

Д. В. Зубчанинов, Н. Л. Охлопков

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПЛАСТИЧЕСКОГО
ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПО КРИВОЛИНЕЙНЫМ ПЛОСКИМ
ТРАЕКТОРИЯМ МНОГОЗВЕННЫМИ ЛОМАНЫМИ

Тверской государственный технический университет

Аннотация. Рассмотрено математическое моделирование процессов пластического деформирования по плоским криволинейным траекториям и их аппроксимация многозвенными ломаными. Использована новая математическая модель теории процессов, представленная в [1].

Ключевые слова: пластичность, моделирование, процесс, траектория.

УДК: 539.3

1. Математическая модель теории процессов.

В [1] на основе нелокальной формы теории процессов

$$d\bar{\sigma} = N_1 d\bar{\Theta} + ds(N_\sigma^* \bar{\sigma} + N_\Theta^* \bar{\Theta}) \quad (1)$$

предложена простая модель процессов пластического деформирования для траекторий средней кривизны и малого кручения. В (1) $\bar{\sigma}$ и $\bar{\Theta}$ – векторы напряжений и деформаций

$$\bar{\sigma} = S_k \hat{i}_k, \quad \bar{\Theta} = \Theta_k \hat{i}_k \quad (k = 1, 2, \dots, 5) \quad (2)$$

в линейном пятимерном координатном евклидовом пространстве E_5 с ортонормированным базисом $\{\hat{i}_k\}$ А. А. Ильюшина

$$\begin{cases} S_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}(\sigma_{11} - \sigma_0), & S_2 = \frac{\sigma_{22} - \sigma_{33}}{\sqrt{2}}, & S_3 = \sqrt{2}\sigma_{12}, & S_4 = \sqrt{2}\sigma_{23}, & S_5 = \sqrt{2}\sigma_{13}, \\ \Theta_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}(\varepsilon_{11} - \varepsilon_0), & \Theta_2 = \frac{\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33}}{\sqrt{2}}, & \Theta_3 = \sqrt{2}\varepsilon_{12}, & \Theta_4 = \sqrt{2}\varepsilon_{23}, & \Theta_5 = \sqrt{2}\varepsilon_{13} \end{cases} \quad (3)$$

– компоненты векторов напряжений и деформаций; σ_{ij} , ε_{ij} – компоненты тензоров напряжений и деформаций,

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{ij}, \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_{ij} \quad (4)$$

– средние значения напряжений и деформаций, s – длина дуги траектории деформирования.

Предполагается, что траектория деформирования является траекторией средней кривизны и малого кручения. Также считается, что диаграмма прослеживания процесса деформирования Одквиста-Ильюшина

$$\sigma = \Phi(s) \quad (5)$$

мало отличается от диаграммы простого нагружения Роша и Эйхингера

$$\sigma = \Phi(\Theta). \quad (6)$$

В качестве аппроксимации диаграмм (5), (6) используются выражения

$$\sigma = \Phi(s) = C(s) + 2G_*\Delta s + \sigma_*(1 - e^{-\beta\Delta s}), \quad (7)$$

$$\sigma = \Phi(\Theta) = \sigma^T + 2G_*\Delta\Theta + \sigma_*(1 - e^{-\beta\Delta s}), \quad (8)$$

где $\sigma^T = \sqrt{2/3}\sigma_T$, σ_T — предел текучести при простом нагружении, параметры G_* , σ_* , β подлежат экспериментальному определению,

$$\Delta s = s - s^T, \quad \Delta\Theta = \Theta - \Theta^T, \quad (9)$$

где s^T и Θ^T соответствуют пределу текучести σ^T , $C(s)$ - функция «изотропного» упрочнения либо разупрочнения материала.

Функции процесса N_1 , N_σ^* , N_Θ^* в (1) определяются из условия реализации простого нагружения [1]

$$N_1 = 2G_* + \beta\sigma_*, \quad N_\sigma^* = -\beta\left(1 - \frac{\sigma^T}{\sigma}\right), \quad N_\Theta^* = 2G_*\beta\left(1 - \frac{s^T}{s}\right). \quad (10)$$

Для кусочно-аналитических траекторий параметры σ^T , G_* , σ_* , β изменяются. В качестве σ^T принимается значение вторичного предела текучести σ_M^T после окончания частичной упругой разгрузки материала.

Определяющее соотношение (1) в скалярной форме имеет вид

$$dS_k = N_1 d\Theta_k + ds(N_\sigma^* S_k + N_\Theta^* \Theta_k) \quad (k = 1, 2, 3) \quad (11)$$

или

$$\frac{dS_k}{dt} = N_1 \frac{d\Theta_k}{dt} + \dot{s}(N_\sigma^* S_k + N_\Theta^* \Theta_k), \quad (12)$$

где t — обобщенное время, т. е. некоторый монотонно изменяющийся в процессе деформирования параметр.

Задача определения S_k при начальных условиях

$$\Theta_k = \Theta_k^*, \quad S_k = S_k^* \quad \text{при} \quad t = t_0 \quad (13)$$

сводится к задаче Коши. Система уравнений (12) при начальных условиях (13) может быть решена одним из численных методов, например методом Рунге – Кутты четвертого порядка точности.

2. Математическое моделирование процессов по плоским траекториям постоянной кривизны.

На рис. 1 представлена программа дифференцирования, по которой проводилось экспериментальное исследование процесса на автоматизированном испытательном комплексе СН-ЭВМ в лаборатории механических испытаний кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности Тверского государственного технического университета. Испытывались трубчатые образцы из стали 45, для которой $\sigma^T = 269$ МПа, $E = 2,05 \cdot 10^5$ МПа, $\mu = 0,3$. Образец закручивался до значений $\Theta_3 = 0,0123$, $S_3 = 385$ МПа за пределом упругости. После излома траектории деформирования на 90° осуществлялось деформирование по окружности радиуса $R = \Theta = 0,0125$. Было реализовано 4 витка окружности, после чего деформирование происходило по прямой линии, параллельной оси Θ_1 .

При теоретическом расчете согласно описанной выше математической модели [1] окружность аппроксимировалась вписанным в нее многогранником. На рис. 1 изображен вписанный

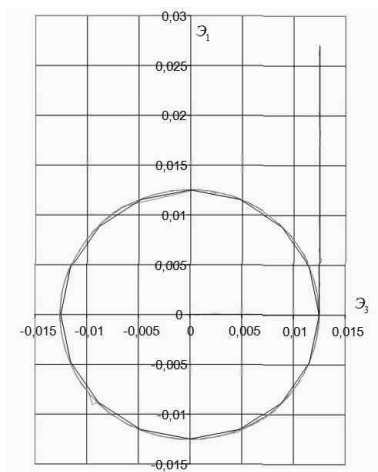


Рис. 1.

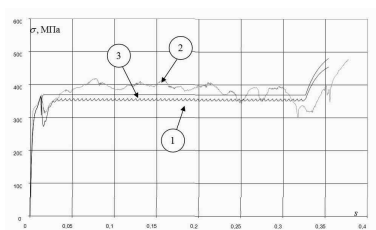


Рис. 2.

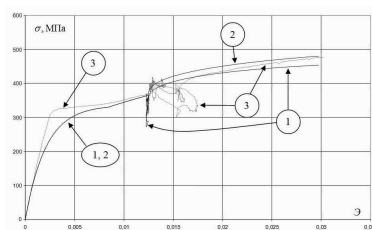


Рис. 3.

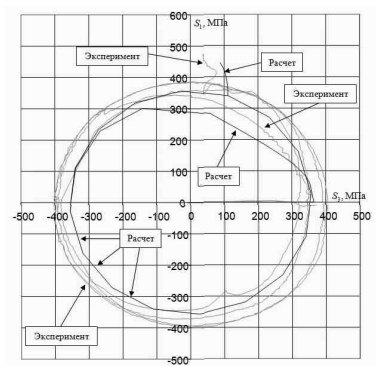


Рис. 4.

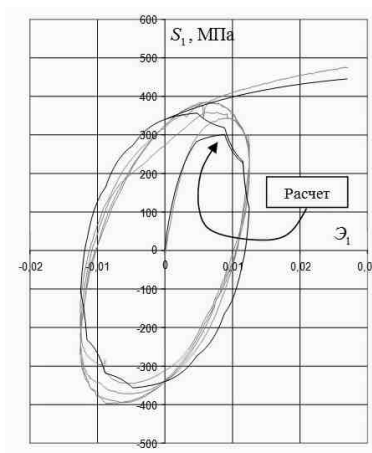


Рис. 5.

в нее шестнадцатигранник. На рис. 2 и 3 представлены скалярные свойства материала в данном опыте. Кривая 1 соответствует расчету, 2 — эксперименту, 3 — аппроксимации универсальной диаграммы прослеживания процесса. На рис. 4 представлен отклик в пространстве

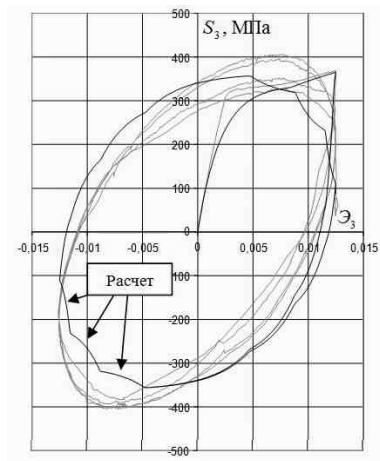


Рис. 6.

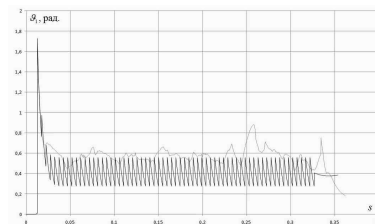


Рис. 7.

напряжений на реализованные экспериментальную и теоретическую программы. На рис. 5 и 6 изображены локальные диаграммы деформирования растяжения и кручения. На рис. 7 представлены векторные свойства материала, отражающие зависимость угла сближения ϑ_1 от длины дуги s .

При расчете материал считался циклически стабильным. В целом расчет и эксперимент дали близкие друг к другу результаты для достаточно сложной траектории деформирования, которые показывают, что построенная в [1] модель пластического деформирования материала в рамках теории процессов вполне приемлема для инженерных расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Зубчанинов, В. Г.* Математическая теория пластичности / В. Г. Зубчанинов. - Тверь : ТГТУ, 2002. - 300 с.

D. V. Zubchaninov, N. L. Okhlopkov

**MODELLING OF PLASTIC DEFORMATION PROCESSES ALONG
CURVILINEAR FLAT TRAJECTORIES WITH MULTIJOINT LINE STRINGS**

Tver State Technical University

Abstract. Mathematical modelling of plastic deformation processes along flat curvilinear trajectories and their approximation with multijoint line strings is considered. New mathematical model of process theory is used which is presented in [1].

Keywords: Plasticity, modelling, process, trajectory.

Зубчанинов Дмитрий Владимирович

аспирант кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности Тверского государственного технического университета, Тверь

e-mail: vgz@rambler.ru

Охлопков Николай Леонидович

доктор технических наук, профессор кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности Тверского государственного технического университета, Тверь

e-mail: kafsm@yandex.ru

Zubchaninov Dmitriy Vladimirovich

Postgraduate student, Department of Resistance of Materials, Elasticity and Plasticity Theories, Tver State Technical University, Tver

Okhlopkov Nikolay Leonidovich

Dr. Eng. Sci., Professor, Department of Resistance of Materials, Elasticity and Plasticity Theories, Tver State Technical University, Tver