Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2010. №2(66). С. 69–74

Л. С. Козлова

ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ С ОТВЕРСТИЕМ ПРИ КРУЧЕНИИ

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. В настоящей работе исследуется задача о предельном состоянии цилиндрических и призматических стержней с отверстием при кручении. Предполагается, что стержень находится под давлением, линейно меняющимся вдоль образующей. Определено напряженное состояние стержня, построено поле характеристик в случае, когда внутренний контур поперечного сечения образует произвольный угол θ.

Ключевые слова: кручение, напряжение, пластичность, упругость, стержень, характеристики, отверстие.

УДК: 539.374

1. Рассмотрим призматический стержень, ориентированный в декартовой системе координат xyz, причем образующие стержня направлены параллельно оси z. Предположим, что стержень закручивается вокруг оси z.

Пусть напряженное состояние, возникающее в стержне, характеризуется условием пластичности Мизеса

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2\right) = 6. \tag{1}$$

К соотношению (1) присоединим три уравнения равновесия

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \tfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \tfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \\ &\tfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \tfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \tfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \\ &\tfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \tfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \tfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Система соотношений (1), (2) является статически неопределимой. Предположим

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -\lambda z + c,\ \tau_{xy} = 0,\ \tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y),\ \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y), \tag{3}$$

где $\lambda = const$, $c = const$.

Согласно (3) из (1) и (2) получим

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \lambda, \quad \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 = 1. \tag{4}$$

Второму уравнению (4) удовлетворим, полагая

$$\tau_{xz} = \cos\varphi,\ \tau_{yz} = \sin\varphi. \tag{5}$$

Подставляя выражения (5) в первое уравнение (4), имеем

Поступила 16.01.2010

$$-\sin\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\lambda. \tag{6}$$

Система уравнений для определения характеристик (6) имеет вид

$$-\frac{dx}{\sin\varphi}=\frac{dy}{\cos\varphi}=\frac{d\varphi}{\lambda}. \tag{7}$$

Из системы (7) следует

$$\lambda x=\cos\varphi+c_1,\quad \lambda y=\sin\varphi+c_2. \tag{8}$$

Исключая из (8) φ, получим уравнения характеристик соотношения (6)

$$\left(x-\frac{c_1}{\lambda}\right)^2+\left(y-\frac{c_2}{\lambda}\right)^2=\frac{1}{\lambda^2}. \tag{9}$$

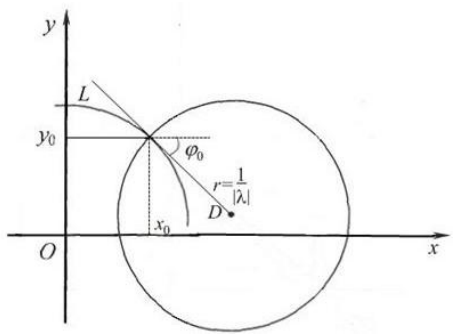

Рис. 1.

Обозначим через L внутренний контур поперечного сечения стержня в плоскости xy *(z=const)*.

Пусть $(x_0,\ y_0)\in L$ и $\varphi\,(x_0,\ y_0)=\varphi_0$. Тогда из (8) следует

$$\lambda x_0=\cos\varphi_0+c_1,\quad \lambda y_0=\sin\varphi_0+c_2. \tag{10}$$

С учетом (10) из (9) получим

$$\left(x-\left(x_0-\frac{\cos\varphi_0}{\lambda}\right)\right)^2+\left(y-\left(y_0-\frac{\sin\varphi_0}{\lambda}\right)\right)^2=\frac{1}{\lambda^2}. \tag{11}$$

Пусть $\tau=\tau_{xz}\mathrm{i}+\tau_{yz}\mathrm{j}$ – вектор касательного напряжения, где i,j – единичные векторы вдоль осей x и y. Согласно (5)

$$\frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}}=\mathrm{tg}\varphi, \tag{12}$$

то есть φ – угол наклона касательного напряжения τ к оси x. Из (7) следует, что вдоль характеристик (11)

$$\frac{dy}{dx}=-ctg\varphi. \tag{13}$$

Следовательно, вектор касательного напряжения τ всегда направлен ортогонально к характеристике.

Предположим, что внутренняя боковая поверхность стержня свободна от касательных усилий. Следовательно, вектор касательного напряжения τ во всех точках контура L направлен

по касательной к ней. Отсюда следует, что характеристики есть окружности, нормальные к контуру.

Таким образом, характеристики уравнения (6) в плоскости xy есть окружности радиуса $\frac{1}{|\lambda|}$, причем центры этих окружностей расположены на касательных к контуру L и расстоянии $\frac{1}{|\lambda|}$ от точки касания.

Согласно (8) и (10) из (7) имеем

$$\tau_{xz} = \cos\varphi_0 + \lambda\,(x - x_0)\,,\ \tau_{yz} = \sin\varphi_0 + \lambda\,(y - y_0)\,, \tag{14}$$

где φ_0 – угол, образованный касательной к внутреннему контуру L в точке $(\mathrm{x_o}, \mathrm{y_o})$ и осью x.

2. Рассмотрим кручение цилиндрического стержня с круговым отверстием. Контур поперечного сечения L отверстия стержня есть окружность произвольного радиуса R, центр которой совпадает с центром внешнего контура поперечного сечения стержня. Расположение характеристик и огибающей характеристик приведено на рис. 2.

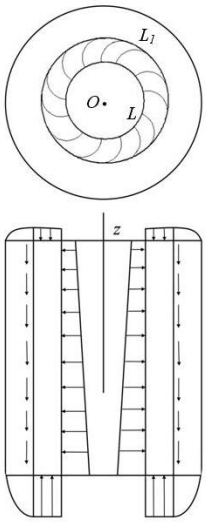

Рис. 2.

Напряженное состояние определяется только в кольце, ограниченном окружностями L и L_1, где L_1 – огибающая характеристик. Характеристики уравнения (6) ортогональны к контуру L и касаются огибающей L_1. Вектор касательного напряжения τ во всех точках L_1 направлен к ней ортогонально вдоль образующей стержня. Решение задачи не может быть продолжено за круг, ограниченный огибающей L_1.

Рассмотрим случай, когда контур поперечного сечения L отверстия стержня образует произвольный угол θ, одна из сторон которого совпадает с положительной полуосью OX, с вершиной в начале координат.

В вершине угла θ имеет место семейство характеристик, уравнение которого имеет вид:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = \frac{1}{\lambda^2}, \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 = \frac{1}{\lambda^2}. \end{cases} \tag{15}$$

Уравнение огибающей данного семейства характеристик имеет вид:

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2. \tag{16}$$

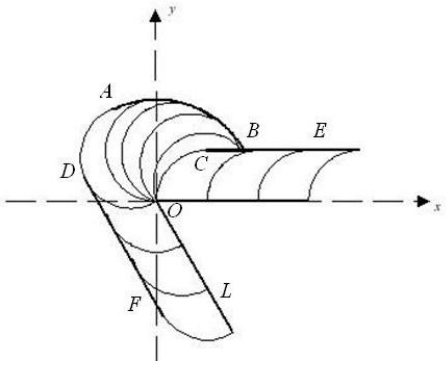

Рис. 3.

На рис. 3 построено поле характеристик для рассматриваемого угла θ.

На отрезке BC касательное напряжение не сопрягается. Следовательно, вдоль отрезка BC необходимо предположить наличие щели. Вектор касательного напряжения τ направлен ортогонально к левому берегу щели по образующей стержня. Аналогично нормальная составляющая вектора касательного напряжения τ к правому берегу щели направлена по образующей стержня вглубь щели. Решение не может быть продолжено за огибающие характеристик $EBADF$, вдоль этих линий действуют касательные напряжения, направленные вдоль оси z, уравновешивающие перепад давления σ_z.

На рисунках 4 и 5 построено поле характеристик, в случае когда внутреннее отверстие контура есть правильный треугольник и квадрат.

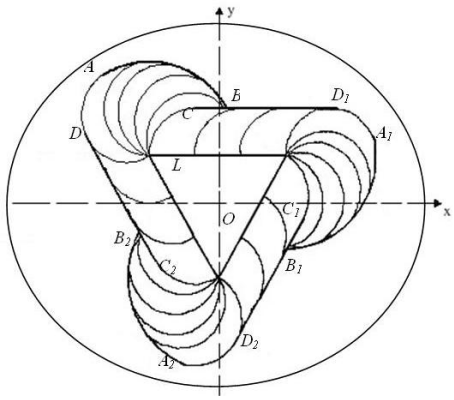

Рис. 4.

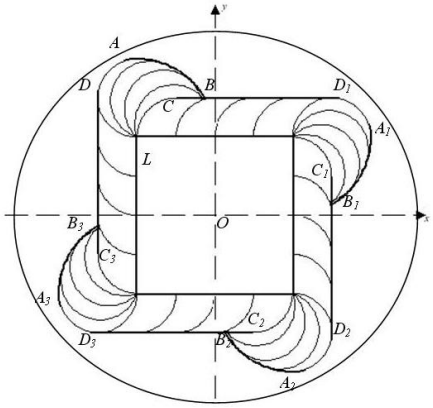

Рис. 5.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. - М. : Наука, 1966. - 232 с.

[2] *Качанов, Л. М.* Основа теории пластичности / Л. М. Качанов. - М. : Наука, 1969. - 420 с.

[3] *Козлова, Л. С.* Предельное состояние призматических стержней при кручении / Л. С. Козлова, Б. Г. Миронов // Научно-информационный вестник докторантов, аспирантов, студентов / Чуваш. гос. пед. ун-т. - 2009. - № 2 (14). - С. 8-17.

[4] *Козлова, Л. С.* Предельное состояние призматических стержней, находящихся под давлением / Л. С. Козлова, Б. Г. Миронов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. - 2009. - № 3-4 (63). - С. 6-14.

[5] *Миронов, Б. Г.* О кручении призматических стержней, находящихся под действием давления, линейно меняющегося вдоль образующей / Б. Г. Миронов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. - 2006. - № 1 (48). - С. 98-101.

L. S. Kozlova

LIMITING CONDITION OF CYLINDRICAL AND PRISMATIC RODS WITH APERTURE AT TORSION

I.Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. The problem of limiting condition of cylindrical and prismatic rods with aperture at torsion is investigated in the given work. It is supposed that the rod is under the linearly varying along the forming pressure. The rod tension is found, the field of characteristics in the case when the internal contour of a cross section forms an angle θ is constructed.

Keywords: torsion, pressure, plasticity, elasticity, rod, characteristics, an aperture.

Козлова Людмила Святославовна

аспирант кафедры математического анализа Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

e-mail: l_s_kozlova@mail.ru

Kozlova Ljudmila Svjatoslavovna

Postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, I.Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary