Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 2(66). С. 64–68

Д. А. Ивлев

ОБ АНИЗОТРОПИИ ПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. Обсуждаются свойства условий пластичности для анизотропных тел в случае плоской деформации.

Ключевые слова: напряжения, пластичность, анизотропия, предел текучести.

УДК: 539.375

1. Рассмотрим замену переменных [1]

$$\begin{array}{ll} \sigma_x = \sigma + k\cos 2\varphi, & \sigma = \frac{1}{2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right), \\ \sigma_y = \sigma - k\cos 2\varphi, & tg 2\varphi = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}, \\ \tau_{xy} = k\sin 2\varphi, & \end{array} \tag{1}$$

где $\sigma_x,\ \sigma_y, \tau_{xy}$ – компоненты напряжений в декартовой системе координат xy, σ – среднее давление, φ – угол наклона первого главного напряжения к оси x.

Величина максимального касательного напряжения $\tau_{\max}$ определяется из соотношения [2]

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \tag{2}$$

Из (1), (2) следует

$$\tau_{\max} = k. \tag{3}$$

Согласно (1), (3) величина k является максимальным значением касательного напряжения.

Условие пластичности максимального касательного напряжения Треска – Сен-Венана для изотропного тела согласно (2), (3) имеет вид

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2, \quad k - const, \tag{4}$$

где k – предел текучести на сдвиг.

Следуя [3], запишем условие пластичности для анизотропного тела

$$A\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4B\tau_{xy}^2 = 4k_0^2, \quad k_0,\ A,\ B - const, \tag{5}$$

где A, B – константы анизотропии.

Из (1), (5) получим

Поступила 10.03.2010

$$k(\varphi)=\frac{k_0}{\sqrt{A\cos^2 2\varphi+B\sin^2 2\varphi}}. \tag{6}$$

Условие пластичности (5), согласно (1–3) можно записать в виде

$$(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2=4k^2(\varphi), \tag{7}$$

где $k(\varphi)$ определено соотношением (6).

Величина $k(\varphi)$ является переменным пределом текучести на сдвиг в зависимости от угла φ. Величина $2k(\varphi)$ является переменным пределом текучести на растяжение вдоль направления, образующего угол φ с осью x.

Соотношение (6) запишем в виде

$$k(\varphi)=\frac{k_0}{\sqrt{\frac{A+B}{2}}\sqrt{1+\left(\frac{A-B}{A+B}\right)\cos 4\varphi}}. \tag{8}$$

На рис. 1 показан характер изменения зависимости $k=k(\varphi)$ согласно (8).

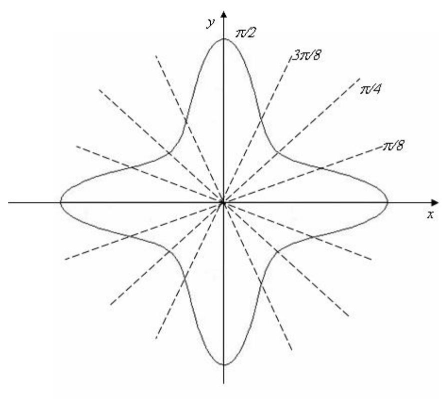

Рис. 1.

2. Рассмотрим условие пластичности

$$(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2+2(\sigma_x-\sigma_y)\tau_{xy}=4k_0^2, \quad k_0-const. \tag{9}$$

Из (1), (8) найдем

$$k^2+k^2\cos 2\varphi\cdot\sin 2\varphi=k_0^2. \tag{10}$$

Из (10) найдем

$$k(\varphi)=\frac{k_0}{\sqrt{1+\frac{1}{2}\sin 4\varphi}}. \tag{11}$$

Условие пластичности (10) согласно (1–3) можно записать в виде (7), где $k(\varphi)$ определяется согласно (11). На рис. 2 показан характер изменения зависимости $k=k(\varphi)$ согласно (11). В обоих случаях (рис. 1, 2) имеет место четырехлепестковый характер анизотропии, угол между осями симметрии на рисунках 1, 2, соответствующий соотношениям (8), (11), составляет $\frac{\pi}{8}$.

3. Рассмотрим условие пластичности

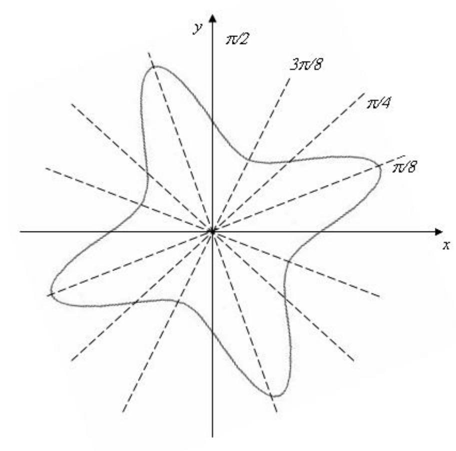

Рис. 2.

$$A\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+4B\tau_{xy}^2+2C\left(\sigma_x-\sigma_y\right)\tau_{xy}=4k_0^2, \quad k_0,\ A,\ B,\ C-const. \tag{12}$$

Из (1), (12) найдем

$$k(\varphi)=\frac{k_0}{\sqrt{\frac{A+B}{2}}\sqrt{1+\left(\frac{A-B}{A+B}\right)\cos 4\varphi+\left(\frac{C}{A+B}\right)\sin 4\varphi}}. \tag{13}$$

Выражение (13) можно записать в виде

$$k(\varphi)=\frac{k_0}{\sqrt{\frac{A+B}{2}}\sqrt{1+M\cdot\cos 4\left(\varphi-\varphi_0\right)}}, \tag{14}$$

где $tg4\varphi_0=\frac{C}{A-B}, \quad M=\sqrt{\left(\frac{A-B}{A+B}\right)^2+\left(\frac{C}{A+B}\right)^2}$.

Согласно (14) четырехлепестковый характер анизотропии сохраняется, оси симметрии повернуты на угол φ_0 по отношению к оси x.

4. Рассмотрим условие пластичности Мизеса

$$\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+\left(\sigma_y-\sigma_z\right)^2+\left(\sigma_z-\sigma_x\right)^2+6\left(\tau_{xy}^2+\tau_{xz}^2+\tau_{yz}^2\right)=6k_0^2, \quad k_0-const. \tag{15}$$

В случае плоского напряженного состояния имеет место

$$\sigma_z=\tau_{xz}=\tau_{yz}=0. \tag{16}$$

Из (15), (16) получим

$$\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+\sigma_x^2+\sigma_y^2+6\tau_{xy}^2=6k_0^2. \tag{17}$$

Используя представления

$$\sigma_x=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}, \quad \sigma_y=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}, \tag{18}$$

запишем выражение (17) в виде

$$3\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+4\sigma^2+12\tau_{xy}^2=12k_0^2. \tag{19}$$

Из (1), (19) будем иметь

$$k = \sqrt{k_0^2 - \frac{\sigma^2}{3}}. \tag{20}$$

Условие пластичности (19) согласно (1), (20) может быть переписано в виде

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2(\sigma), \tag{21}$$

где $k(\sigma)$ определяется согласно (20).

Рассмотрим условие пластичности для анизотропного материала

$$A(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4B\tau_{xy}^2 = 4k^2(\sigma), \quad A, B - const, \tag{22}$$

величина $k(\sigma)$ определяется из (20).

Из (1), (22) аналогично (8) получим

$$k(\sigma, \varphi) = \frac{k(\sigma)}{\sqrt{\frac{A+B}{2}}\sqrt{1 + \left(\frac{A-B}{A+B}\right)\cos 4\varphi}}. \tag{23}$$

Условие пластичности (23) согласно (1), (23) может быть переписано в виде

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2(\sigma, \varphi),$$

где $k(\sigma, \varphi)$ определяется согласно (23).

ЛИТЕРАТУРА

[1]*Качанов, Л. М.* Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. - М. : Гостехтеоретиздат, 1956.

[2]*Зубчанинов, В. Г.* Сопротивление материалов / В. Г. Зубчанинов. - Тверь : ТГТУ, 2005. - Кн. 2. - 352 с.

[3]*Хилл, Р.* Математическая теория пластичности / Р. Хилл. - М. : Гостехиздат, 1956.

D. A. Ivlev

ABOUT PLASTIC OBJECTS ANISOTROPY

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. Plasticity conditions characteristics for anisotropic objects at flat deformation are considered.

Keywords: tension, plastisity, anisotropy, yield

Ивлев Дмитрий Александрович

аспирант кафедры математического анализа Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: DAIvlev@mail.ru

Dmitriy Aleksandrovich Ivlev

Postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, I.Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary