Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 2(6). С. 46–56

С. В. Иванова

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ ТОЛСТОЙ ПЛИТЫ ИЗ АНИЗОТРОПНОГО СЖИМАЕМОГО МАТЕРИАЛА, ОСЛАБЛЕННОЙ ОТВЕРСТИЕМ ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАСТЯГИВАЮЩИХ УСИЛИЙ

Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева

Аннотация. В работе рассматривается напряженное упругопластическое состояние толстой плиты с эллиптическим отверстием из анизотропного сжимаемого материала при двуосном растяжении на бесконечности в случае плоской деформации. Решение задачи выполнено методом малого параметра [2], в первом приближении определены компоненты напряжения и перемещения в упругой и пластической областях, определена граница пластической зоны.

Ключевые слова: напряжение, деформация, упругость, пластичность, анизотропия, растяжение, плита, отверстие.

УДК: 539.374

Рассмотрим анизотропную идеальнопластическую плиту, ослабленную эллиптическим отверстием с полуосями $a(1-c)$, $a(1+c)$. В плоскости xy плита растягивается на бесконечности взаимно перпендикулярными усилиями p_1 и p_2.

Положим

$$c = \delta d_1,\ \frac{p_1 - p_2}{2k} = \delta d_2, k, p_1, p_2 - const, \tag{1}$$

где k – предел текучести при сдвиге, $\delta,\ d_1,\ d_2$ – безразмерные постоянные, принимающие значение в пределах: $0 \leq \delta \leq 1,\ 0 \leq d_i \leq 1$.

Очевидно, что при $d_1 = 0,\ d_2 = 1$ имеет место двуосное растяжение плиты с круговым отверстием, при $d_1 = 1,\ d_2 = 0$ имеет место плита с эллиптическим отверстием, равномерно растягиваемая на бесконечности. В нулевом приближении (при $\delta = 0$) имеет место осесимметричное состояние плоскости с круговым отверстием.

Уравнение контура эллиптического отверстия запишем в виде

$$\frac{x^2}{a^2(1+c)^2} + \frac{y^2}{a^2(1-c)^2} = 1, \tag{2}$$

при $c = 0$ согласно (2) имеет место круговое отверстие радиуса a.

В дальнейшем отнесем все величины, имеющие размерность длины к величине r_s^0 - радиусу упругопластической зоны в исходном нулевом приближении.

В дальнейшем перейдем к полярной системе координат ρ, θ

$$x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta,\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2},\ tg\theta = \frac{y}{x}. \tag{3}$$

Согласно (3), уравнение (2) запишем в виде

Поступила 10.02.2010

$$\rho = \frac{\alpha(1-\delta^2 d_1^2)}{\sqrt{1-2\delta d_1\cos 2\theta+\delta^2 d_1^2}} = \alpha\left[-1+\delta d_1\cos 2\theta - \frac{3}{4}\delta^2 d_1^2(1-\cos 4\theta)+\right. \tag{4}$$

$$\left.+\frac{5}{8}\delta^3 d_1^3(\cos 2\theta+\cos 6\theta)\right]+\ldots ,$$

где $\alpha = \frac{a}{r_s^0}, \rho = \frac{r}{r_s^0}$.

Припишем компонентам напряжения в пластической зоне индекс «p«» наверху, а упругой – индекс «е» наверху.

Условие пластичности примем в виде

$$A(\sigma_x^{(p)}-\sigma_y^{(p)})^2+4B\tau_{xy}^{(p)2}=(2k+\mu\sigma)^2, \sigma={}^1\!/_2(\sigma_x+\sigma_y), A, B, \mu - const, \tag{5}$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ – компоненты напряжения в декартовой системе координат, μ – коэффициент сжимаемости.

В дальнейшем отнесем компоненты напряжения σ_{ij} к величине предела текучести на сдвиг k, при этом для безразмерных величин сохраним обозначения.

Условие пластичности (5) определяет свойства анизотропного идеальнопластического материала. Коэффициенты A, B характеризуют анизотропию материала. При $A = B = C = 1$, согласно (5), имеет место изотропный материал.

Согласно (5), анизотропия материала ориентирована в декартовой системе координат x, y.

Связь между напряжениями в декартовой систем координат x, y и напряжениями в полярной системе координат ρ, θ имеет вид

$$\sigma_x = \frac{\sigma_\rho+\sigma_\theta}{2}+\frac{\sigma_\rho-\sigma_\theta}{2}\cos 2\theta+\tau_{\rho\theta}\sin 2\theta,$$

$$\sigma_y = \frac{\sigma_\rho+\sigma_\theta}{2}-\frac{\sigma_\rho-\sigma_\theta}{2}\cos 2\theta-\tau_{\rho\theta}\sin 2\theta, \tag{6}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\sigma_\rho-\sigma_\theta}{2}\sin 2\theta+\tau_{\rho\theta}\cos 2\theta.$$

Из (5), (6) получим условие пластичности в полярных координатах

$$(\sigma_\rho^{(p)}-\sigma_\theta^{(p)})^2[\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}\cos 4\theta]+4\tau_{\rho\theta}^{(p)2}[\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}\cos 4\theta]+ \tag{7}$$

$$+(\sigma_\rho^{(p)}-\sigma_\theta^{(p)})\tau_{\rho\theta}^{(p)}[A-B]\sin 4\theta=(2+\mu\sigma)^2,$$

где $\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_\rho+\sigma_\theta)$.

Решение будем искать в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)}+\delta\sigma_{ij}^{(I)}+\delta^2\sigma_{ij}^{(0)}+\ldots,$$

$$A = 1+a\delta, B = 1+b\delta, \mu = \bar{\mu}\delta; a, b, \bar{\mu} - const, \tag{8}$$

$$\delta = \frac{p_1-p_2}{2}, p_1, p_2 - const,$$

где индекс «0» наверху приписан компонентам в нулевом исходном состоянии при $\delta = 0$. В дальнейшем черту над μ опустим.

В исходном нулевом приближении имеет место осесимметрическое состояние

$$\tau_{\rho\theta}^{(0)} = 0. \tag{9}$$

Из (7), (8) следует

$$\left(\left(\sigma_\rho^{(0)p}-\sigma_\theta^{(0)p}\right)+\delta\left(\sigma_\rho^{(I)p}-\sigma_\theta^{(I)p}\right)\right)^2\left(1+\delta\frac{a+b}{2}+\delta\frac{a-b}{2}\cos 4\theta\right)+$$
$$+\left(\left(\sigma_\rho^{(0)p}-\sigma_\theta^{(0)p}\right)+\delta\left(\sigma_\rho^{(I)p}-\sigma_\theta^{(I)p}\right)\right)\left(\tau_{\rho\theta}^{(0)p}+\delta\tau_{\rho\theta}^{(I)p}\right)\left(2\delta\left(a-b\right)\sin 4\theta\right)+ \qquad (10)$$
$$+4\left(\tau_{\rho\theta}^{(0)}+\delta\tau_{\rho\theta}^{(I)}\right)^2\left(1+\delta\frac{a+b}{2}+\delta\frac{a-b}{2}\cos 4\theta\right)=\left(2+\mu\delta\sigma\right)^2.$$

В исходном нулевом приближении согласно (9), (10) имеет место

$$\sigma_\rho^{(0)p}-\sigma_\theta^{(0)p}=\pm 2. \qquad (11)$$

Согласно [2] в нулевом приближении с граничным условием $\sigma_\rho^{(0)p}=0$ при $\rho=\alpha$ получим

$$\sigma_\rho^{(0)p}=2\ln(\rho/\alpha), \sigma_\theta^{(0)p}=2(1+\ln\rho/\alpha), \tau_{\rho\theta}^{(0)p}=0. \qquad (12)$$

Из (10) в первом приближении имеет место

$$2(\sigma_\rho^{(0)p}-\sigma_\theta^{(0)p})(\sigma_\rho^{(I)p}-\sigma_\theta^{(I)p})+(\sigma_\rho^{(0)p}-\sigma_\theta^{(0)p})^2\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\cos 4\theta\right)= \qquad (13)$$
$$=2\mu(\sigma_\rho^{(0)p}+\sigma_\theta^{(0)p}).$$

Уравнение равновесия в полярной системе координат имеет вид

$$\frac{\partial\sigma_\rho^{(I)}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau_{\rho\theta}^{(I)}}{\partial\theta}+\frac{\sigma_\rho^{(I)}-\sigma_\theta^{(I)}}{\rho}=0, \qquad (14)$$
$$\frac{\partial\tau_{\rho\theta}^{(I)}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_\theta^{(I)}}{\partial\theta}+\frac{2\tau_{\rho\theta}^{(I)}}{\rho}=0.$$

Уравнениям равновесия удовлетворим, полагая

$$\begin{cases} \sigma_\rho^{(I)}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi^{(I)}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi^{(I)}}{\partial^2\theta^2}, \\ \sigma_\theta^{(I)}=\frac{\partial^2\Phi^{(I)}}{\partial\rho^2}, \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)}=-\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi^{(I)}}{\partial\theta}\right). \end{cases} \qquad (15)$$

Для определения первого приближения согласно (12), (13) имеет место уравнение

$$(\sigma_\rho^{(I)}-\sigma_\theta^{(I)})=\mu(2\ln\rho+1)-\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\cos 4\theta\right). \qquad (16)$$

Из (15), (16) найдем уравнение для определения функции напряжения $\Phi^{(I)p}$:

$$\rho^2\cdot\frac{\partial^2\Phi^{(I)p}}{\partial\rho^2}-\rho\frac{\partial\Phi^{(I)p}}{\partial\rho}-\frac{\partial^2\Phi^{(I)p}}{\partial\theta^2}=\rho^2\cdot\left[\mu(2\ln\rho+1)-\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\cos 4\theta\right)\right]. \qquad (17)$$

Функцию напряжения представим в виде $\Phi^{(I)p}=\Phi^{(I)p}_{\text{однор}}+\Phi^{(I)p}_{\text{неоднор}}$

$$\Phi^{(I)p}_{\text{однор}}=\mathrm{C}_{00}+\mathrm{C}_{01}\rho^2+\left(\mathrm{C}_{21}\rho\cos(\sqrt{3}\ln\rho)+\mathrm{C}_{22}\rho\sin(\sqrt{3}\ln\rho)\right)\cos 2\theta+$$
$$+\left(\mathrm{C}_{41}\rho\cos\left(\sqrt{15}\ln\rho\right)+\mathrm{C}_{42}\rho\sin\left(\sqrt{15}\ln\rho\right)\right)\cos 4\theta, \qquad (18)$$
$$\Phi^{(I)p}_{\text{неоднор}}=\frac{1}{2}\mu\rho^2\left(\ln^2\rho-\ln\rho+1/2\right)+\frac{\mu}{2\rho}\ln\rho-\frac{a+b}{4}\ln\rho-\frac{a-b}{32}\rho^2\cos 4\theta.$$

Общее решение в первом приближении согласно [2], (18) запишем в виде

$$\sigma_\rho^{(I)p} = \mathrm{C}_{00} + \frac{1}{\rho}\left(\left(\sqrt{3}\mathrm{C}_{22} - 3\mathrm{C}_{21}\right)\cos(\sqrt{3}\ln\rho) - \left(3\mathrm{C}_{22} + \sqrt{3}\mathrm{C}_{21}\right)\sin(\sqrt{3}\ln\rho)\right)\cos 2\theta +$$

$$+\frac{1}{\rho}\left(\left(\sqrt{15}\mathrm{C}_{42} - 15\mathrm{C}_{41}\right)\cos(\sqrt{15}\ln\rho) - \left(15\mathrm{C}_{42} + \sqrt{15}\mathrm{C}_{41}\right)\sin(\sqrt{15}\ln\rho) - \frac{a-b}{16}\right)\cos 4\theta +$$

$$+\mu(\ln^2\frac{\rho}{\alpha} + \ln\frac{\rho}{\alpha} - \frac{1}{2}) + \frac{\mu}{2\rho}(\ln\rho + 1) - \frac{(a+b)}{4\rho^2},$$

$$\sigma_\theta^{(I)p} = \sigma_\rho^{(I)p} - \mu(2\ln\rho + 1) - \left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\cos 4\theta\right), \tag{19}$$

$$\tau_{\rho\theta}^{(I)p} = \frac{2\sqrt{3}}{\rho}\left(\mathrm{C}_{22}\cos(\sqrt{3}\ln\rho) - \mathrm{C}_{21}\sin(\sqrt{3}\ln\rho)\right)\sin 2\theta +$$

$$+\frac{4\sqrt{15}}{\rho}\left(\mathrm{C}_{42}\cos(\sqrt{15}\ln\rho) - \mathrm{C}_{41}\sin(\sqrt{15}\ln\rho) + \frac{(a-b)}{8}\right)\sin 4\theta.$$

Коэфициенты $C_{00}, C_{21}, C_{22}, C_{41}, C_{42}$ определим из (19) и граничных условий при $\rho = \alpha$. В первом приближении граничные условия при $\rho = \alpha$ согласно [2] имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(I)\,p} &= -d_1\cos 2\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)\,p} &= -2d_1\sin 2\theta. \end{aligned} \tag{20}$$

Из (19) и (20) получим

$$C_{00} = \frac{\mu}{2}\left(1 - \frac{1}{\alpha}(\ln\alpha + 1)\right) + \frac{a+b}{4\alpha^2},$$

$$C_{21} = d_1\alpha\frac{\sin(\sqrt{3}\ln\alpha)}{\sqrt{3}},$$

$$C_{22} = -d_1\alpha\frac{\cos\sqrt{3}\ln\alpha}{\sqrt{3}}, \tag{21}$$

$$C_{41} = -\frac{a-b}{120}\left(\frac{1}{2}\cos(\sqrt{15}\ln\alpha) - \sqrt{15}\cos(\sqrt{15}\ln\alpha) + 15\sin(\sqrt{15}\ln\alpha)\right),$$

$$C_{42} = -\frac{a-b}{120}\left(15\cos(\sqrt{15}\ln\alpha) - \sqrt{15}\sin(\sqrt{15}\ln\alpha) + \frac{1}{2}\sin(\sqrt{15}\ln\alpha)\right).$$

Согласно (19), (21) компоненты напряженного состояния в пластической области вблизи эллиптического отверстия в первом приближении имеют вид

$$\sigma_\rho^{(I)p} = \mu\left(\ln^2\frac{\rho}{\alpha} + \ln\frac{\rho}{\alpha}\right) + \frac{\mu}{2}\frac{(\alpha\ln\rho - \rho\ln\alpha) + (\alpha - \rho)}{\alpha\rho} + \frac{(a+b)\left(\rho^2 - \alpha^2\right)}{\alpha^2\rho^2} +$$

$$+\frac{d_1\alpha}{\sqrt{3}\rho}\left(\left(\sqrt{3}\cos\sqrt{3}\ln\rho - 3\sin\sqrt{3}\ln\rho\right)\cos\sqrt{3}\ln\alpha -\right.$$

$$\left.-\left(3\cos\sqrt{3}\ln\rho + \sqrt{3}\sin\sqrt{3}\ln\rho\right)\sin\sqrt{3}\ln\alpha\right)\cos 2\theta +$$

$$-\frac{a-b}{120\rho}\left(\left(\sqrt{15}\cos\sqrt{15}\ln\rho - 15\sin\sqrt{15}\ln\rho\right)\left(15\cos(\sqrt{15}\ln\alpha) - \sqrt{15}\sin(\sqrt{15}\ln\alpha) +\right.\right.$$

$$+\frac{1}{2}\sin(\sqrt{15}\ln\alpha)\Big)-\Big(15\cos\sqrt{15}\ln\rho+\sqrt{15}\sin\sqrt{15}\ln\rho\Big)\Big(\frac{1}{2}\cos(\sqrt{15}\ln\alpha)-\sqrt{15}\cos(\sqrt{15}\ln\alpha)+$$

$$15\sin(\sqrt{15}\ln\alpha)\Big)+15(a-b)\Big)\cos 4\theta,$$

$$\sigma_\theta^{(I)p}=\mu\left(\ln^2\frac{\rho}{\alpha}+\ln\frac{\rho}{\alpha}-2\ln\rho-1\right)+\frac{\mu}{2}\frac{(\alpha\ln\rho-\rho\ln\alpha)+(\alpha-\rho)}{\alpha\rho}+\frac{(a+b)\left(2\left(\rho^2-\alpha^2\right)+\alpha^2\rho^2\right)}{2\alpha^2\rho^2}+$$

$$+\frac{d_1\alpha}{\sqrt{3}\rho}\Big(\Big(\sqrt{3}\cos\sqrt{3}\ln\rho-3\sin\sqrt{3}\ln\rho\Big)\cos\sqrt{3}\ln\alpha-$$

$$-\Big(3\cos\sqrt{3}\ln\rho+\sqrt{3}\sin\sqrt{3}\ln\rho\Big)\sin\sqrt{3}\ln\alpha\Big)\cos 2\theta+ \tag{22}$$

$$-\frac{a-b}{120\rho}\Big(\Big(\sqrt{15}\cos\sqrt{15}\ln\rho-15\sin\sqrt{15}\ln\rho\Big)\Big(15\cos(\sqrt{15}\ln\alpha)-\sqrt{15}\sin(\sqrt{15}\ln\alpha)+$$

$$+\frac{1}{2}\sin(\sqrt{15}\ln\alpha)\Big)-\Big(15\cos\sqrt{15}\ln\rho+\sqrt{15}\sin\sqrt{15}\ln\rho\Big)\Big(\frac{1}{2}\cos(\sqrt{15}\ln\alpha)-\sqrt{15}\cos(\sqrt{15}\ln\alpha)+$$

$$+15\sin(\sqrt{15}\ln\alpha)\Big)-45(a-b)\Big)\cos 4\theta,$$

$$\tau_{\rho\theta}^{(I)p}=-\frac{2d_1\alpha}{\rho}\Big(\cos\sqrt{3}\ln\alpha\cos\sqrt{3}\ln\rho+\sin(\sqrt{3}\ln\alpha)\sin(\sqrt{3}\ln\rho)\Big)\sin 2\theta+$$

$$-\frac{\sqrt{15}}{\rho}\frac{(a-b)}{30}\Big(\cos(\sqrt{15}\ln\rho)\Big(15\cos(\sqrt{15}\ln\alpha)-\sqrt{15}\sin(\sqrt{15}\ln\alpha)+\frac{1}{2}\sin(\sqrt{15}\ln\alpha)\Big)+$$

$$+\Big(\frac{1}{2}\cos(\sqrt{15}\ln\alpha)-\sqrt{15}\cos(\sqrt{15}\ln\alpha)+15\sin(\sqrt{15}\ln\alpha)\Big)\sin(\sqrt{15}\ln\rho)+15\,(a-b)\Big)\sin 4\theta.$$

Уравнения упругопластической границы представим в виде

$$\rho_s=1+\delta\rho_s^{(I)}+\delta^2\rho_s^{(II)}+... \tag{23}$$

Условия сопряжения на упругопластической границе имеют вид

$$\sigma_\rho^p\big|_{\rho_s}=\sigma_\rho^e\big|_{\rho_s};\,\sigma_\theta^p\big|_{\rho_s}=\sigma_\theta^e\big|_{\rho_s};\ \tau_{\rho\theta}^p\Big|_{\rho_s}=\tau_{\rho\theta}^e\big|_{\rho_s}. \tag{24}$$

Граничные условия на бесконечности в упругой зоне запишем в виде

$$\sigma_\rho^e\big|_{\rho=\infty}=q-\delta\cos 2\theta,\quad \sigma_\theta^e\big|_{\rho=\infty}=q+\delta\cos 2\theta,\quad \tau_{\rho\theta}^e\big|_{\rho=\infty}=\delta\sin 2\theta, \tag{25}$$

где

$$\delta=\frac{p_1-p_2}{2k},\quad q=\frac{p_1+p_2}{2k}.$$

В упругой зоне ($1<\rho<\infty$) распределение напряжений определяется согласно [1]. Удовлетворяя граничному условию $\sigma_\rho=q$ при $\rho=\infty$ и условию сопряжения (24), из формул распределения напряжений и (10) получим

$$\sigma_\rho^{(0)e}=q-\frac{1}{\rho^2},\ \sigma_\theta^{(0)e}=q+\frac{1}{\rho^2},\ \tau_{\rho\theta}^{(0)e}=0. \tag{26}$$

Условия сопряжения для нулевых компонентов согласно (24) имеют вид

$$\sigma_\rho^{(0)p}\Big|_{\rho=1}=\sigma_\rho^{(0)e}\Big|_{\rho=1};\ \sigma_\theta^{(0)p}\Big|_{\rho=1}=\sigma_\theta^{(0)e}\Big|_{\rho=1}. \tag{27}$$

Из (12), (26), (27) следует

$$\begin{aligned}&2\ln\tfrac{1}{\alpha}=q-1,\\&2\left(1+\ln\tfrac{1}{\alpha}\right)=q+1.\end{aligned} \tag{28}$$

Из двух соотношений (28) с учетом $\alpha=\frac{a}{r_s^0}$ получим

$$r_s^{(0)}=a\exp\frac{1}{2}\left(\frac{q}{k}-1\right). \tag{29}$$

В первом приближении условия сопряжения (24) согласно (23) примут вид

$$\sigma_\rho^{(I)p}\Big|_{\rho=1}=\sigma_\rho^{(I)e}\Big|_{\rho=1},\ \sigma_\theta^{(I)p}+\frac{\partial\sigma_\theta^{(0)p}}{\partial\rho}\Bigg|_{\rho=1}=\sigma_\theta^{(I)e}+\frac{\partial\sigma_\theta^{(0)e}}{\partial\rho}\Bigg|_{\rho=1},\ \tau_{\rho\theta}^{(I)p}=\tau_{\rho\theta}^{(I)e}. \tag{30}$$

Компоненты напряжения на границе пластической зоны $\rho=\alpha$ в первом приближении согласно (19)–(22) представим в виде

$$\begin{aligned}\sigma_\rho^{(I)p}&=A_0+A_2\cos 2\theta+A_4\cos 4\theta,\\ \sigma_\theta^{(I)p}&=A_0^*+A_2^*\cos 2\theta+A_4^*\cos 4\theta,\\ \tau_{\rho\theta}^{(I)p}&=B_2\sin 2\theta+B_4\sin 4\theta,\end{aligned} \tag{31}$$

где

$$A_0=\mu\left(\ln^2\frac{1}{\alpha}+\ln\frac{1}{\alpha}\right)+\frac{\mu}{2}\frac{(\alpha-1)-\ln a}{\alpha}+\frac{(a+b)\left(1-\alpha^2\right)}{\alpha^2},$$

$$A_2=\frac{d_1\alpha}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\cos\sqrt{3}\ln\alpha-3\sin\sqrt{3}\ln\alpha\right),$$

$$A_4=-\frac{a-b}{120}\left(\sqrt{15}\left(15\cos(\sqrt{15}\ln\alpha)-\sqrt{15}\sin(\sqrt{15}\ln\alpha)+\frac{1}{2}\sin(\sqrt{15}\ln\alpha)\right)-\right.$$
$$\left.-15\left(\frac{1}{2}\cos(\sqrt{15}\ln\alpha)-\sqrt{15}\cos(\sqrt{15}\ln\alpha)+15\sin(\sqrt{15}\ln\alpha)\right)+15(a-b)\right),$$

$$A_0^*=\mu\left(\ln^2\frac{1}{\alpha}+\ln\frac{1}{\alpha}-1\right)+\frac{\mu}{2}\frac{(\alpha-1)-\ln\alpha}{\alpha}+\frac{(a+b)\left(2\left(1-\alpha^2\right)+\alpha^2\right)}{2\alpha^2},$$

$$A_2^*=\frac{d_1\alpha}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\cos\sqrt{3}\ln\alpha-3\sin\sqrt{3}\ln\alpha\right),$$

$$A_4^*=-\frac{a-b}{120}\left(\sqrt{15}\left(15\cos(\sqrt{15}\ln\alpha)-\sqrt{15}\sin(\sqrt{15}\ln\alpha)+\frac{1}{2}\sin(\sqrt{15}\ln\alpha)\right)-\right.$$
$$\left.-15\left(\frac{1}{2}\cos(\sqrt{15}\ln\alpha)-\sqrt{15}\cos(\sqrt{15}\ln\alpha)+15\sin(\sqrt{15}\ln\alpha)\right)-45(a-b)\right),$$

$$B_2=-\frac{2d_1\alpha}{\rho}\left(\cos\sqrt{3}\ln\alpha\right),$$

$$B_4=-\frac{\sqrt{15}(a-b)}{30}\left(\left(15\cos(\sqrt{15}\ln\alpha)-\sqrt{15}\sin(\sqrt{15}\ln\alpha)+\frac{1}{2}\sin(\sqrt{15}\ln\alpha)\right)+15\,(a-b)\right).$$

Из (25), (30), (31) согласно [1] получим

$$\sigma_\rho^{(I)e} = -\frac{A_0}{\rho^2} + \left[\left(-1 + \frac{4}{\rho^2} - \frac{3}{\rho^4}\right) + \left(-\frac{1}{\rho^4} + \frac{2}{\rho^2}\right) A_2\right] \cos 2\theta + \left(-\frac{2}{\rho^6} + \frac{3}{\rho^4}\right) A_4 \cos 4\theta,$$

$$\sigma_\theta^{(I)e} = -\frac{A_0+4}{\rho^2} + \left[\left(-1 - \frac{3}{\rho^4}\right) + \frac{A_2}{\rho^4}\right] \cos 2\theta + \left(\frac{2}{\rho^6} - \frac{1}{\rho^4}\right) A_4^* \cos 4\theta, \tag{32}$$

$$\tau_{\rho\theta}^{(I)e} = \left(-1 - \frac{3}{\rho^2} + \frac{5}{\rho^4}\right) B_2 \sin 2\theta + \left(\frac{3}{\rho^6} - \frac{2}{\rho^4}\right) B_4 \sin 4\theta.$$

Для определения радиуса упругопластической области в первом приближении получим

$$\rho_s^{(I)} = \frac{\sigma_\theta^{(I)p} - \sigma_\theta^{(I)e}}{\frac{d\sigma_\theta^{(0)e}}{d\rho} - \frac{d\sigma_\theta^{(0)p}}{d\rho}}, \rho = 1. \tag{33}$$

Из (12), (26) будем иметь

$$\left.\frac{d\sigma_\theta^{(0)p}}{d\rho}\right|_{\rho=1} = 2, \qquad \left.\frac{d\sigma_\theta^{(0)e}}{d\rho}\right|_{\rho=1} = -2, \tag{34}$$

откуда согласно (31) – (34) найдем

$$\rho_s^{(I)} = \frac{1}{4}\left(\sigma_\theta^{(I)p} - \sigma_\theta^{(I)e}\right) = \frac{1}{4}\left[-A_0^* + A_0 + 4 + (A_2^* - 4A_2) \cos 2\theta + (A_4 - A_4^*) \cos 4\theta\right].$$

Определим перемещение в пластической и упругой областях. Характер изменения деформированного состояния в некоторой точке P в процессе нагружения в рассматриваемом случае представляется следующим образом: сначала возрастают упругие деформации; затем, когда граница упругопластического состояния материала достигает точки P, процесс изменения упругих деформаций прекращается, так как изменение напряжений в пластической зоне в рассматриваемом случае не происходит. При дальнейшем возрастании нагрузок возникают пластические деформации.

В исходном нулевом приближении в упругих и пластических областях имеет место условие несжимаемости

$$e_\rho^{(0)} + e_\theta^{(0)} = 0. \tag{35}$$

Согласно (35) перемещения и деформации в упругой и пластической областях примут вид

$$u^{(0)} = \frac{1}{2G\rho}, v^{(0)} = 0, e_\rho^{(0)} = -\frac{2}{G\rho}, e_\theta^{(0)} = \frac{2}{G\rho^2}, e_{\rho\theta}^{(0)} = 0. \tag{36}$$

В упругой области согласно [1] и (31), получим

$$u^{(I)e} = -\frac{1+\mu}{\rho E}\left[\mu\left(\ln^2\frac{1}{\alpha} + \ln\frac{1}{\alpha}\right) + \frac{\mu}{2}\frac{(\alpha-1) - \ln a}{\alpha} + \frac{(a+b)\left(1-\alpha^2\right)}{\alpha^2}\right] -$$

$$-\frac{1}{E}\left[\frac{(1+\mu)}{3\rho^3}(A_2 - 2B_2) - \frac{2}{\rho}(A_2 - B_2) + (1+\mu)\left(\rho - \frac{1}{\rho^3}\right) + \frac{4}{\rho^3}\right] \cos 2\theta +$$

$$+\frac{1}{E}\left(\frac{1+\mu}{5\rho^5}(2A_4 - 3B_4) - \frac{3+\mu}{3\rho^3}(A_4 - B_4)\right) \cos 4\theta\Bigg], \tag{37}$$

$$v^{(I)e} = \frac{1}{E}\left[\frac{(1+\mu)}{3\rho^3}(A_2 - 2B_2) - \frac{\mu-1}{\rho}(A_2 - B_2) - (1+\mu)\left(\rho + \frac{1}{\rho^3}\right) + \frac{2-\mu}{\rho}\right] \sin 2\theta +$$

$$+\left(\frac{1}{5\rho^5}(1+\mu)(2A_4-3B_4)-\frac{2\mu}{3\rho^3}(A_4-B_4)\right)\sin 4\theta\Bigg].$$

Условия сопряжения на упругопластической границе имеют вид

$$u_\rho^p\big|_{\rho=1}=u_\rho^e\big|_{\rho=1};\ v_{\rho\theta}^p\Big|_{\rho=1}=v_{\rho\theta}^e\big|_{\rho=1}. \tag{38}$$

В пластической зоне согласно (7) и ассоциированному закону течения имеют место следующие соотношения

$$e_\rho=e_\rho^p=\lambda\frac{\partial f}{\partial\sigma_\rho}=\lambda\left[2\left(\sigma_\rho^{(p)}-\sigma_\theta^{(p)}\right)\left[\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}\cos 4\theta\right]+\right.$$
$$\left.+\tau_{\rho\theta}(A-B)\sin 4\theta-\mu(2+\mu\sigma)\right],$$
$$e_\theta=e_\theta^p=\lambda\frac{\partial f}{\partial\sigma_\theta}=\lambda\left[-2\left(\sigma_\rho^{(p)}-\sigma_\theta^{(p)}\right)\left[\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}\cos 4\theta\right]-\right. \tag{39}$$
$$\left.-\tau_{\rho\theta}(A-B)\sin 4\theta-\mu(2+\mu\sigma)\right],$$
$$e_{\rho\theta}=e_{\rho\theta}^p=\lambda\frac{\partial f}{\partial\tau_{\rho\theta}}=4\tau_{\rho\theta}^{(p)}\left[\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}\cos 4\theta\right]+$$
$$+\left(\sigma_\rho^{(p)}-\sigma_\theta^{(p)}\right)\left[\frac{A-B}{2}\sin 4\theta\right].$$

Из (39) следует

$$\frac{e_\rho^p}{\partial f/d\sigma_\rho}=\frac{e_\theta^p}{\partial f/d\sigma_\theta}=\frac{e_{\rho\theta}^p}{\partial f/d\tau_{\rho\theta}}. \tag{40}$$

В соотношениях (40) присутствуют компоненты пластической деформации, так как только они испытывают приращения в пластической зоне при возрастании нагрузки, причем при $t=0$ имеют место равенства $e_\rho^p=e_\theta^p=e_{\rho\theta}^p=0$. Момент времени $t=0$ для каждой точки А отсчитывается от момента прохождения через нее упругопластической границы.

Полные деформации при $t=0$, т. е. в момент возникновения пластических деформаций, отличны от нуля и совпадают с упругими деформациями, накопленными элементом тела к моменту достижения им предела текучести. Перепишем соотношения (40) в виде

$$\frac{e_\rho-e_\rho^e}{\partial f/d\sigma_\rho}=\frac{e_\theta-e_\theta^e}{\partial f/d\sigma_\theta}=\frac{2\left(e_{\rho\theta}-e_{\rho\theta}^e\right)}{\partial f/d\tau_{\rho\theta}}. \tag{41}$$

С учетом (40) соотношения (41) перепишем в виде

$$\frac{e_\rho-e_\rho^e}{2\left(\sigma_\rho^{(p)}-\sigma_\theta^{(p)}\right)\left[\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}\cos 4\theta\right]+\tau_{\rho\theta}(A-B)\sin 4\theta-\mu(2+\mu\sigma)}=$$
$$=\frac{e_\theta-e_\theta^e}{-2\left(\sigma_\rho^{(p)}-\sigma_\theta^{(p)}\right)\left[\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}\cos 4\theta\right]+\tau_{\rho\theta}(A-B)\sin 4\theta-\mu(2+\mu\sigma)}= \tag{42}$$
$$=\frac{2\left(e_{\rho\theta}-e_{\rho\theta}^e\right)}{4\tau_{\rho\theta}^{(p)}\left[\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}\cos 4\theta\right]+\left(\sigma_\rho^{(p)}-\sigma_\theta^{(p)}\right)\left[\frac{A-B}{2}\sin 4\theta\right]}=\lambda.$$

Упругие деформации при $\mu=\frac{1}{2}$ примут вид

$$e^e_\rho = \tfrac{1}{4G}\left(\sigma_\rho - \sigma_\theta\right), e^e_\theta = \tfrac{1}{4G}\left(\sigma_\theta - \sigma_\rho\right), e^e_{\rho\theta} = \tfrac{\tau_{\rho\theta}}{2G},$$
$$e^e_\rho + e^e_\theta = 0. \tag{43}$$

Из (39) следует

$$e^{(I)}_\rho + e^{(I)}_\theta = -4\lambda^0\mu, \tag{44}$$

где $\lambda^{(0)} = -\frac{1}{8G}\left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right)$.

Из (44) получим

$$e^{(I)}_\rho + e^{(I)}_\theta = e^{(I)e}_\rho + e^{(I)e}_\theta + e^{(I)p}_\rho + e^{(I)p}_\theta = \frac{\mu}{2G}\left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right). \tag{45}$$

Согласно [2] запишем соотношения для деформаций

$$e_\rho = \frac{\partial u^{(n)}}{\partial\rho}, e_\theta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial v^{(n)}}{\partial\theta} + \frac{u^{(n)}}{\rho}, e_{\rho\theta} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial v^{(n)}}{\partial\rho} - \frac{v^{(n)}}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u^{(n)}}{\partial\theta}\right]. \tag{46}$$

Из соотношения (42) найдем

$$e^{(I)}_{\rho\theta} = \frac{\tau^{(I)p}_{\rho\theta}}{2G}\left(2 - \frac{1}{\rho^2}\right). \tag{47}$$

Согласно (45)–(47), с учетом $e^{(I)e}_\rho + e^{(I)e}_\theta = 0$ дифференциальные уравнения для определения перемещения в пластической области в первом приближении примут вид

$$\frac{\partial u^{(I)}}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v^{(I)}}{\partial\theta} + \frac{u^{(I)}}{\rho} = -\frac{\mu}{2G}\left(\frac{1}{\rho} - 1\right), \tag{48}$$

$$\frac{\partial v}{\partial\rho} - \frac{v}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\theta} = -\frac{\tau^{(I)p}_{\rho\theta}}{2G}\left(\frac{1}{\rho^2} - 2\right). \tag{49}$$

Из уравнений (48), (49) получим

$$u^{(I)p} = \frac{\mathrm{C}^*_{00}}{\rho} + \frac{\mu}{2G\rho}(\rho^2 - 2\ln\rho) - 2\left(\mathrm{C}^*_{21}\cos(\sqrt{3}\ln\rho) + \mathrm{C}^*_{22}\sin(\sqrt{3}\ln\rho)\right)\cos 2\theta +$$
$$-4\left(\mathrm{C}^*_{41}\cos(\sqrt{15}\ln\rho) + \mathrm{C}^*_{42}\sin(\sqrt{15}\ln\rho)\right)\cos 4\theta,$$

$$v^{(I)p} = \frac{3\tau^{(I)p}_{\rho\theta}}{4G\rho} + \left(\left(\sqrt{3}\mathrm{C}^*_{22} + \mathrm{C}_{21}\right)\cos(\sqrt{3}\ln\rho) + \left(\mathrm{C}^*_{22} - \sqrt{3}\mathrm{C}_{21}\right)\sin(\sqrt{3}\ln\rho)\right)\sin 2\theta +$$
$$+\left(\left(\sqrt{15}\mathrm{C}^*_{42} + \mathrm{C}^*_{41}\right)\cos(\sqrt{15}\ln\rho) + \left(\mathrm{C}^*_{42} + \sqrt{15}\mathrm{C}^*_{41}\right)\sin(\sqrt{15}\ln\rho)\right)\sin 4\theta.$$

Из (32) и условий сопряжения (26) найдем коэффициенты $C^*_{00}, C^*_{21}, C^*_{22}, C^*_{41}, C^*_{42}$.

$$C^*_{00} = -\frac{\mu}{2G} - \frac{1+\mu}{E}\left[\mu\left(\ln^2 {}^1\!/\!_\alpha + \ln {}^1\!/\!_\alpha + \frac{\alpha - 1}{4}\right) - \frac{(a+b)(1-\alpha)}{\alpha^2}\right],$$

$$C^*_{21} = \frac{\sqrt{3}M\cos(\ln\sqrt{3}\rho) + (M + 2M')\sin(\ln\sqrt{3}\rho)}{2\sqrt{3}},$$

$$C^*_{22} = \frac{\sqrt{3}M\sin(\ln\sqrt{3}\rho) - (M + 2M')\cos(\ln\sqrt{3}\rho)}{2\sqrt{3}},$$

$$C^*_{41} = \frac{\sqrt{15}N\cos(\ln\sqrt{15}\rho) + (N + 4N')\sin(\ln\sqrt{3}\rho)}{-4\sqrt{15}},$$

$$C^*_{42} = \frac{\sqrt{15}N\sin(\ln\sqrt{15}\rho) - (N + 4N')\cos(\ln\sqrt{3}\rho)}{-4\sqrt{15}},$$

где

$$M = -\frac{1}{E}\left[\frac{(1+\mu)}{3}(A_2 - 2B_2) - 2(A_2 - B_2) + 4\right],$$

$$M' = \frac{1}{E}\left(\frac{1+\mu}{5}(2A_4 - 3B_4) - \frac{3+\mu}{3}(A_4 - B_4)\right),$$

$$N = \frac{1}{E}\left[\frac{(1+\mu)}{3}(A_2 - 2B_2) - (\mu - 1)(A_2 - B_2) - 3\mu\right],$$

$$N' = \left(\frac{1}{5}(1+\mu)(2A_4 - 3B_4) - \frac{2\mu}{3}(A_4 - B_4)\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

[1]*Бицено, К. Б.* Техническая академия / К. Б. Бицено, Р. Л. Граммель. - Л. : Гостехиздат, 1950. - 900 с.

[2]*Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. - М. : Наука, 1978. - 208 с.

[3]*Леденев, А. П.* Об анизотропном идеальнопластическом состоянии толстой плиты, ослабленной эллиптическим отверстием / А. П. Леднев // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. - 2006. - № 1 (48). - С. 81-85.

[4] *Леденев, А. П.* Об упругопластическом состоянии толстостенной трубы из анизотропного идеальнопластического материала / А. П. Леднев // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. - 2006. - № 2(49). - С. 16-21.

[5]*Леденев, А. П.* Упругопластическое состояние анизотропной пластической трубы под действием внутреннего давления / А. П. Леднев // Научно-информационный вестник докторантов, аспирантов, студентов / Чуваш. гос. пед. ун-та. - 2006. - №1 (7). - Т. 1. - С. 20-27.

S. V. Ivanova

ELASTOPLASTIC CONDITION OF A THICK SLAB FROM ANYSOTROPIC MATERIAL BEING COMPRESSED WEAKENED BY AN APERTURE UNDER THE STRETCHING STRESS

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. Stressed elastoplastic state of a thick slab from anisotropic material being compressed with an elliptic aperture in biaxial tension at infinity is considered in the work. The solution of this task is made with the help of perturbation theory [2], the tension and shift components in elastic and plastic stability are found at first approximation, the limit of plastic area is determined.

Keywords: tension, deformation, elasticity, plasticity, anisotropy, an aperture.

Иванова Светлана Владимировна

аспирант кафедры математического анализа Чувашского государственного педагогического университета, г. Чебоксары

`e-mail:` svivanko@ya.ru

Ivanova Svetlana Vladimirovna

Postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, I.Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary