Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 2(66). С. 25–30

Ш. Г. Гасанов

МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ДОРОЖНОГО ПОКРЫТИЯ ПРИ НАЛИЧИИ МАЛЫХ ТРЕЩИН С ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИМИ БЕРЕГАМИ

Азербайджанская сельскохозяйственная академия

Аннотация. Рассматривается задача механики контактного разрушения для дорожного покрытия, имеющего в сечении трещины. Считается, что концевые зоны трещин на некоторых участках входят в контакт. Определение контактных напряжений сводится к решению сингулярного интегрального уравнения.

Ключевые слова: напряжения, деформации, упругость, трещины, дорожное покрытие.

УДК: 539.375

Рассматривается задача механики разрушения для твердого дорожного покрытия, имеющего в сечении трещины. Причиной происхождения таких дефектов чаще всего бывает нарушение режима термообработки при изготовлении (нанесении) асфальтобетона или механические повреждения поверхности катания дороги в условиях эксплуатации.

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние дорожного покрытия в процессе работы. Будем считать, что в сечении имеется N прямолинейных внутренних трещин длиной $2\ell_k$ ($k = 1, 2, \ldots, N$). Будем рассматривать практически важный случай, когда трещины имеют малую длину. В этом случае напряженно-деформированное состояние в окрестности трещин можно с достаточной для практики точностью найти с помощью решения соответствующей задачи для плоскости ($h \to \infty$, где h – высота покрытия) с трещинами, на берегах которых действует усилия, определяемые в процессе решения задачи.

Расчетная схема для дорожного покрытия принята в следующем виде:

1) покрытие является неразрезной балкой бесконечной длины неизменного поперечного сечения, лежащей на сплошном упругом основании;

2) вертикальные силы приложены в плоскости симметрии покрытия, а боковые и продольные силы не влияют на величину изгибающего момента;

3) существует линейная зависимость между величиной, равномерно распределенной по длине покрытия нагрузки, и вызванной ею осадкой y.

4) форма упругой линии изгиба дорожного покрытия от произвольной динамической нагрузки с учетом неровностей, колебаний подрессорных масс и т.п. в любой момент времени соответствует форме, возникающей от действия постоянной нагрузки, взятой в тот же момент времени.

Согласно этой расчетной схеме распределение изгибающего момента M по длине бездефектного дорожного покрытия будет [4]

$$M = P_k \frac{f(\beta x)}{4\beta}, \quad f(\beta x) = e^{-\beta x}(\sin\beta x - \cos\beta x). \tag{1}$$

Поступила 11.12.2007

Здесь $\beta = \sqrt{\frac{\lambda}{4EI}}$ – коэффициент относительной жесткости дорожного основания; λ – коэффициент постели основания; E – модуль продольной упругости материала; I – момент инерции поперечного сечения покрытия относительно горизонтальной оси; x – расстояние от расчетного сечения до точки приложения силы давления колеса.

Вблизи точки взаимодействия колеса с дорожным покрытием будут неправильности в распределении напряжений по сравнению с распределением нормальных напряжений по элементарной теории изгиба балок. Поэтому к напряжениям, порождаемым изгибающим моментом (1), нужно еще добавить [4] местные напряжения

$$\sigma_r = -\frac{2P_k}{\pi}\frac{\cos\theta}{br}, \tag{2}$$

где r – радиальное расстояние от точки приложения силы давления колеса; b – толщина покрытия.

Материал дорожного покрытия моделируем упругой средой с механическими характеристиками $G,\ \mu$. В центрах трещин разместим начала локальных систем координат $x_kO_ky_k$, оси x_k которых совпадают с линиями трещин и образуют углы α_k с осью x.

Принято, что берега трещин свободны от внешних нагрузок. Под действием внешней нагрузки в зоне сжимающих напряжений возможно закрытие берегов трещин, т. е. берега трещин на некоторых участках могут войти в контакт, что приведет к появлению контактных напряжений на данных участках берегов трещин. Итак, будем полагать наличие зон, в которых берега трещин взаимодействуют (вошли в контакт).

Принимаем, что эти области примыкают к вершине трещины, а их размеры, заранее неизвестные, могут быть сравнимы с размерами трещин.

1. Случай одной трещины

Выделим части трещины длиной d_1 и d_2 (концевые области), примыкающие к ее вершинам, в которой берега трещины взаимодействуют, т. е. вошли в контакт. Это взаимодействие препятствует раскрытию трещины. Будем считать, что взаимное проскальзывание берегов отсутствует, т. е. предельное равновесие не достигнуто.

В концевых областях, где берега трещины вошли в контакт, будут возникать нормальные $q_{y_1}(x_1)$ и касательные $q_{x_1y_1}(x_1)$ напряжения. Величины этих контактных напряжений заранее неизвестны и подлежат определению в процессе решения краевой задачи механики разрушения.

Краевые условия на берегах трещины будут иметь вид:

$$\begin{aligned}&\sigma_{y_1} = 0, \tau_{x_1y_1} = 0 - \text{на свободных берегах трещины},\\ &\sigma_{y_1} = q_{y_1}(x_1), \tau_{x_1y_1} = q_{x_1y_1}(x_1) - \text{на контактирующих берегах трещины.}\end{aligned} \tag{3}$$

Решения задачи ищем в виде

$$\sigma_x = \sigma_x^0 + \sigma_x^1, \quad \sigma_y = \sigma_y^0 + \sigma_y^1, \quad \sigma_{xy} = \sigma_{xy}^0 + \sigma_{xy}^1, \tag{4}$$

где напряжения σ_x^0, σ_y^0, σ_{xy}^0 есть распределение напряжений для бездефектной балки (покрытия).

Тогда граничное условие (3) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}&\sigma_{y_1}^{(1)} = -\sigma_{y_1}^{(0)}, \tau_{x_1y_1}^{(1)} = -\tau_{x_1y_1}^{(0)} - \text{на свободных берегах трещины},\\ &\sigma_{y_1}^{(1)} = q_{y_1}(x_1) - \sigma_{y_1}^{(0)}, \tau_{x_1y_1}^{1} = q_{x_1y_1}(x_1) - \tau_{x_1y_1}^{0} - \text{на контактирующих берегах трещины.}\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь компоненты напряжений $\sigma_{y_1}^{(0)}$, $\tau_{x_1y_1}^{(0)}$ по известным формулам теории упругости определяются через $\sigma_y^{(0)}$, $\sigma_x^{(0)}$, $\tau_{xy}^{(0)}$.

Компоненты напряжений σ_x^1, σ_y^1, σ_{xy}^1 должны удовлетворять уравнениям плоской задачи теории упругости.

Следовательно, их можно выразить через две комплексные функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ по формулам Колосова-Мусхелишвили [2]. Используя формулы Колосова-Мусхелишвили, запишем краевые условия в виде граничной задачи для отыскания комплексных потенциалов $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$:

$$\Phi(t)+\overline{\Phi(t)}+t\overline{\Phi'(t)}+\overline{\Psi(t)}=\begin{cases} f_1 & \text{на свободных берегах трещин,}\\ q_{y_1}-iq_{x_1y_1}+f_1 & \text{на контактирующих берегах трещин.}\end{cases} \quad (6)$$

Здесь $f_1=-\left(\sigma^0_{y_1}-i\tau^0_{x_1y_1}\right)$; t – аффикс точек берегов трещины.

Комплексные потенциалы $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, дающие решение граничной задачи (6), ищем в следующем виде [3]:

$$\begin{gathered}\Phi(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\ell_1}^{\ell_1}\frac{g_1(t)}{t-z_1}dt;\\ \Psi(z)=\frac{1}{2\pi}e^{-2i\alpha_1}\int\limits_{-\ell_1}^{\ell_1}\left[\frac{\overline{g_1(t)}}{t-z_1}-\frac{\overline{T_1}e^{i\alpha_1}}{(t-z_1)^2}g_1(t)\right]dt;\\ T_1=te^{i\alpha}+z_1^0;\quad z_1=e^{-i\alpha_1}\left(z-z_1^0\right).\end{gathered} \quad (7)$$

Здесь $g_1(t)$ – искомая функция, характеризующая скачок перемещений при переходе через линию трещины.

Удовлетворяя комплексными потенциалами (7) краевому условию (6) на берегах трещины, получим комплексное сингулярное интегральное уравнение относительно функции $g_1(x_1)$.

$$\int\limits_{-\ell_1}^{\ell_1}\left[R\left(t,x_1\right)g_1(t)+S\left(t,x_1\right)\overline{g_1(t)}\right]dt=\pi f_0(x_1),\quad |x_1|\le\ell_1. \quad (8)$$

Здесь

$$f_0\left(x_1\right)=\begin{cases} f_1\left(x_1\right) & \text{на свободных берегах трещин,}\\ q_{y_1}\left(x_1\right)-iq_{x_1y_1}\left(x_1\right)+f_1\left(x_1\right) & \text{на контактирующих берегах трещин.}\end{cases} \quad (9)$$

К комплексному сингулярному интегральному уравнению для внутренней трещины следует добавить дополнительное равенство, обеспечивающее однозначность смещений при обходе трещины

$$\int\limits_{-\ell_1}^{\ell_1}g_1(t)dt=0. \quad (10)$$

Применяя процедуру алгебраизации [1, 3] интегрального уравнения (8) при условии (10), сведем его к конечной системе M комплексных алгебраических уравнений для определения M неизвестных $g_1^0(t_m)=v^{(0)}(t_m)-iu^0(t_m)$ $(m=1,\,2,\,\ldots,\,M)$.

$$\begin{gathered}\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\ell_1\left[g_1^0(t_m)R\left(\ell_1t_m,\ell_1x_r\right)+\overline{g_1^0(t_m)}\,S\left(\ell_1t_m,\ell_1x_r\right)\right]=\pi f_0(x_r),\\ \sum_{m=1}^{M}g_1(t_m)=0\quad(r=1,2,\ldots,M-1),\end{gathered} \quad (11)$$

где

$$\begin{gathered}t_m=\cos\frac{2m-1}{2M}\pi\quad(m=1,2,\ldots,M),\\ x_r=\cos\frac{\pi r}{M}\quad(r=1,2,\ldots,M-1).\end{gathered}$$

Если в (11) перейти к комплексно-сопряженным значениям, то получим еще M алгебраических уравнений. В правые части (11) входят неизвестные значения контактных напряжений $q_{y_1}(x_1)$ и $q_{x_1y_1}(x_1)$ в узловых точках, принадлежащих концевым областям.

Условием, определяющим неизвестные контактные напряжения, возникающие на берегах трещины в концевых зонах, является отсутствие раскрытия трещины в этих областях. В рассматриваемой задаче это дополнительное условие удобнее записать для производной перемещений берегов трещины.

$$g(x_1)=\frac{2G}{i\,(1+\chi)}\frac{\partial}{\partial x_1}\left[u^+\,(x_1;0)-u^-\,(x_1;0)\;+i\left(v^+\,(x_1;0)-v^-\,(x_1;0)\right)\right]=0, \tag{12}$$

где x_1 – аффикс концевых областей трещины.

Требуя выполнения условия (12) в узловых точках, содержащихся в концевых областях $(-\ell_1,\ -d_1)$ и $(d_2,\ \ell_1)$, получаем недостающие уравнения для определения приближенных значений контактных напряжений $q_{y_1}(t_{m_1})$ и $q_{x_1y_1}(t_{m_1})$ в узловых точках

$$g^{(0)}(t_{m_1})=0\quad(m_1=1,2,\ldots,M_1;\mathrm{M}_2,...,\mathrm{M}), \tag{13}$$

где принято, что M_1 – число узловых точек отрезка $(-\ell_1,\ -d_1)$, а (M - M$_2$) – число узловых точек, принадлежащих концевой области $(d_2,\ \ell_1)$.

Для замкнутости системы (11) и (13) не хватает двух уравнений, определяющих размеры концевых областей. Условиями, служащими для определения размеров концевых зон, являются условия конечности напряжений в окрестности вершин трещин.

Записывая условия конечности напряжений, получаем еще два недостающих уравнения в следующем виде

$$\begin{gathered}\sum_{m=1}^{M}(-1)^m g^0(t_m)ctg\tfrac{2m-1}{4M}\pi=0;\\ \sum_{m=1}^{M}(-1)^{M+m}g^{(0)}(t_m)\cdot tg\tfrac{2m-1}{4M}\pi=0.\end{gathered} \tag{14}$$

Алгебраические системы (11), (13) и (14) связаны между собой и должны решаться совместно. Решение систем (11), (13) и (14) позволяет определить значения искомой функции $g^{(0)}(t_m)$ в узловых точках, значения $q_{y_1}-iq_{x_1y_1}$ – в тех узловых точках, которые содержатся в концевых областях, а также размеры концевых зон.

Полученная система из-за неизвестных размеров d_1 и d_2 концевой области оказалась нелинейной.

Нелинейную алгебраическую систему целесообразно решать методом последовательных приближений [4].

2. Случай произвольного числа трещин

Будем полагать наличие концевых областей, в которых берега трещин взаимодействуют (вошли в контакт). Считаем, что эти берега примыкают к вершинам соответствующих трещин, а их размеры заранее неизвестны. В концевых зонах, где берега трещин вошли в контакт, будут возникать нормальные $q_{y_k}\,(x_k)$ и касательные $q_{x_ky_k}\,(x_k)$ $(k=1,2,\ldots,N)$ напряжения. Величины контактных напряжений $q_{y_k}\,(x_k)$ и $q_{x_ky_k}\,(x_k)$ $(k=1,2,\ldots,N)$ заранее неизвестны и подлежат определению в процессе решения краевой задачи механики разрушения.

Граничные условия на берегах трещин будут иметь вид

$$\begin{gathered}\sigma_{y_k}-i\tau_{x_ky_k}=0-\text{на свободных берегах трещины},\\ \sigma_{y_k}-i\tau_{x_ky_k}=q_{y_k}-iq_{x_ky_k}-\text{на контактирующих берегах трещины}.\end{gathered} \tag{15}$$

Решение задачи ищем в виде (4). Используя (4), краевые условия (15) перепишем в следующем виде:

$$\begin{gathered}\sigma^1_{y_k}=-\sigma^0_{y_k};\quad \tau^1_{x_ky_k}=-\tau^0_{x_ky_k}-\text{на свободных берегах трещины},\\ \sigma^1_{y_k}=q^-_{y_k}\sigma^0_{y_k};\quad \tau^1_{x_ky_k}=q^-_{x_ky_k}\tau^0_{x_ky_k}-\text{на контактирующих берегах трещины}.\end{gathered} \tag{16}$$

Краевые условия можно записать в виде граничной задачи для отыскания комплексных потенциалов $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$

$$\Phi(t_k)+\overline{\Phi(t_k)}+t_k\overline{\Phi'(t_k)}+\overline{\Psi(t_k)}=\left\{\begin{array}{ll} f_k & \text{на свободных берегах трещин},\\ & q_{y_k}-iq_{x_ky_k}+f_k\ \text{на}\ L'_k,\end{array}\right. \tag{17}$$

где $f_k=-\left(\sigma^0_{y_k}-i\tau^0_{x_ky_k}\right)$; t_k – аффикс берегов k-той трещины $(k=1,2,\ldots,N)$; L'_k – совокупность концевых зон, в которых берега трещин вошли в контакт.

Комплексные потенциалы $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, дающие решение краевой задачи (17), ищем [3] в виде

$$\begin{gathered}\Phi(z)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N}\int_{-\ell_k}^{\ell_k}\frac{g_k(t)dt}{t-z_k};\\ \Psi(z)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N}e^{-2i\alpha_k}\int_{-\ell_k}^{\ell_k}\left[\frac{\overline{g_k(t)}}{t-z_k}-\frac{\overline{T_k}e^{i\alpha_k}}{(t-z_k)^2}g_k(t)\right]dt,\end{gathered}\tag{18}$$

где $T_k=te^{i\alpha_k}+z_k^0$; $z_k=e^{-i\alpha_{1k}}\left(z-z_k^0\right)$.

Дальнейший ход решения аналогичен случаю одной трещины. Поэтому приведем основные алгебраические системы, дающие решения поставленной задачи

$$\begin{gathered}\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{N}\ell_k\left[g_k^0(t_m)R_{nk}\left(\ell_k t_m,\ell_n x_r\right)+\overline{g_k^0(t_m)}\,S_{nk}\left(\ell_k t_m,\ell_n x_r\right)\right]=f_n^0(x_r),\\ \sum_{m=1}^{M}g_n^0(t_m)=0\quad(n=1,2,\ldots,N;r=1,2,\ldots,M-1).\end{gathered}\tag{19}$$

Здесь

$$f_n^0=\left\{\begin{array}{c}-\left(\sigma_{y_n}^0-i\tau_{x_ny_n}^0\right)\\ -\left(\sigma_{y_n}^0-i\tau_{x_ny_n}^0\right)+q_{y_n}-iq_{x_ny_n}\end{array}\right.\tag{20}$$

где M_{1k} – число узловых точек, принадлежащих концевым зонам k-той трещины.

$$\begin{array}{l}\sum\limits_{m=1}^{M}(-1)^m g_n^0(t_m)ctg\frac{2m-1}{4M}\pi=0;\\ \sum\limits_{m=1}^{M}(-1)^{M+m}g_n^0(t_m)\cdot tg\frac{2m-1}{4M}\pi=0.\end{array}\qquad(n=1,2,\ldots,N)\tag{21}$$

Совокупность $2\times N$ уравнений (21) позволяет найти размеры концевых зон. Из-за неизвестных размеров концевых областей объединенная система (19), (20), (21) оказалась нелинейной.

Отделяя в системах (19), (20), (21) действительные и мнимые части, удвоим число уравнений, т. е. получим две действительные объединенные системы, каждая из которых будет содержать $(N\times M+N\times M_{1n}+2N)$ уравнений для определения $v_n^0(t_m)$, $q_{y_k}(t_{m_{1n}})$ и $u_n^0(t_m)$, $q_{x_ky_k}(t_{m_{1n}})$ соответственно, а также размеров концевых зон.

Для решения нелинейных алгебраических систем использовали метод последовательных приближений. После определения искомых функций $v_n^0(t_m)$ и $u_n^0(t_m)$ становятся известными комплексные потенциалы, с помощью которых по формулам Колосова–Мусхелишвили [2] находятся напряжения, вызванные наличием трещин.

Ниже в таблице приводятся значения параметров d_1/h и d_2/h в зависимости от длины трещины ℓ/h для асфальтобетонного покрытия для одиночной трещины.

ℓ/h	0,025	0,05	0,10	0,15	0,20
d_1/h	0,009	0,028	0,036	0,042	0,053
d_2/h	0,013	0,020	0,031	0,045	0,062

Построенная расчетная модель позволяет варьированием параметра α_k исследовать различные случаи расположения малых трещин в сечении дорожного покрытия.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Мирсалимов, В. М.* Неодномерные упругопластические задачи / В. М. Мирсалимов. - М. : Наука, 1987.

[2] *Мусхелишвили, Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. - М. : Наука, 1966.

[3] *Панасюк, В. В.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацышин. - Киев : Наукова думка, 1976.

[4] *Тимошенко,С. П.* Сопротивление материалов / С. П. Тимошенко. - М. : Наука, 1965.

S. G. Gasanov

MODELLING OF THE STRESS-STRAIN STATE OF THE ROADWAY COVERING AT PRESENCE OF SMALL CRACKS WITH INTERACTING CRACK FACES

Azerbaijan State Agricultural Academy

Abstract. The problem of contact destruction mechanics for the roadway covering with cracks in section is considered. It is considered that the extreme zones of cracks at some points come into contact. The definition of contact tension adds up to the singular integral equation solution.

Keywords: roadway covering, tension, deformation, elasticity, cracks

Гасанов Шахин Гумбат оглы

кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной механики Азербайджанской сельскохозяйственной академии, г. Баку

`e-mail:` irakon63@hotmail.com

Hasanov Shahin Humbat oqlu

Ph.D., Assoc. Professor, Azerbaijan State Agricultural Academy, Baku