Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 4 (22). С. 204–214

В. Н. Орлов, С. А. Иванов

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ В ОБЛАСТИ АНАЛИТИЧНОСТИ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Аннотация. В статье приводится доказательство теоремы существования решения нелинейного дифференциального уравнения второго порядка с полиномиальной правой частью четвертой степени и получена структура его аналитического приближенного решения в области аналитичности. В доказательстве теоремы существования применен метод мажорант не к правой части дифференциального уравнения, как это делается в классической литературе, а к решению рассматриваемого нелинейного дифференциального уравнения. Полученные результаты сопровождаются расчетами.

Ключевые слова: нелинейное дифференциальное уравнение,подвижная особая точка, аналитическое приближенное решение.

УДК: 517.928.4

Введение. Многие задачи из разных областей приводят к решению нелинейных дифференциальных уравнений, в частности к дифференциальному уравнению Риккати приводит задача построения оптимальных фильтров Кальмана – Бьюси [1], [2]. В последнее время решение задач в экономике приводит не только к скалярным [3], но и матричным дифференциальным уравнениям Риккати [4]. Ряд задач теории эволюционных процессов [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12] приводят к уравнениям Пенлеве, задача нелинейной оптики для описания сверхизлучательной лавины [13] приводит к уравнению Абеля. Перечисленные виды нелинейных дифференциальных уравнений относятся к категории неразрешимых в общем случае в квадратурах, так как обладают подвижными особыми точками. Следует отметить частные случаи разрешимости в квадратурах таких уравнений, развиваемые Белорусской школой аналитической теории дифференциальных уравнений [14], [15], [16], [17], [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24]. На данный момент в работах [25], [26], [27], [28], [29], [30], [31], [32], [33], [34], [35], [36], [37] предлагается приближенный аналитический метод для решения такой категории дифференциальных уравнений, состоящей из следующих задач:

1. Доказательство теоремы существования решения нелинейного дифференциального уравнения в области аналитичности.
2. Построение приближенного решения нелинейного дифференциального уравнения в области аналитичности.
3. Исследование влияния возмущения исходных данных на приближенное решение в области аналитичности.
4. Доказательство теоремы существования решения нелинейного дифференциального уравнения в окрестности подвижной особой точки.

Поступила 10.11.2014

5. Построение приближенного решения нелинейного дифференциального уравнения в окрестности подвижной особой точки.

6. Исследование влияния возмущения подвижной особой точки на приближенное решение.

7. Получение точных границ области применения приближенного решения в окрестности подвижной особой точки.

8. Получение точных критериев существования подвижных особых точек решения нелинейного дифференциального уравнения.

9. Разработка алгоритма и программы вычисления координат подвижной особой точки решения нелинейного дифференциального уравнения.

В данной работе предлагается решение первых двух задач из перечисленного списка, основанное на известных фактах и методах аналитической теории дифференциальных уравнений, математического анализа и вычислительной математики.

Выбор рассматриваемого нелинейного дифференциального уравнения связан с тем, что оно является одной из основ для более сложных нелинейных дифференциальных уравнений. Имея возможность приближенно решать рассматриваемое уравнение, мы получим возможность решать более сложные нелинейные дифференциальные уравнения.

Дифференциальное уравнение

$$y'' = a_0(x)y^4 + a_1(x)y^3 + a_2(x)y^2 + a_3(x)y + a_4(x).$$

С помощью некоторой замены переменной, при условии

$$-\frac{a_1}{4a_0} = -\frac{2a_2}{3a_1} = -\frac{3a_3}{2a_2},$$

приводится к виду

$$y'' = y^4(x) + r(x).$$

Рассмотрим задачу Коши:

$$y'' = y^4(x) + r(x), \tag{1}$$

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1. \end{cases} \tag{2}$$

Теорема. *Пусть*
1) $r(x) \in C^\infty$ *в области:*

$$|x - x_0| < \rho_1,$$

где $\rho_1 = const$;
2) $\left|\frac{r^{(n)}(x_0)}{n!}\right| \le M_1$,
где M_1 *=const, n=0,1,2, ...*

Тогда решение задачи Коши является аналитической функцией

$$y(x) = \sum_0^\infty C_n(x - x_0)^n \tag{3}$$

в области

$$|x - x_0| < \rho_2,$$

где $\rho_2 = \min\left\{\rho_1, \frac{1}{\sqrt{(2M)^3+1}}\right\}$, $M = \max\left\{|y_0|, |y_1|, \sup_n \left|\frac{r^{(n)}(x_0)}{n!}\right|\right\}$, *n=0,1,2, ...*

Доказательство.

В доказательстве теоремы используется метод мажорант к решению рассматриваемого уравнения, а не к правой части дифференциального уравнения, как это дается в классической литературе [38].

Функцию $r(x)$ в силу условия теоремы можно представить в виде степенного ряда

$$r(x)=\sum_{0}^{\infty}A_n(x-x_0)^n. \tag{4}$$

Выражения (3), (4) и выражение

$$y''(x)=\sum_{2}^{\infty}C_n\cdot n\cdot(n-1)\cdot(x-x_0)^{n-2}$$

подставляем в (1):

$$\sum_{2}^{\infty}C_n\cdot n\cdot(n-1)\cdot(x-x_0)^{n-2}=\sum_{0}^{\infty}C_n^{**}(x-x_0)^n+\sum_{0}^{\infty}A_n(x-x_0)^n.$$

Требование тождества в последнем соотношении приводит к равенству коэффициентов при соответствующих степенях переменных.

Таким образом, имеем рекуррентное соотношение для получения коэффициентов C_n

$$(n+1)(n+2)C_{n+2}=C_n^{**}+A_n,$$

где

$$C_n^{**}=\sum_{0}^{n}C_i^{*}\cdot C_{n-i}^{*},$$
$$C_n^{*}=\sum_{0}^{n}C_i\cdot C_{n-i},$$
$$C_0=y_0,$$
$$C_1=y_1.$$

Последнее рекуррентное соотношение позволяет однозначно определить выражения всех коэффициентов C_n.

Обозначим
$M=\max\left\{|y_0|,|y_1|,\sup_n\left|\frac{r^{(n)}(x_0)}{n!}\right|\right\}$,n=0,1,2, ...
и, учитывая закономерность структуры выражений коэффициентов C_n, полученных с помощью программного обеспечения, приходим к следующим гипотезам оценок:

$$|C_{2n}|\le\frac{M((2M)^3+1)^n}{2n(2n-1)},$$
$$|C_{2n+1}|\le\frac{M((2M)^3+1)^n}{2n(2n+1)}.$$

Докажем справедливость гипотез оценок методом математической индукции для случая четного n :

$$|C_{2n}^{*}|=\sum_{k=0}^{2n}|C_{2n-k}|\cdot|C_k|\le\sum_{k=0}^{2n}\frac{M((2M)^3+1)^{\left[\frac{2n-k}{2}\right]}}{(2n-k)(2n-k-1)}\cdot\frac{M((2M)^3+1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}}{2k(2k-1)}\le$$
$$\le(2n+1)\frac{M^2((2M)^3+1)^n}{2n(2n-1)}\le\frac{2M^2((2M)^3+1)^n}{2n-1}.$$

Тогда

$$|C_{2n}^{**}| = \sum_{k=0}^{2n} \left|C_{2n-k}^{*}\right| \cdot |C_k^{*}| \leq \sum_{k=0}^{2n} \frac{2M^2((2M)^3+1)^{\left[\frac{2n-k}{2}\right]}}{2n-k-1} \cdot \frac{2M^2((2M)^3+1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}}{k-1} \leq$$

$$\leq (2n+1)\frac{4M^4((2M)^3+1)^n}{2n-1} \leq 8M^4((2M)^3+1)^n.$$

Рассмотрим рекуррентное соотношение

$$(2n+1)(2n+2)C_{2n+2} = C_{2n}^{**} + A_{2n},$$

откуда

$$\begin{gathered}|C_{2n+2}| = \tfrac{|C_{2n}^{**}|+A_{2n}}{(2n+1)(2n+2)} \leq \tfrac{8M^4((2M)^3+1)^n+M}{(2n+1)(2n+2)} \leq \\ \leq \tfrac{M((2M)^3((2M)^3+1)^n+1)}{(2n+1)(2n+2)} \leq \tfrac{M((2M)^3+1)^{n+1}}{(2n+1)(2n+2)}.\end{gathered}$$

Аналогичным образом получаем оценку в случае нечетного индекса:

$$|C_{2n+1}| \leq \frac{M((2M)^3+1)^n}{2n(2n+1)}.$$

Составим вспомогательный ряд

$$\sum_0^{\infty} V_n(x-x_0)^n,$$

который является мажорирующим для ряда (3).

В нашем случае

$$V_{2n} = \frac{M((2M)^3+1)^n}{2n(2n-1)}, V_{2n+1} = \frac{M((2M)^3+1)^n}{2n(2n+1)}.$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_0^{\infty} V_{2n}(x-x_0)^{2n},$$

для которого по признаку Даламбера получаем область сходимости:

$$|x-x_0| < \frac{1}{\sqrt{(2M)^3+1}},$$

что и требовалось доказать.

Доказанная теорема позволяет получить структуру приближенного решения в области аналитичности.

Теорема 2. *Для приближенного решения*

$$y_N(x) = \sum_0^N C_n(x-x_0)^n$$

задачи Коши (1)–(2) в области

$$|x-x_0| < \frac{1}{\sqrt{(2M)^3+1}}$$

справедлива оценка погрешности

$$\Delta y_N \leq \frac{M((2M)^3+1)^{\left[\frac{N}{2}\right]} |x-x_0|^N}{N(N-1)(1-(2M)^3+1)(x-x_0)^2)}$$

Доказательство. Из теоремы 1 имеем:

$$\Delta y_N = |y(x) - y_N(x)| = \sum_N^{\infty} |C_n(x-x_0)^n| = R_N(x)$$

Учитывая оценки C_n из теоремы 1, получим

$$R_N(x) = \sum_N^{\infty} |C_n(x-x_0)^n| \leq \sum_N^{\infty} \frac{M((2M)^3+1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{n(n-1)} |x-x_0|^n \leq$$
$$\leq \frac{M((2M)^3+1)^{\left[\frac{N}{2}\right]}}{N(N-1)} |x-x_0|^N \sum_0^{\infty} ((2M)^3+1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} |x-x_0|^n.$$

Ряд в последнем выражении является геометрической прогрессией со знаменателем

$$q = (2M)^3+1)(x-x_0)^2,$$

откуда следует

$$R_N(x) \leq \frac{M((2M)^3+1)^{\left[\frac{N}{2}\right]} |x-x_0|^N}{N(N-1)(1-(2M)^3+1)(x-x_0)^2)}.$$

Таким образом, значение y(x) можно приближенно вычислить как сумму первых N слагаемых ряда (3) с точностью $\varepsilon = R_N(x)$.

Пример

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} y'' = y^4(x), \\ y(0) = \frac{2}{5}, \\ y'(0) = \left(\frac{2}{5}\right)^3. \end{cases}$$

Точным решением является функция

$$y(x) = \frac{\sqrt[3]{5(6x-25)^4}}{3(6x-25)^2}.$$

В данном примере $M = \frac{2}{5}, \rho = \sqrt{\frac{125}{189}}$. Выберем $x_1 = x_0 + \frac{\rho}{2} = \sqrt{\frac{125}{378}}$, которое находится в области представления решения в виде ряда (3). Расчеты приведены в таблице 1.

Таблица 1.

x_1	$y(x_1)$	$y_7(x_1)$	Δy_7	Δy	$\Delta_1 y$
$\sqrt{\frac{125}{378}}$	0,4283420664232419425	0,428342052	0,00008	$1,4 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-6}$

где $y(x_1)$ – точное решение, $y_7(x_1)$ – приближенное решение, Δy_7 – априорная погрешность, Δy – абсолютная погрешность, $\Delta_1 y$ – апостериорная погрешность.

Апостериорная погрешность $\Delta_1 y$ предполагает в структуре приближенного решения 13 слагаемых. Однако, слагаемые в структуре приближенного решения с 8 по 13, в сумме не превышает 10^{-6}. Заключаем, что приближенное решение $y_7(x_1)$ имеет погрешность 10^{-6}.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Kalman, R.* New results in linear filtering and predication theory / K. Kalman, R. Bucy // J. Basic Engr. (ASME Trans.). – 1961. – Vol. 83D. – P. 95–108.

[2] *Bucy, R. S.* Optimal Filtering for correlated Noise / R.S. Busy // J. of Mat. Analysis and Applications. – 1967. – Vol. 20. – No. 1. – P. 1–8.

[3] *Shi, M.* On the solution of a one-dimensional Riccati equation related to risk-sencitive portfolio optimization problem / M. Shi // Repts Fac. Sci. and Eng. Soga Univ. Math. – 2005. – Vol. 34. – No. 1. – C. 17–24.

[4] *Lystad, L. P.* The Riccati equation — an economic fundamental equation which deseribes marginal movement in time / L. P. Lystad, P. O. Nyman, R. Heibakk // Model.,Identif. and Contr. – 2006. – Vol. 27. – No. 1. – C. 31–41.

[5] *Airault, H.* Rational Solutions of Painleve Equations / H. Airault // Studies in applied mathematics. – 1979. – Vol. 61. – No. 1 July. – P. 31–53.

[6] *Ablowitz, M. I.* Exact linearization of a Painleve transcendent / M. I. Ablowitz, H. Segur // Phys. Rev. Lett. –1977. – Vol. 38. – No. 20. –P. 1103–1106.

[7] *Ablowitz, M.* Nonlinear evolutions and ordinary differential equations of Painleve type / M. Ablowitz, A. Romani, H. Segur // Lett. alNuowoCim. – 1978. – Vol. 23. – No. 9. – P. 333–338.

[8] *Ablowitz, M.* A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type. I, II / M. Ablowitz, A. Romani, H. Segur // J. Mat. Phys. – 1980. – Vol. 21. – P. 715–721, 1006–1015.

[9] *Сулейманов, Б. И.* Второе уравнение Пенлеве в одной задаче о нелинейных эффектах вблизи каустик / Б. И. Сулейманов // Зап. науч. семинара ЛОМИ. — 1991. – 187. – С. 110–128.

[10] *Ockendon, J. R.* Numerical and analytical solutions of moving boundary problems / J. R. Ockendon // Proc. Symp. Moving Boundary Problems / ed. D. G. Wilson, A. D. Solomon and P. T. Boggs. New York, 1978. – P. 129–145.

[11] *Axford, R. A.* The exact solution of singular arc problems in rector core optimization / R. A. Axford // Proc. Nuclear Utilities Planning Methods Symp. Tennessee, 1974. P. 1–14.

[12] *Hill, J. M.* Abel's Differential Equation / J. M. Hill // J. Math. Scientist. – 1982. – Vol. 7. – № 2. – S. 115–125.

[13] *Чудновский, В. М.* Теория сверхизлучательных лавин радиоволнового диапазона / В. М. Чудновский, Е. Д. Холодкевич // Физика твердого тела. – 1982. – Т. 24. – № 4. – С. 1118–1123.

[14] *Синявский, М. Т.* Про один численный метод визначення особливих точок интегралов систем нелинейных дифференциальных рiвнянь / М. Т. Синявский // Докл. АН УССР, сер. А. – 1969. – № 7. – С. 597–599.

[15] *Белов, А. М.* Численная реализация А-метода решения одного класса дифференциальных уравнений Риккати / А. М. Белов, В. И. Биленко, А. И. Кашни ровский // Некоторые вопросы теории приближенния функций и их приложение. – 1988. – С. 12–23.

[16] *Callier, F. M.* Report on a convergence criterion of the solution of the Riccati differential equation / F.M. Callier, J.L. Willems // Circuit Theory and Design : Proc. Eur. Conf., The Hague, 25–28 Aug. 1981. – Amsterdam a.o. – 1981. – P. 526–530.

[17] *Laub, A.* Schur techniques for Riccati differential equations / A. Laub // J. Lect. Notes and Inf. Sci. – 1982. – Vol. 39. – P. 165–174.

[18] *Еругин, Н. П.* К теории первого уравнения Пенлеве / Н. П. Еругин // Докл. АН БССР. – 1958. – Т. 2. – № 1. – С. 3–6.

[19] *Еругин, Н. П.* Теория подвижных особых точек уравнений второго порядка / Н. П. Еругин // Дифференц. уравнения. — 1976. — Т. 12. – № 3. — С. 387–416.

[20] *Яблонский, А. И.* Асимптотическое разложение правильных решений некоторых классов дифференциальных уравнений / А. И. Яблонский // Докл. АН БССР. – 1964. – Т. 8. – № 2. – С. 77–80.

[21] *Яблонский, А. И.* К вопросу о числе полюсов решения второго уравнения Пенлеве / А. И. Яблонский // Докл. АН БССР. – 1959. – Т. 3. – № 6. – С. 237–238.

[22] *Воробьев, А. П.* О рациональных решениях второго уравнения Пенлеве / А. П. Воробьев // Дифференц. уравнения. — 1965. — Т. 1. – № 1. — С. 79–81.

[23] *Чичурин, А. В.* Уравнение Шази и линейные уравнения класса Фукса: Монография. 2-е изд., доп. и перераб. / А. В. Чичурин – М. : Изд-во РУДН, 2003. – 163 с.

[24] *Прокопеня, А. Н.* Применение системы “Mathematica” к решению обыкновенных дифференциальных уравнений / А. Н. Прокопеня, А. В. Чичурин. – Мн. : БГУ, 1999. – 265 с.

[25] *Орлов, В. Н.* Исследование приближенного решения в окрестности подвижной особой точки для дифференциальных уравнений Риккати / В.Н. Орлов // Известия ИТА ЧР. – № 4. – 2001. – С. 182–188.

[26] *Орлов, В. Н.* Критерии существования подвижных особых точек решений дифференциальных уравнений Риккати / В. Н. Орлов // Вестник Самарского ГУ. Естеств. научная серия. – 2006. – № 6/1(46). – С. 64–69.

[27] *Орлов, В. Н.* Об одном методе приближенного решения матричных дифференциальных уравнений Риккати / В. Н. Орлов // Вестник МАИ. – 2008. – Т. 15. – № 5. – С. 128–135.

[28] *Орлов, В. Н.* Исследование приближенного решения второго уравнения Пенлеве / В. Н. Орлов, Н. А. Лукашевич // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25. – № 10. – С. 1829–1832.

[29] *Орлов, В. Н.* Об одном конструктивном методе построения первой и второй мероморфных трансцендентных Пенлеве / В. Н. Орлов, В. П. Фильчакова // Симетрійні та аналітичніметоди в математичнійфізиці. – 1998. – Т. 19. – С. 155–165.

[30] *Орлов, В. Н.* Построение приближенного решения в окрестности подвижной особой точки для уравнения P_1 / В. Н. Орлов // Известия НАНИ ЧР. – 2000. – № 4. – С. 43–49.

[31] *Орлов, В. Н.* Построение приближенного решения в окрестности подвижной особой точки для второго уравнения Пенлеве / В. Н. Орлов,Н. А. Лукашевич, А. А. Самодуров // Вестник БГУ. Сер. 1 Физика, математика, информатика. – 2002. – С. 79–85.

[32] *Орлов, В. Н.* Критерии существования подвижных особых точек решений второго уравнения Пенлеве / В. Н. Орлов // Известия Тул. ГУ. Се р. Дифф. уравнения и прикладные задачи. – Вып. 1. – Тула : Изд-во Тул. ГУ, 2006. – С. 26–29.

[33] *Орлов, В. Н.* О приближенном решении первого уравнения Пенлеве / В. Н. Орлов // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. – 2008. – № 2. – С. 42–46.

[34] *Орлов, В. Н.* Исследование приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности подвижной особой точки / В. Н. Орлов // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – № 4 (35). – 2009.– С. 23–32.

[35] *Орлов, В. Н.* Точные границы области применения приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности приближенного значения подвижной особой точки / В. Н. Орлов // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2009. – Т. 5. – № 10. – С. 192–195.

[36] *Орлов, В. Н.* Точные границы для приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности приближенного значения подвижной особой точки в комплексной области / В. Н. Орлов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. – 2010. – № 2(8). – С. 399–405.

[37] *Орлов, В. Н.* Математическое моделирование решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности подвижной особой точки / В. Н. Орлов, С. А. Редкозубов // Известия института инженерной физики. – 2010. – № 4(18). – С. 2–6.

[38] *Голубев, В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / В. В. Голубев. – М. ; Л. : Гостехиздат, 1950. – 436 с.

Орлов Виктор Николаевич,

доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой алгебры и геометрии, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

Иванов Сергей Анатольевич,

аспирант кафедры алгебры и геометрии, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары

V. N. Orlov, S. A. Ivanov

NUMERICAL SOLUTION OF THREE-DIMENSIONAL PROBLEMS OF SEISMIC STABILITY OF LARGE STRUCTURES

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. The theorem of solving the second-order nonlinear differential equation with polynomial part of the forth degree is proved and the structure of analytical approximate solution in analyticity region is presented in the article. When proving the theorem the majorant method is applied not to the right side of differential equation, but to the whole solution of differential equation. The results are provided with calculations.

Keywords: nonlinear differential equation, moving singular point, analytical approximate solution.

REFERENCES

[1] *Kalman, R.* New results in linear filtering and predication theory / K. Kalman, R. Bucy // J. Basic Engr. (ASME Trans.). — 1961. — Vol. 83D. — P. 95–108.

[2] *Bucy, R. S.* Optimal Filtering for correlated Noise / R.S. Busy // J. of Mat. Analysis and Applications. — 1967. — Vol. 20. – N 1. — P. 1–8.

[3] *Shi, M.* On the solution of a one-dimensional Riccati equation related to risk-sencitive portfolio optimization problem / M. Shi // Repts Fac. Sci. and Eng. Soga Univ. Math. — 2005. — Vol. 34. – N 1. — C. 17–24.

[4] *Lystad, L. P.* The Riccati equation — an economic fundamental equation which deseribes marginal movement in time / L.P. Lystad, P.-O. Nyman, R. Heibakk // Model.,Identif. and Contr. — 2006. — Vol. 27. – N 1. — C. 31–41.

[5] *Airault, H.* Rational Solutions of Painleve Equations / H. Airault // Studies in applied mathematics. — 1979. — Vol. 61. – N 1 July. — P. 31–53.

[6] *Ablowitz, M. I.* Exact linearization of a Painleve transcendent / M. I. Ablowitz, H. Segur // Phys. Rev. Lett. –1977. –Vol. 38. – N 20. –P. 1103–1106.

[7] *Ablowitz, M.* Nonlinear evolutions and ordinary differential equations of Painleve type / M. Ablowitz, A. Romani, H. Segur // Lett. alNuowoCim. — 1978. — Vol. 23, N 9. — P. 333–338.

[8] *Ablowitz, M.* A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type. I, II / M. Ablowitz, A. Romani, H. Segur // J. Mat. Phys. — 1980. — Vol. 21. — P. 715–721, 1006–1015.

[9] *Suleymanov, B. I.* The second equation of Painleve in one task about the nonlinear effects near caustics / B. I. Suleymanov // Western scientific a seminar ACHE. – 1991. – Vol. 187. – P. 110–128.

[10] *Ockendon, J. R.* Numerical and analytical solutions of moving boundary problems / J. R. Ockendon // Proc. Symp. Moving Boundary Problems / ed. D. G. Wilson, A. D. Solomon and P. T. Boggs. New York, 1978. – P. 129–145.

[11] *Axford, R. A.* The exact solution of singular arc problems in rector core optimization / R. A. Axford // Proc. Nuclear Utilities Planning Methods Symp. Tennessee, 1974. – P. 1–14.

[12] *Hill, J. M.* Abel's Differential Equation / J. M. Hill //J. Math. Scientist. – 1982. – Vol. 7. – № 2. — S. 115–125.

[13] *Chudnovsky, V. M.* Theory of superradiating avalanches of radio wave range / V. M. Chudnovsky, E. D. Holodkevich // Physics of a solid body. — 1982. — Vol. 24. – № 4. — P. 1118–1123.

[14] *Sinyavsky, M. T.* About one numerical method визначення osoblivykh tochok integrals of systems nonlinear differential rivnyan / M. T. Sinyavsky // Reports of AN of USSR, series A. – 1969. –№ 7. –P. 597–599.

[15] *Belov, A. M.* Numerical realization of the A-method of the solution of one class differential equations of Rikkati / A. M. Belov, V. I. Bilenko, A. I. Kashnirovsky // Some questions of the theory of approach of functions and them appendix. — Kiev, 1988. — P. 12–23.

[16] *Callier, F. M.* Report on a convergence criterion of the solution of the Riccati differential equation / F. M. Callier, J. L. Willems // Circuit Theory and Design : Proc. Eur. Conf., The Hague, 25–28 Aug. 1981. — Amsterdam a.o. — 1981. — P. 526–530.

[17] *Laub, A.* Schur techniques for Riccati differential equations / A. Laub // J. Lect. Notes and Inf. Sci. — 1982. — Vol. 39. — P. 165–174.

[18] *Erugin, N. P.* To the theory of the first equation of Painleve / N. P. Erugin // Reports of AN of BSSR. — 1958. — Vol. 2. – № 1. — P. 3–6.

[19] *Erugin, N. P.* Theory of mobile special points of the equations of the second order / N. P. Erugin // Differential equations. — 1976. — Vol. 12. – № 3. — P. 387–416.

[20] *Yablonsky, A. I.* Asymptotic decomposition of the correct decisions of some classes of the differential equations / A. I. Yablonsky // Reports of AN of BSSR. — 1964. — Vol. 8. – № 2. — P. 77–80.

[21] *Yablonsky, A. I.* To a question of number of poles of the solution of the second equation Painleve / A. I. Yablonsky // Reports of AN of BSSR. — 1959. — Vol. 3. – № 6. — P. 237–238.

[22] *Vorobyov, A. P.* About rational solutions of the second equation of Painleve / A. P. Vorobyov // Differential equations. — 1965. — Vol. 1. – № 1. — P. 79–81.

[23] *Chichurin, A. V.* Equation of Shazi and linear equations of a class of Fuchs: Monograph. 2nd prod., additional and reslave / A. V. Chichurin. – M. : Publishing house of RUDN, 2003. – 163 p.

[24] *Prokopenya, A. N.* Use of Mathematica system to the solution of the ordinary differential equations / A. N. Prokopenya, A. V. Chichurin. – Minsk : BSU, 1999. – 265 p.

[25] *Orlov, V. N.* Research of the approximate decision in the vicinity of a mobile special point for the differential equations of Rikkati / V. N. Orlov // ITA ChR news. — № 4. — 2001. — P. 182–188.

[26] *Orlov, V. N.* Criteria of existence of mobile special points of solutions of the differential equations of Rikkati / V. N. Orlov // Vestnik Samara State University. Naturally scientific series. — 2006. — № 6/1(46). — P. 64–69.

[27] *Orlov, V. N.* About one method of the approximate solution of the matrix differential equations of Rikkati / V. N. Orlov // Vestnik MAI. — 2008. – Vol. 15. – № 5. – P. 128–135.

[28] *Orlov, V. N.* Research of the approximate solution of the second equation of Painleve / V. N. Orlov, N. A. Lukashevich // Differential equations. – 1989. – Vol. 25. – № 10. – P. 1829–1832.

[29] *Orlov, V. N.* About one constructive method of construction of the first and second meromorphic transcendental Painleve / V. N. Orlov, V. P. Filchakova // Simetriyni that analitichnimetodi in matematichniyfizitsi. — 1998. — Vol. 19. — P. 155–165.

[30] *Orlov, V. N.* Creation of the approximate decision in the vicinity of a mobile special point for the equation P_1 / V. N. Orlov // News NANI CHR. – 2000. – № 4. – P. 43–49.

[31] *Orlov, V. N.* Creation of the approximate decision in the vicinity of a mobile special point for the second equation of Painleve / V. N. Orlov, N. A. Lukashevich, A. A. Samodurov // Vestnik BSU. Series 1. Physics, mathematics, informatics. — 2002. — P. 79–85.

[32] *Orlov, V. N.* Criteria of existence of mobile special points of solutions of the second equation of Painleve / V. N. Orlov // News TSU. Series Differential equations and applied tasks. – 2006. – Issue 1. – P. 26–29.

[33] *Orlov, V. N.* About the approximate solution of the first equation of Painleve / V. N. Orlov // Vestnik A. Tupoleva KSTU. — 2008. — № 2. — P. 42–46.

[34] *Orlov, V. N.* Research of the approximate solution of the differential equation of Abel in the vicinity of a mobile special point / V. N. Orlov // Vestnik N. Bauman MSTU. Series Natural sciences. — 2009. — № 4 (35). – P. 23–32.

[35] *Orlov, V. N.* Exact borders of a scope of the approximate solution of the differential equation of Abel in the vicinity of approximate value of a mobile special point / V. N. Orlov // Vestnik Voronezh State Technical University. – 2009. – Vol. 5. – № 10. – P. 192–195.

[36] *Orlov, V. N.* Exact borders for the approximate solution of the differential equation of Abel in the vicinity of approximate value of a mobile special point in complex area / V. N. Orlov // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state. – 2010. – № 2(8). – P. 399–405.

[37] *Orlov, V. N.* Mathematical modeling of the solution of the differential equation of Abel in the vicinity of a mobile special point / V. N. Orlov, S. A. Redkozubov // News of institute of engineering physics. – 2010. – № 4(18). – P. 2–6.

[38] *Golubev, V. V.* Lectures on the analytical theory of the differential equations / V. V. Golubev. – M. ; L. : Gostekhizdat, 1950. – 436 p.

Orlov, Victor Nikolayevich

Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Head of Algebra & Geometry Department, Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Ivanov, Sergey Anatolyevich

Postgraduate Student of Algebra & Geometry Department, Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary