Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 2(66). С. 19–24

Д. Д. Ивлев

ОБ ОДНОМ ВОПРОСЕ В ТЕОРИИ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ

Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева

Аннотация. На примерах стержневой системы и общей плоской задачи теории идеальной пластичности обсуждаются вопросы теории предельного состояния. Гиперболический тип уравнений, присущий, в основном, статически определимым уравнениям теории предельного состояния, связывается с достижением «предельной точки», характеризуемой «исчезновением» зоны статической неопределимости. Уравнения теории предельного состояния, относящиеся к эллиптическому типу, соответствуют недостижению «предельной точки», которая уходит в бесконечность.

Ключевые слова: усилия, напряжения, предел разрушения, предельная точка, статическая определимость, предельное состояние.

УДК: 539.375

1. При растяжении деформируемый образец до разрушения «проживает жизнь» в зависимости от свойства материала: упругую, хрупкую, упругопластическую, упруговязкопластическую и т. д. Приращением «времени» для образца является приращение нагрузки. При достижении предельной нагрузки образец разрушается.

Обозначим через σ растягивающее напряжение, через k – предельное напряжение, предел разрушения. Очевидно, величина k может зависеть от различных параметров, сопровождающих «жизнь» образца, рассмотрим простейшую модель, которая может быть положена в основу дальнейших построений, положим $k - const$. Другими словами, «все предопределено», какой бы «образ жизни» образец не вел при $\sigma < k$: упругий, хрупкий и т. д., это не имеет никакого значения для наступления разрушения при $\sigma = k$.

Итак, k – предел разрушения, независимая константа, характеризующая предельное состояние растягиваемого образца.

2. Рассмотрим три стержня общей поперечной площади S, растягиваемые силой P (рис. 1).

Предположим, что стержни находятся под действием чистого растяжения и расположены так, что любыми механическими эффектами, типа изгибающих моментов и пр., можно пренебречь.

Усилия в стержнях обозначим $p_1,\ p_2,\ p_3$, поперечное сечение стержней соответственно – $s_1,\ s_2,\ s_3$.

Имеет место

$$P = p_1 + p_2 + \ p_3,\ S = s_1 + s_2 + \ s_3. \qquad (1)$$

Поступила 10.03.2010

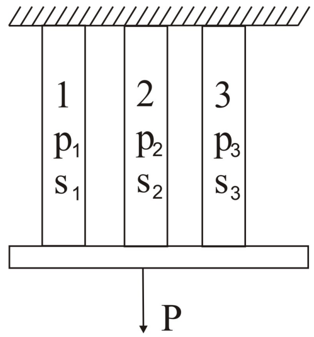

Рис. 1.

Введем напряжения

$$\sigma = \frac{P}{S},\ \sigma_1 = \frac{p_1}{s_1},\ \sigma_2 = \frac{p_2}{s_2},\ \sigma_3 = \frac{p_3}{s_3}. \tag{2}$$

Из (1), (2) получим

$$\sigma = \sigma_1 l_1 + \sigma_2 l_2 + \sigma_3 l_3,\ l_i = \frac{s_i}{S},\ l_1 + l_2 + l_3 = 1. \tag{3}$$

Предположим, что мы располагаем механизмом распределения силы P на стержни, другими словами, можно в процессе нагружения произвольно перераспределять нагрузки между стержнями, при этом, естественно, условие (3) должно быть выполнено. Предположим, что предел разрушения один для всех трех стержней:

$$\sigma_i \le k. \tag{4}$$

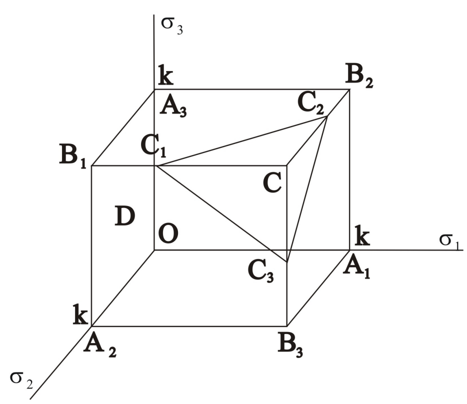

Рис. 2.

Рассмотрим ортогональную систему координат σ_i (рис. 2), отложим по осям величину k и проведем плоскости, ортогональные к осям координат σ_i, проходящие через концы отрезков длиной k. В результате получим куб, изображенный на рис. 2, внутреннее пространство которого обозначим через D. Соотношение (3) интерпретируется плоскостью в системе координат

σ_i , движущейся параллельно самой себе по мере роста величины σ. На рис. 2 показана часть этой плоскости $C_1\ C_2\ C_3$.

Любая точка на части плоскости $C_1\ C_2\ C_3$ (рис. 2) соответствует статически неопределимому состоянию системы стержней (рис. 1).

Любому процессу изменения напряженного состояния стержней (рис. 1) соответствует траектория в пространстве $D : \sigma_1(\sigma),\ \sigma_2(\sigma),\ \sigma_3(\sigma)$.

По мере увеличения нагрузки площадь $C_1\ C_2\ C_3$ стягивается к предельной точке C.

Предельное статически определимое состояние будет достигнуто при исчезновении зоны статически неопределимого состояния C_1, C_2, C_3 в точке C (рис. 2).

В результате нагружения достигается предельное состояние

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = k, \tag{5}$$

соответствующее точке C (рис. 2).

Итак, все траектории, все «жизненные пути» заканчиваются «одновременно» в предельной точке C. Сам «жизненный путь», траектория нагружения зависит от характера нагружения стержней (рис. 1). Например, один из стержней при соответствующем распределении нагрузки может выйти на предельное значение, например, $\sigma_1 = k$ при $\sigma_2,\ \sigma_3 < k$. Далее, второй стержень – на предельное значение $\sigma_2 = k$ при $\sigma_3 < k$, дальнейшее движение будет продолжаться по ребру B_3C и т. д.

3. Предельное состояние может быть достигнуто лишь при переходе статически неопределимого состояния в статически определимое. При статически неопределимом состоянии напряженное и деформированное состояния связаны между собой, и изменение (увеличение) нагрузки ведет к изменению деформированного состояния.

4. Предположим, что предел разрушения имеет вид

$$K = k + \mu\sigma,\ k, \mu - const;\ k, \mu > 0. \tag{6}$$

Согласно (6), предел разрушения зависит от величины σ и с ростом σ плоскости, ограничивающие пространство D (рис. 2), смещаются параллельно себе, предельная точка C^* смещается по отношению к точке C (рис. 3). Плоскость $C_1^*\ C_2^*\ C_3^*$ достигнет предельной точки C^* в случае

$$\sigma = K = k + \mu\sigma, \tag{7}$$

откуда

$$\sigma_{\text{пред}} = \frac{k}{1-\mu}. \tag{8}$$

Из (8) следует, что предельное состояние может быть достигнуто при $\mu < 1$. При $\mu \geq 0$ предельное состояние не достигается, точка C^* (рис. 3) при возрастании величины σ уходит в бесконечность.

5. Рассмотрим уравнения равновесия

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} = 0, \tag{9}$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ – компоненты напряжения в декартовой системе координат x, y.

Присоединим к соотношениям (9) условие предельного состояния

$$f(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = F(\sigma_1, \sigma_2) = 0, \tag{10}$$

где σ_1, σ_2 – главные напряжения.

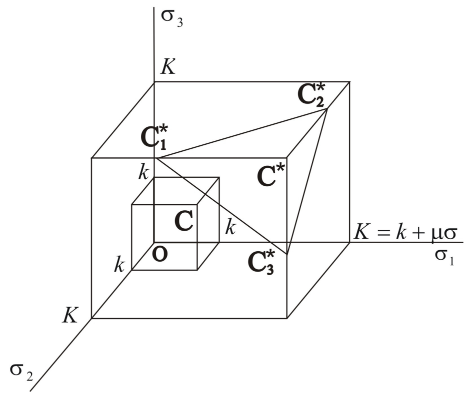

Рис. 3.

Компоненты напряжения связаны с главными напряжениями соотношениями

$$\begin{gathered}\sigma_x = \sigma_1\cos^2\theta + \sigma_2\sin^2\theta = p + \tau\cos 2\theta,\\ \sigma_y = \sigma_1\sin^2\theta + \sigma_2\cos^2\theta = p - \tau\cos 2\theta,\\ \tau_{xy} = (\sigma_1 - \sigma_2)\sin\theta\cos\theta = \tau\sin 2\theta,\end{gathered}\tag{11}$$

где θ – угол между первым главным напряжением и осью x,

$$\begin{gathered}p = \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y),\ \tau = \tfrac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2),\\ \sigma_1 = p + \tau,\ \sigma_2 = p - \tau.\end{gathered}\tag{12}$$

Из (10), (12) следует

$$\tau = \tau(p).\tag{13}$$

Из (9), (11), (13) получим систему уравнений

$$\begin{gathered}(1 + \tau'\cos 2\theta)\,\frac{\partial p}{\partial x} + \tau'\sin 2\theta\frac{\partial p}{\partial y} - 2\tau\sin 2\theta\frac{\partial \theta}{\partial x} + 2\tau\cos 2\theta\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0,\\ \tau'\sin 2\theta\frac{\partial p}{\partial x} + (1 - \tau'\cos 2\theta)\,\frac{\partial p}{\partial y} + 2\tau\cos 2\theta\frac{\partial \theta}{\partial x} + 2\tau\sin 2\theta\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0,\\ \tau' = \frac{d\tau}{dp}.\end{gathered}\tag{14}$$

Уравнения характеристик системы уравнений (14) имеют вид

$$\frac{dy}{dx} = tg\varphi = \frac{\sin 2\theta \pm \sqrt{1 - \tau'^2}}{\cos 2\theta + \tau'},\tag{15}$$

где φ – угол наклона характеристики к оси x.

Согласно (15), система уравнений (14) является

$$\begin{gathered}\text{гиперболической при } |\tau'| < 1,\\ \text{параболической при } |\tau'| = 1,\\ \text{эллиптической при } |\tau'| > 1.\end{gathered}\tag{16}$$

Положим

$$\tau = k + \mu p,\ k, \mu - const;\ k, \mu > 0.\tag{17}$$

Согласно (16), (17), система уравнений (14) будет

$$\begin{aligned} &\text{гиперболической при} \mu < 1, \\ &\text{параболической при} \mu = 1, \\ &\text{эллиптической при} \mu > 1. \end{aligned} \tag{18}$$

Рассмотрим (17) при $\sigma_1 \neq 0,\ \sigma_2 = 0$, будем иметь

$$\sigma_1 = 2k + \mu\sigma_1, \tag{19}$$

откуда аналогично (7),(8) определяется предельное значение

$$\sigma_{1\ \text{пред}} = \frac{2k}{1-\mu}. \tag{20}$$

При $\mu < 1$ предельное значение достигается, при $\mu \geq 1$ предельное состояние не достигается.

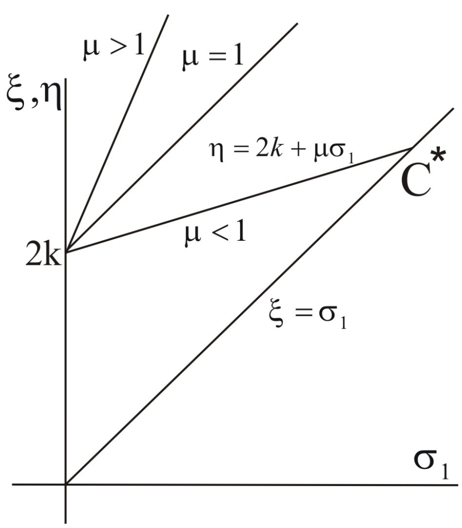

Рис. 4.

Обозначим в формуле (19) слева $\sigma_1 = \xi$, справа – $2k + \mu\sigma_1 = \eta$.

Наложим системы координат $\xi - \sigma_1,\ \eta - \sigma_1$ (рис. 4).

С ростом величины σ_1 пересечение прямых $\xi = \sigma_1,\ \eta = 2k + \mu\sigma_1$ возможно в предельной точке C^* в случае $\mu < 1$, при $\mu \geq 1$ предельная точка C^* «уходит» в бесконечность.

При достижении предельной точки C^* уравнения принадлежат к гиперболическому типу.

Возникает вопрос, как интерпретировать статически определимое состояние, соответствующее эллиптическому типу уравнений предельного состояния.

Характер деформирования для несжимаемого тела, свойства которого не зависят от величины p , носит сдвиговой характер. В подобных случаях уравнения предельного состояния принадлежат к гиперболическому типу, характеристики ортогональны между собой и совпадают с линиями действия максимальных касательных усилий, являются линиями скольжения. По мере возрастания среднего давления p (12) доля влияния объемных напряжений и деформаций возрастает, доля сдвиговых деформаций уменьшается, угол между характеристиками меняется и при $\tau'(p) > 0$ (15) деформирование происходит преимущественно за счет объемных деформаций. Эллиптический тип уравнений можно связать с этим обстоятельством, но вопрос о недостижении в этом случае напряженным состоянием «предельной точки» нуждается в исследовании.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 231 с.

D. D. Ivlev

ABOUT A QUESTION IN LIMITING STATE THEORY

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. Questions of limiting state theory are discussed on the examples of rod system and general flat problem of ideal plasticity theory. Hyperbolic type of equations mainly inherent in statically determinate equations of limiting state theory is connected with reachingt of accumulation point characterized by disappearance of static indefinability zone. Limiting state theory equations concerning elliptical type correspond to accumulation point failure goes leaves to infinity.

Keywords: efforts, tensions, destruction limit, accumulation point, static definability, limiting state.

Ивлев Дюис Данилович

доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

`e-mail:` ivlev21@mail.ru

Ivlev Dyuis Danilovich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Department of Mathematical Analysis, I.Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary