слоя, сжимаемого плитами, имеющими форму, указанную на рис. 2, для фиксированных значений параметра $a_4$.

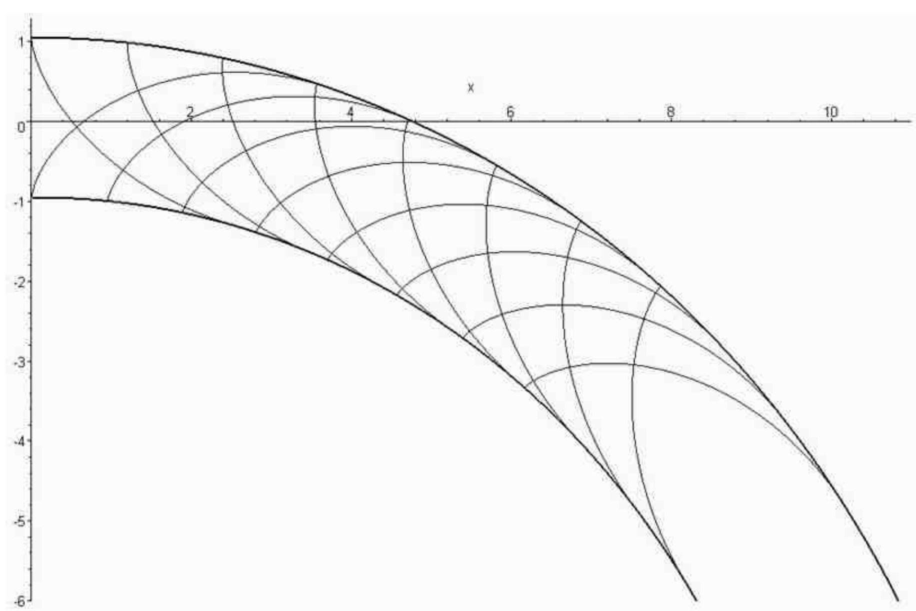


Рис. 2. Деформированные характеристики решения Прандтля

**2.** Рассмотрим хорошо известное решение [5], имеющее вид

$$\begin{aligned} &\theta = arctg\tfrac{y}{x} + \tfrac{\pi}{4} = \phi + \tfrac{\pi}{4}, \\ &\sigma = -p_2 + k + k\ln\tfrac{x^2+y^2}{R^2} = -p_2 + k + k\ln\tfrac{r^2}{R^2}, \end{aligned} \tag{29}$$

где $r$, $\phi$ – полярные координаты. Это решение описывает пластическое состояние среды вокруг кругового отверстия радиуса $R$, нагруженного равномерно распределенным нормальным давлением $p_2$ и нулевым касательным напряжением, удовлетворяющее следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} &\theta|_{r=R} = \phi + \tfrac{\pi}{4}, \\ &\sigma|_{r=R} = -p_2 + k. \end{aligned} \tag{30}$$

Линиями скольжения являются логарифмические спирали вида

$$\phi = \theta - \frac{\pi}{4},\ r = R\exp\left(\pm\theta + \frac{p_2 - k}{2k} + C_i\right), \tag{31}$$

где $C_1 = \alpha$, $C_2 = \beta$.

Решение (29) инвариантно относительно подалгебры $X_1 + \gamma X_3$. Действительно, действуя соответствующей группой преобразований на (29), получим только другие значения постоянных $p_2$ и $R$. Применение вращения $X_2$ не приводит к значимому изменению с механической точки зрения, получаем повернутое круговое отверстие.

Рассмотрим действие квазирастяжений (20). В переменных $x'$, $y'$, $\sigma'$, $\theta'$ решение для отверстия имеет тот же самый вид

$$\begin{aligned} &\theta' = arctg\tfrac{y'}{x'} + \tfrac{\pi}{4}, \\ &\sigma' = -p_2 + k + k\ln\tfrac{x'^2+y'^2}{R^2}. \end{aligned} \tag{32}$$

Легко заметить, что

$$\frac{y'}{x'} = \frac{ue^{a_4}\sin\theta' + ve^{-a_4}\cos\theta'}{ue^{a_4}\cos\theta' - ve^{-a_4}\sin\theta'} = \frac{tg\theta' + \frac{v}{u}e^{-2a_4}}{1 - \operatorname{tg}\theta'\frac{v}{u}e^{-2a_4}} = \operatorname{tg}(\theta' + \delta),$$

где $\tan\delta = \frac{v}{u}e^{-2a_4}$. Тогда из первого уравнения (32) получим $\delta = -\pi/4$, поэтому

$$v = -ue^{2a_4}. \tag{33}$$

Кроме того, используя соотношения (15), будем иметь

$$\frac{v}{u} = \frac{-x\sin\theta + y\cos\theta}{x\cos\theta + y\sin\theta} = \frac{\frac{y}{x} - tg\theta}{1 + \frac{y}{x}tg\theta} = tg(\phi - \theta) = -e^{2a_4}$$

и для функции $\theta$ получаем явную формулу

$$\theta = \phi + arctge^{2a_4}, \tag{34}$$

где $\phi$ – полярный угол.

Преобразованный полярный радиус $r$ принимает вид

$$r'^2 = x'^2 + y'^2 = u^2e^{2a_4} + v^2e^{-2a_4}.$$

Из (20), переходя к полярным координатам и учитывая (33) с (34), имеем

$$\sigma ch 2a_4 = -p_2 + k + k \ln \frac{2r^2 e^{2a_4} \cos^2\left(arctge^{2a_4}\right)}{R^2} + 2k\theta sh 2a_4,$$

что после упрощений приводит к явной формуле для функции $\sigma$:

$$\sigma = \frac{-p_2 + k}{ch2a_4} + 2kth2a_4(\phi + arctge^{2a_4}) + \frac{k}{ch2a_4} \ln \frac{r^2}{R^2 ch2a_4}. \tag{35}$$

Окончательно $S$-решение имеет вид (34), (35). Отметим, что при $a_4 = 0$ $S$-решение совпадает с исходным решением (29).

Дадим механическую интерпретацию $S$-решению (34), (35). Для преобразованных переменных граничные условия аналогичны условиям (30)

$$\begin{array}{l} \theta'|_{r'=R} = \phi' + \frac{\pi}{4}, \\ \sigma'|_{r'=R} = -p_2 + k. \end{array}$$

Кривая $r' = R$ принимает вид

$$r'^2 = r^2\left(\cos^2(\phi-\theta)e^{2a_4} + \sin^2(\phi-\theta)e^{-2a_4}\right) = R^2,$$

но так как вдоль нее $\phi - \theta = arctge^{2a_4}$, получаем, что граничная кривая для $S$-решения – это окружность $r^2 = R^2 ch2a_4$.

Окончательно $S$-решение (34), (35) удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$\begin{array}{l} \theta|_{r=R\sqrt{\operatorname{ch} 2a_4}} = \phi + \operatorname{arctg} e^{2a_4}, \\ \sigma|_{r=R\sqrt{\operatorname{ch} 2a_4}} = \frac{-p_2+k}{\operatorname{ch} 2a_4} + 2kth2a_4(\phi + \operatorname{arctg} e^{2a_4}), \end{array}$$

и гидростатическое давление $\sigma$ теперь зависит от полярного угла $\phi$.

**5. Принцип суперпозиции решений**

Известно, что система (1) может быть линеаризована преобразованием годографа $T : x = x(u_1, u_2)$, $y = y(u_1, u_2)$ в области, где соответствующий Якобиан $\Delta = \partial(u_1, u_2)/\partial(x, y)$ отличен от нуля. При этом (1) принимает линейный вид

$$\begin{array}{l} b_{12}\frac{\partial x}{\partial u_1} - b_{11}\frac{\partial x}{\partial u_2} - a_{12}\frac{\partial y}{\partial u_1} + a_{11}\frac{\partial y}{\partial u_2} = 0, \\ b_{22}\frac{\partial x}{\partial u_1} - b_{21}\frac{\partial x}{\partial u_2} - a_{22}\frac{\partial y}{\partial u_1} + a_{21}\frac{\partial y}{\partial u_2} = 0. \end{array} \tag{36}$$

Назовем любое решение системы (1) $U = (u_1(x, y), u_2(x, y))$ неособым решением, если его преобразование в решение $\chi = T(U) = (x(u_1, u_2), y(u_1, u_2))$ для линеаризованной системы (36) невырожденное.

Линейная система (36) всегда допускает бесконечномерную группу точечных симметрий ввиду принципа суперпозиции решений линейной системы. Соответствующий инфинитезимальный оператор имеет вид

$$X = \xi(u_1, u_2)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(u_1, u_2)\frac{\partial}{\partial y}, \tag{37}$$

где $(x = \xi, y = \eta)$ – произвольное решение системы (36), а группа имеет вид

$$x' = x + a\xi,\ y' = y + a\eta, \tag{38}$$

где $a \in -P$ – групповой параметр.

Пусть $\chi_1 = (x_1(u_1,u_2), y_1(u_1,u_2))$ и $\chi_2 = (x_2(u_1,u_2), y_2(u_1,u_2))$ – два решения линейной системы (36), определяющие неявно два решения $U^1$ и $U^2$ квазилинейной системы (1) соответственно.

Возьмем в качестве коэффициентов оператора (37) разницу двух решений $\chi_1$ и $\chi_2$:

$$\xi = x_1 - x_2,\ \eta = y_1 - y_2,$$

тогда в силу (38) имеем

$$\begin{aligned} x = x'(u_1,u_2) = x_2 + a\xi = ax_1(u_1,u_2) + (1-a)x_2(u_1,u_2), \\ y = y'(u_1,u_2) = y_2 + a\eta = ay_1(u_1,u_2) + (1-a)y_2(u_1,u_2), \end{aligned} \tag{39}$$

что является решением системы (36) как линейная комбинация двух решений. Но формулы (39) неявно задают $S$-решение $(u_1(x,y,a),\ u_2(x,y,a))$, которое при $a=1$ совпадает с $U^1$, а при $a=0$ – с $U^2$. Это позволяет связать любые два решения $U^1$, $U^2$ квазилинейной системы (1), которые могут быть представлены в виде $\chi_1$, $\chi_2$.

Построим новое аналитическое решение для системы пластичности (11), используя группу (19) оператора $X_5$. Для этого выразим решения (21) и (29) как решения для линеаризованной системы (18). Первое из них примет вид:

$$\begin{aligned} x_1(\sigma,\theta) &= -\sigma\tfrac{h}{k} - p_1\tfrac{h}{k} - h\sin 2\theta, \\ y_1(\sigma,\theta) &= h\cos 2\theta, \end{aligned}$$

а второе запишется так

$$\begin{aligned} x_2(\sigma,\theta) &= Re^{\frac{p_2-k}{2k}}\cos\left(\theta - \tfrac{\pi}{4}\right)e^{\frac{\sigma}{2k}}, \\ y_2(\sigma,\theta) &= Re^{\frac{p_2-k}{2k}}\sin\left(\theta - \tfrac{\pi}{4}\right)e^{\frac{\sigma}{2k}}. \end{aligned}$$

Используя соотношения (39) при $a = a_5$, получим $S$-решение

$$\begin{aligned} x &= a\left(-\sigma\tfrac{h}{k} - p_1\tfrac{h}{k} - h\sin 2\theta\right) + (1-a)Re^{\frac{p_2-k}{2k}}\cos\left(\theta - \tfrac{\pi}{4}\right)e^{\frac{\sigma}{2k}}, \\ y &= ah\cos 2\theta + (1-a)Re^{\frac{p_2-k}{2k}}\sin\left(\theta - \tfrac{\pi}{4}\right)e^{\frac{\sigma}{2k}}. \end{aligned} \tag{40}$$

По аналогии с граничными условиями (30) ищем граничную кривую для $S$-решения (40), полагая

$$\sigma = -p_1 + k,\ \theta = \phi + \pi/4 \tag{41}$$

и переходя в полярные координаты. Тогда из второго соотношения (40) имеем

$$r = -2ah\cos\phi + (1-a)Re^{\frac{p_2-p_1}{2k}}, \tag{42}$$

в то время как первое соотношение выполняется тождественно. Таким образом, $S$-решение (40) удовлетворяет граничным условиям (41) вдоль граничной кривой (42), которая является улиткой Паскаля. Подобный результат был получен в [11].

При переходе к Римановым инвариантам $\alpha$ и $\beta$ (12) решение (40) определит параметрические уравнения деформированных характеристик. Так, если взять $\sigma = 2k(\alpha+\theta)$, то уравнения первого семейства примут вид:

$$\begin{aligned} x &= -ah\left(2(\alpha+\theta) + \tfrac{p_1}{k} + \sin 2\theta\right) + (1-a)Re^{\frac{p_2-k}{2k}}\cos\left(\theta - \tfrac{\pi}{4}\right)e^{\alpha+\theta}, \\ y &= ah\cos 2\theta + (1-a)Re^{\frac{p_2-k}{2k}}\sin\left(\theta - \tfrac{\pi}{4}\right)e^{\alpha+\theta}. \end{aligned} \tag{43}$$

На рис. 3 изображены два семейства характеристик (31), соответствующие решению (29) при $p_2 = k$, для кругового отверстия радиуса $R = 2$. Деформированные линии скольжения (43) и граничная линия в форме улитки Паскаля представлены на рис. 4 ($h = 1$, $p_1 = p_2$).

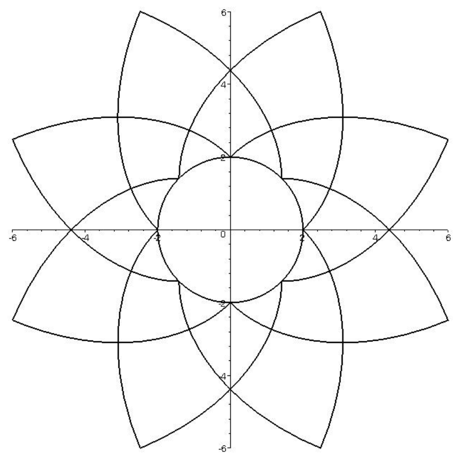

Рис. 3. Линии скольжения (логарифмические спирали) для кругового отверстия

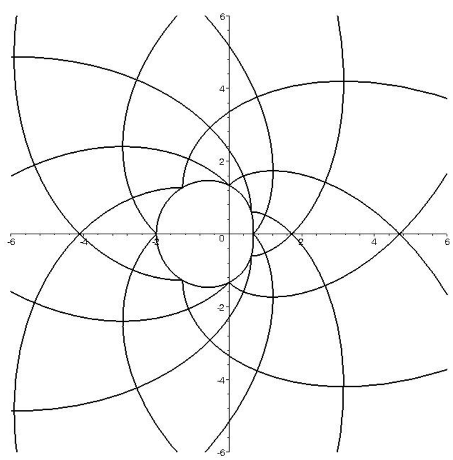

Рис. 4. Деформированные линии скольжения для улитки Паскаля

**6. Заключение**

В работе рассмотрены некоторые приложения групповых методов к решению системы плоской идеальной пластичности. Основной результат заключается в использовании действия допускаемых точечных преобразований не только на известные рашения, но и на семейства характеристик. Эта точка зрения позволяет эффективно подбирать подходящие граничные условия для размноженных решений.

Использование бесконечномерного идеала алгебры Ли допускаемых симметрий позволило сформулировать принцип суперпозиции решений для квазилинейной системы пластичности и построить новые аналитические решения.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] *Аннин, Б. Д.* Групповые свойства уравнений упругости и пластичности / Б. Д. Аннин, В. О. Бытев, С. И. Сенашов. - Новосибирск : Изд-во СО РАН, 1985. - 143 с.

[2] *Бочаров, А. В.* Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики / А. В. Бочаров и др. ; под ред. А. М. Виноградова, И. С. Красильщика. - М. : Факториал, 1997. - 464 с.

[3] *Ишлинский, А. Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. - М. : Физматлит, 2003. - 704 с.

[4] *Киряков, П. П.* Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений / П. П. Киряков, С. И. Сенашов, А. Н. Яхно. - Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2001. - 190 с.

[5] *Надаи, А.* Пластичность и разрушение твердых тел / А. Надаи. - М. : ИЛ, 1954. - 647 с.

[6] *Овсянников, Л. В.* Групповой анализ дифференциальных упавнений / Л. В. Овсянников. - М. : Наука, 1978. - 400 с.

[7] *Олвер, П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям / П. Олвер. - М. : Мир, 1989. - 639 с.

[8] *Рождественский, Б. Л.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения в газовой динамике / Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко. - М. : Наука, 1978.

[9] *Senashov, S. I.* Symmetries and conservation laws of 2-dimensional ideal plasticity / S. I. Senashov, A. M. Vinogradov // Proc. Edinburgh Math. Soc. - 1988. - Vol. (2.2) 31. - P. 415-439.

[10] *Senashov, S. I.* 2-dimensional plasticity: boundary problems and conservation laws, reproduction of solutions / S. I. Senashov, A. Yakhno // Symmetry in nonlinear mathematical physics. - Kiev, 2004. - Pt. 1, 2, 3. - P. 231-237.

[11] *Senashov, S. I.* Reproduction of solutions of bidimensional ideal plasticity / S. I. Senashov, A. Yakhno // Internat. J. Non-Linear Mech. - 2007. - Vol. 42. - P. 500-503.

*S. I. Senashov, A. N. Yakhno, L. V. Yakhno*

**DEFORMATION OF CHARACTERISTICS OF PLANE IDEAL PLASTICITY**

*Siberian State Aerospace University*

*University of Guadalajara*

***Abstract.*** The hyperbolic system of plane ideal plasticity equations under the Saint-Venant - Mises' yield criterion is considered. Characteristics on this system are deformed under the action of point transformations committed by the group that allows to construct new analytic solutions. The mechanical sense of obtained characteristic fields is discussed. The general algorithm of solution transformation of two quasilinear homogeneous equations hyperbolic system of two independent variables is proposed.

***Keywords***: boundary problem for hyperbolic systems of the equations in private derivative; the group analysis; plasticity; exact solutions of differential equations.

*Сенашов Сергей Иванович*

*доктор физико-математических наук, профессор Сибирского государственного аэрокосмического университета им. академика Решетнева, г. Красноярск*

`e-mail:` sen@sibsau.ru

*Яхно Лилия Владимировна*

*кандидат физико-математических наук, математический факультет, Университет Гвадалахары, г. Гвадалахара, Мексика*

`e-mail:` iakhno@kgtei.ru

*Яхно Александр Николаевич*

*кандидат физико-математических наук, математический факультет, Университет Гвадалахары, г. Гвадалахара, Мексика*

`e-mail:` alexander.yakhno@cucei.udg.mx

*Senashov Sergey Ivanovich*

*Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Financial-Economic Department, M. Reshetnev Siberian State Aerospace University , Krasnoyarsk*

*Yakhno Liliya Vladimirovna*

*Ph.D., Mathematics Department, Guadalajara University, Guadalajara, Mexico*

*Yakhno Alexander Nikolaevich*

*Ph.D., Mathematics Department, Guadalajara University, Guadalajara, Mexico*