Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 2(66). С. 112–122

Т. Н. Павлова

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ ИЗ АНИЗОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА, ОСЛАБЛЕННОЙ ОТВЕРСТИЕМ ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАСТЯГИВАЮЩИХ УСИЛИЙ

Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева

Аннотация. В работе рассматривается напряженно-деформированное состояние тонкой пластины с эллиптическим отверстием из анизотропного упруго-идеальнопластического материала при двуосном растяжении на бесконечности. Решение задачи находится методом малого параметра [2], в первом приближении определены компоненты напряжения и перемещения в упругой и пластической областях, определена граница пластической зоны.

Ключевые слова: напряжение, деформация, упругость, пластичность, анизотропия, растяжение, отверстие.

УДК: 539.374

Рассмотрим тонкую пластину из упруго-идеальнопластического анизотропного материала, ослабленную эллиптическим отверстием с полуосями $a(1-\text{c})$, $a(1+\text{c})$. В плоскости xy пластина растягивается на бесконечности взаимно перпендикулярными усилиями p_1 и p_2, контур свободен от усилий. Положим

$$\text{c} = \delta d_1,\ \frac{p_1 - p_2}{2k} = \delta d_2, \text{где} \quad k,\ p_1, p_2 - const,$$

где δ, d_1, d_2 – безразмерные постоянные, принимающие значение в пределах $0 \le \ \delta \le \ 1, \quad 0 \le \ d_i \ \le \ 1.$

Очевидно, что при $d_1 = 0,\ d_2 = 1$ имеет место двуосное растяжение пластины с круговым отверстием, при $d_1 = 1,\ d_2 = 0$ имеет место пластина с эллиптическим отверстием, равномерно растягиваемая на бесконечности. В нулевом приближении (при $\delta = 0$) имеет место осесимметричное состояние плоскости с круговым отверстием.

Уравнение контура эллиптического отверстия запишем в виде

$$\frac{x^2}{a^2(1+c)^2} + \frac{y^2}{a^2(1-c)^2} = 1, \tag{1}$$

при $c = 0$ согласно (1) имеет место круговое отверстие радиуса a.

В дальнейшем отнесем все величины, имеющие размерность длины к величине r_s^0 – радиусу упругопластической зоны в исходном нулевом приближении.

В дальнейшем перейдем к полярной системе координат

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ r = \sqrt{x^2 + y^2},\ tg\theta = \frac{y}{x}. \tag{2}$$

Переходя к полярной системе координат, согласно (2) запишем уравнение (1) в виде

Поступила 15.02.2010

$$\rho=\frac{\alpha(1-\delta^2d_1^2)}{\sqrt{1-2\delta d_1\cos 2\theta+\delta^2d_1^2}}=\alpha\left[-1+\delta d_1\cos 2\theta-\frac{3}{4}\delta^2d_1^2(1-\cos 4\theta)+\right.$$
$$\left.+\frac{5}{8}\delta^3d_1^3(\cos 2\theta+\cos 6\theta)\right]+...\,,\ \alpha=\frac{a}{r_s^0},\ \rho=\frac{r}{r_s^0}. \qquad (3)$$

Припишем компонентам напряжения в пластической зоне индекс p наверху, а упругой – индекс е наверху.

Условие пластичности максимального касательного напряжения Треска для изотропного тела имеет вид [1]

$$(\sigma_x^p-2k_)(\sigma_y^p-2k)-\tau_{xy}^{(p)2}=0,\quad k-const, \qquad (4)$$

где $\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$ – компоненты напряжения в декартовой системе координат.

Перейдем к безразмерным величинам, отнесем все величины, имеющие размерность, к величине предела текучести на растяжении 2k, при этом для безразмерных величин сохраним обозначения, получим

$$(\sigma_x^p-1)(\sigma_y^p-1)-\tau_{xy}^{(p)2}=0. \qquad (5)$$

Для изотропного тела условие пластичности (5) перепишем в полярных координатах

$$(\sigma_\rho^p-1)(\sigma_\theta^p-1)-\tau_{\rho\theta}^{(p)2}=0. \qquad (6)$$

Условие пластичности для анизотропного материала примет вид

$$(\frac{\sigma_x^p}{k_1}-1)(\frac{\sigma_y^p}{k_2}-1)-F\tau_{xy}^{(p)2}=0. \qquad (7)$$

Условие пластичности (7) определяет свойства анизотропного идеальнопластического материала. Коэффициенты $k_1,\ k_2,\ F$ характеризуют анизотропию материала. Отметим, что величины k_1,k_2,F – безразмерные. При $k_1=k_2=\ F=1$ согласно (7) имеет место изотропный материал.

Связь между напряжениями в декартовой системе координат x,y и напряжениями в полярной системе координат ρ,θ имеет вид

$$\begin{aligned}\sigma_x&=\frac{\sigma_\rho+\sigma_\theta}{2}+\frac{\sigma_\rho-\sigma_\theta}{2}\cos 2\theta+\tau_{\rho\theta}\sin 2\theta\\ \sigma_y&=\frac{\sigma_\rho+\sigma_\theta}{2}-\frac{\sigma_\rho-\sigma_\theta}{2}\cos 2\theta-\tau_{\rho\theta}\sin 2\theta\\ \tau_{xy}&=-\frac{\sigma_\rho-\sigma_\theta}{2}\sin 2\theta+\tau_{\rho\theta}\cos 2\theta.\end{aligned} \qquad (8)$$

Из (7), (8) получим условие пластичности в полярных координатах

$$\frac{1}{k_1k_2}\left[\frac{(\sigma_\rho^p+\sigma_\theta^p)^2}{4}-\frac{(\sigma_\rho^p-\sigma_\theta^p)^2}{4}\cos^2(2\theta)-\tau_{\rho\theta}^{(p)2}\sin^2(2\theta)\right]-$$
$$-(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2})\frac{(\sigma_\rho^p+\sigma_\theta^p)}{2}+(\frac{1}{k_2}-\frac{1}{k_1})\left[\frac{\sigma_\rho^p-\sigma_\theta^p}{2}\cos(2\theta)+\tau_{\rho\theta}^p\sin(2\theta)\right]- \qquad (9)$$
$$-\frac{(\sigma_\rho^p-\sigma_\theta^p)\tau_{\rho\theta}^p\cos(2\theta)\sin(2\theta)}{k_1k_2}-F[\frac{\sigma_\rho^p-\sigma_\theta^p}{2}\sin(2\theta)-\tau_{\rho\theta}^p\cos(2\theta)]^2=0.$$

Решение будем искать в виде

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ij}^{(0)}+\delta\sigma_{ij}^{(I)}+\delta^2\sigma_{ij}^{(II)}+\delta^3\sigma_{ij}^{(III)}...,$$

$$k_1 = 1 + \delta k_1^{(I)}, k_2 = 1 + \delta k_2^{(I)}, F = 1 + \delta F^{(I)}, \tag{10}$$

$$\delta = \frac{p_1 - p_2}{2k}, \quad p_1,\, p_2 - const.$$

В дальнейшем положим

$$\tau_{\rho\theta}^{(0)} = 0, \tag{11}$$

где индекс «0» наверху приписан компонентам в нулевом исходном состоянии при $\delta = 0$.

Подставив в уравнение (9) следующие выражения (10), получим

$$\Bigg[\left(\frac{\sigma_\rho^{(0)p} + \sigma_\theta^{(0)p}}{2} + \frac{\sigma_\rho^{(0)p} - \sigma_\theta^{(0)p}}{2}\cos 2\theta - 1\right) + \frac{\delta}{2}\left(\left(\sigma_\rho^{(I)p} + \sigma_\theta^{(I)p}\right) - k_1^{(I)}\left(\sigma_\rho^{(0)p} + \sigma_\theta^{(0)p}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\left(\sigma_\rho^{(I)p} - \sigma_\theta^{(I)p}\right) - k_1^{(I)}\left(\sigma_\rho^{(0)p} - \sigma_\theta^{(0)p}\right)\right)\cos 2\theta + 2\tau_{\rho\theta}^{(I)p}\sin 2\theta\Bigg] \times$$
$$\times \Bigg[\left(\frac{\sigma_\rho^{(0)p} + \sigma_\theta^{(0)p}}{2} - \frac{\sigma_\rho^{(0)p} - \sigma_\theta^{(0)p}}{2}\cos 2\theta - 1\right) + \frac{\delta}{2}\left(\left(\sigma_\rho^{(I)p} + \sigma_\theta^{(I)p}\right) - k_2^{(I)}\left(\sigma_\rho^{(0)p} + \sigma_\theta^{(0)p}\right) - \right. \tag{12}$$
$$\left. - \left(\left(\sigma_\rho^{(I)p} - \sigma_\theta^{(I)p}\right) - k_2^{(I)}\left(\sigma_\rho^{(0)p} - \sigma_\theta^{(0)p}\right)\right)\right)\cos 2\theta + 2\tau_{\rho\theta}^{(I)p}\sin 2\theta\Bigg] -$$
$$-\left(\frac{\sigma_\rho^{(0)p} - \sigma_\theta^{(0)p}}{2}\right)^2\sin^2 2\theta - \delta\left[\left(\sigma_\rho^{(0)p} - \sigma_\theta^{(0)p}\right)\sin 2\theta\left(\frac{(\sigma_\rho^{(I)p} - \sigma_\theta^{(I)p})}{2}\sin 2\theta - \tau_{\rho\theta}^{(I)p}\cos 2\theta\right)\right] -$$
$$-2\delta F^{(I)}\left(\frac{\sigma_\rho^{(0)p} - \sigma_\theta^{(0)p}}{2}\sin 2\theta\right)^2 = 0.$$

Для нулевого приближения из (12) получаем случай изотропного материала

$$\sigma_\rho^{(0)p}\sigma_\theta^{(0)p} - \left(\sigma_\rho^{(0)p} + \sigma_\theta^{(0)p}\right) + 1 = 0. \tag{13}$$

Согласно [1] в нулевом приближении при условии $\sigma_\theta^{(0)p} = 1$ и граничном условии $\sigma_\rho^{(0)p} = 0$ при $\rho = \alpha$ получим

$$\sigma_\rho^{(0)p} = (1 - \frac{\alpha}{\rho}),\ \sigma_\theta^{(0)p} = 1,\ \tau_{\rho\theta}^{(0)p} = 0. \tag{14}$$

Для первого приближения имеет место условие пластичности

$$\sigma_\theta^{(I)p} = A_0 N_2 + B_0 N_1 - F^{(I)}\left(\sigma_\rho^0 + \sigma_\theta^0\right)^2\sin^2 2\theta, \tag{15}$$

где

$$A_0 = \frac{\sigma_\rho^{(0)p} + \sigma_\theta^{(0)p}}{2} + \frac{\sigma_\rho^{(0)p} - \sigma_\theta^{(0)p}}{2}\cos 2\theta - 1,$$

$$B_0 = \frac{\sigma_\rho^{(0)p} + \sigma_\theta^{(0)p}}{2} - \frac{\sigma_\rho^{(0)p} - \sigma_\theta^{(0)p}}{2}\cos 2\theta - 1,$$

$$N_1 = k_1'\left[\left(\sigma_\rho^{(0)p} + \sigma_\theta^{(0)p}\right) + \left(\sigma_\rho^{(0)p} - \sigma_\theta^{(0)p}\right)\cos 2\theta\right],$$

$$N_2 = k_2' \left[\left(\sigma_\rho^{(0)p} + \sigma_\theta^{(0)p} \right) - \left(\sigma_\rho^{(0)p} - \sigma_\theta^{(0)p} \right) \cos 2\theta \right].$$

Соотношение (15) согласно (14)примет вид

$$\sigma_\theta^{(I)p} = (k_1' + k_2') \left(-\frac{\alpha}{\rho} + \frac{3\alpha^2}{4\rho^2} \right) - \frac{F^{(I)}}{2} \frac{\alpha^2}{\rho^2} + (k_1' - k_2') \left(-\frac{\alpha}{\rho} + \frac{\alpha^2}{\rho^2} \right) \cos 2\theta + \tag{16}$$

$$+ \frac{\alpha^2}{2\rho^2} \left(F^{(I)} + \frac{(k_1' + k_2')}{2} \right) \cos 4\theta.$$

Уравнения равновесия удовлетворим, полагая

$$\sigma_\rho^{(I)} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi^{(I)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi^{(I)}}{\partial \theta^2}, \ \sigma_\theta^{(I)} = \frac{\partial^2 \Phi^{(I)}}{\partial \rho^2}, \ \tau_{\rho\theta}^{(I)} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi^{(I)}}{\partial \theta} \right). \tag{17}$$

Из (16) и (17) найдем значение функции Φ

$$\Phi^p = \alpha (k_1' + k_2') \left(\rho(\ln \rho - 1) + \frac{3\alpha}{4} \ln \rho \right) + F^{(I)} \frac{\alpha^2}{2} \ln \rho + (C_{01}\rho + C_{02}) +$$

$$- (\alpha (k_2' - k_1') (\rho(\ln \rho - 1) + \alpha \ln \rho) - (C_{21}\rho + C_{22})) \cos 2\theta - \tag{18}$$

$$- \left(\frac{\alpha^2}{2} \ln \rho \left(F^{(I)} + \frac{(k_1' + k_2')}{2} \right) - (C_{41}\rho + C_{42}) \right) \cos 4\theta.$$

Из (17) и (18) получим

$$\sigma_\rho^{(I)p} = \frac{1}{\rho} \left(-\alpha (k_1' + k_2') \left(\ln \rho + \frac{3\alpha}{4\rho} \right) + \frac{\alpha^2}{2\rho} F^{(I)} + C_{01} \right) +$$

$$+ \frac{1}{\rho} \left(\alpha (k_2' - k_1') \left((3 \ln \rho - 4) - \frac{\alpha}{\rho} (1 - 4 \ln \rho) \right) - 3C_{21} - \frac{4C_{22}}{\rho} \right) \cos(2\theta) +$$

$$+ \frac{1}{\rho} \left(\frac{\alpha^2}{2\rho} \left(F^{(I)} + \frac{(k_1' + k_2')}{2} \right) (16 \ln \rho - 1) - 15C_{41} - \frac{16C_{42}}{\rho} \right) \cos 4\theta.$$

$$\tau_{\rho\theta}^{(I)p} = -2 \left[(k_2' - k_1') \left(\frac{\alpha}{\rho} + \frac{\alpha^2}{\rho^2} (1 - \ln \rho) \right) + \frac{C_{22}}{\rho^2} \right] \sin 2\theta + \tag{19}$$

$$- \left(\frac{2\alpha^2}{\rho^2} \left(F^{(I)} + \frac{(k_1' + k_2')}{2} \right) (1 - \ln \rho) - \frac{4C_{42}}{\rho^2} \right) \sin 4\theta.$$

В первом приближении граничные условия согласно [2] имеют вид

$$\sigma_\rho^{(I)\,p} = -d_1 \cos 2\theta \quad \text{при} \quad \rho = \alpha, \tag{20}$$

$$\tau_{\rho\theta}^{(I)\,p} = -2d_1 \sin 2\theta \quad \text{при} \quad \rho = \alpha.$$

Из (19) и (22) получим

$$C_{01} = \alpha (k_1' + k_2') \left(\ln \alpha + \frac{3}{4} \right) - \frac{\alpha}{2} F^{(I)},$$

$$C_{21} = \frac{\alpha}{3} \left(3 (k_1' - k_2') (\ln \alpha + 1) - 2d_1 \right),$$

$$C_{22} = \alpha^2 \left(d_1 - (k_1' - k_2') (2 - \ln \alpha) \right), \tag{21}$$

$$C_{41} = \frac{\alpha}{15}\left(F^{(I)} + \frac{(k_1' + k_2')}{2}\right)\left(16\ln\alpha - \frac{17}{2}\right),$$
$$C_{42} = \frac{\alpha^2}{2}\left(F^{(I)} + \frac{(k_1' + k_2')}{2}\right)(1 - \ln\alpha).$$

Согласно (19) и (22) компоненты напряженного состояния в первом приближении имеют вид

$$\sigma_\rho^{(I)p} = \frac{1}{\rho}\left(-\alpha\,(k_1' + k_2')\left(\ln\rho + \frac{3\alpha}{4\rho}\right) + \frac{\alpha^2}{2\rho}F^{(I)} + \alpha\,(k_1' + k_2')\,\left(\ln\alpha + \frac{3}{4}\right) - \frac{\alpha}{2}F^{(I)}\right) +$$
$$+\frac{1}{\rho}\left(\alpha\,(k_2' - k_1')\left((3\ln\rho - 4) - \frac{\alpha}{\rho}\,(1 - 4\ln\rho)\right) - 3\left(\frac{\alpha}{3}\,(3\,(k_1' - k_2')\,(\ln\alpha + 1) - 2d_1)\right) -\right.$$
$$\left.-\frac{4}{\rho}\left(\alpha^2\,(d_1 - (k_1' - k_2')\,(2 - \ln\alpha))\right)\right)\cos(2\theta)+$$
$$+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\alpha^2}{2\rho}\left(F^{(I)} + \frac{(k_1' + k_2')}{2}\right)(16\ln\rho - 1) - 15\left(\frac{\alpha}{15}\left(F^{(I)} + \frac{(k_1' + k_2')}{2}\right)\left(16\ln\alpha - \frac{17}{2}\right)\right) -\right. \tag{22}$$
$$\left.-\frac{16}{\rho}\left(\frac{\alpha^2}{2}\left(F^{(I)} + \frac{(k_1' + k_2')}{2}\right)(1 - \ln\alpha)\right)\right)\cos 4\theta.$$
$$\sigma_\theta^{(I)p} = (k_1' + k_2')\,\left(-\frac{\alpha}{\rho} + \frac{3\alpha^2}{4\rho^2}\right) - \frac{F^{(I)}}{2}\frac{\alpha^2}{\rho^2} + (k_1' - k_2')\,\left(-\frac{\alpha}{\rho} + \frac{\alpha^2}{\rho^2}\right)\cos 2\theta +$$
$$+\frac{\alpha^2}{2\rho^2}\left(F^{(I)} + \frac{(k_1' + k_2')}{2}\right)\cos 4\theta.$$
$$\tau_{\rho\theta}^{(I)p} = -2\left[(k_2' - k_1')\left(\frac{\alpha}{\rho} + \frac{\alpha^2}{\rho^2}\,(1 - \ln\rho)\right) + \frac{1}{\rho^2}\left(\alpha^2\,(d_1 - (k_1' - k_2')\,(2 - \ln\alpha))\right)\right]\sin 2\theta +$$
$$+\left(\frac{2\alpha^2}{\rho^2}\left(F^{(I)} + \frac{(k_1' + k_2')}{2}\right)(1 - \ln\rho) - \frac{2\alpha^2}{\rho^2}\left(F^{(I)} + \frac{(k_1' + k_2')}{2}\right)(1 - \ln\alpha)\right)\sin 4\theta.$$

Граничные условия на бесконечности в упругой зоне запишем в виде

$$\left.\sigma_\rho^e\right|_{\rho=\infty} = q - \delta\cos 2\theta, \quad \left.\sigma_\theta^e\right|_{\rho=\infty} = q + \delta\cos 2\theta, \quad \left.\tau_{\rho\theta}^e\right|_{\rho=\infty} = \delta\sin 2\theta, \tag{23}$$

где

$$\delta = \frac{p_1 - p_2}{2k}, \quad q = \frac{p_1 + p_2}{2k}.$$

Уравнение упругопластической границы запишем в виде

$$\rho_s = 1 + \delta\rho_s^{(')} + \delta^2\rho_s^{('')}\ldots \tag{24}$$

Условия сопряжения на упругопластической границе имеют вид

$$\left.\sigma_\rho^p\right|_{\rho_s} = \left.\sigma_\rho^e\right|_{\rho_s},\ \left.\tau_{\rho\theta}^p\right|_{\rho_s} = \left.\tau_{\rho\theta}^e\right|_{\rho_s},$$
$$\left.u_{\rho\theta}^p\right|_{\rho_s} = \left.u_{\rho\theta}^e\right|_{\rho_s},\ \left.u_\rho^p\right|_{\rho_s} = \left.u_\rho^e\right|_{\rho_s},\ \left.u_\theta^p\right|_{\rho_s} = \left.u_\theta^e\right|_{\rho_s}. \tag{25}$$

В первом приближении условие сопряжения (25) согласно (24) примет вид

$$\sigma_\rho^{(I)p}\Big|_{\rho=1} = \sigma_\rho^{(I)e}\Big|_{\rho=1},\ \sigma_\theta^{(I)p} + \frac{\partial\sigma_\theta^{(0)p}}{\partial\rho}\Bigg|_{\rho=1} = \sigma_\theta^{(I)e} + \frac{\partial\sigma_\theta^{(0)e}}{\partial\rho}\Bigg|_{\rho=1},\ \tau_{\rho\theta}^{(I)p} = \tau_{\rho\theta}^{(')e}. \tag{26}$$

В упругой зоне ($1 < \rho < \infty$) распределение напряжений определяется согласно [1]. Удовлетворяя граничному условию при $\rho = \infty$, где $q = p/k$, получим

$$\sigma_\rho^{(0)e} = q - \frac{\alpha}{2\rho^2},\ \sigma_\theta^{(0)e} = q + \frac{\alpha}{2\rho^2},\ \tau_{\rho\theta}^{(0)e} = 0,\ q = 1 - \frac{\alpha}{2}. \tag{27}$$

Компоненты напряжения в упругой области в первом приближении согласно (22) и условию сопряжения (26) имеют вид

$$\sigma_\rho^{(')e} = \frac{K}{\rho^2} + \left(\left(\frac{2}{\rho^2} - \frac{1}{\rho^4}\right)N - \left(1 - \frac{4}{\rho^2} + \frac{3}{\rho^4}\right)\right)\cos 2\theta + \left(-\frac{2}{\rho^6} + \frac{3}{\rho^4}\right)M\cos 4\theta,$$

$$\sigma_\theta^{(I)e} = -\frac{K}{\rho^2} - \alpha + \left(\frac{1}{\rho^4}N + 1 + \frac{3}{\rho^4}\right)\cos 2\theta + \left(\frac{2}{\rho^6} - \frac{1}{\rho^4}\right)M\cos 4\theta, \tag{28}$$

$$\tau_{\rho\theta}^{(I)e} = \left(\left(\frac{2}{\rho^4} - \frac{1}{\rho^2}\right)\overline{N} - \left(-1 - \frac{2}{\rho^2} - \frac{3}{\rho^4}\right)\right)\sin 2\theta + \left(\frac{3}{\rho^6} - \frac{2}{\rho^4}\right)\overline{M}\sin 4\theta,$$

где

$$K = -\frac{3\alpha^2}{4}\left(k_1' + k_2'\right) + \frac{\alpha^2}{2}F^{(I)} + \alpha\left(k_1' + k_2'\right)\left(\ln\alpha + \frac{3}{4}\right) - \frac{\alpha}{2}F^{(I)},$$

$$N = -\alpha\left(k_2' - k_1'\right)(4 + \alpha) - 3\left(\frac{\alpha}{3}\left(3\left(k_1' - k_2'\right)(\ln\alpha + 1) - 2d_1\right)\right) -$$

$$-4\left(\alpha^2\left(d_1 - \left(k_1' - k_2'\right)(2 - \ln\alpha)\right)\right)$$

,

$$M = -\frac{\alpha^2}{2}\left(F^{(I)} + \frac{(k_1' + k_2')}{2}\right) - 15\left(\frac{\alpha}{15}\left(F^{(I)} + \frac{(k_1' + k_2')}{2}\right)\left(16\ln\alpha - \frac{17}{2}\right)\right) -$$

$$-16\left(\frac{\alpha^2}{2}\left(F^{(I)} + \frac{(k_1' + k_2')}{2}\right)(1 - \ln\alpha)\right),$$

$$\overline{N} = -2\left[\left(k_2' - k_1'\right)\alpha(1 + \alpha) + \left(\alpha^2\left(d_1 - \left(k_1' - k_2'\right)(2 - \ln\alpha)\right)\right)\right],$$

$$\overline{M} = -\left(2\alpha^2\left(F^{(I)} + \frac{(k_1' + k_2')}{2}\right) - 4\left(\frac{\alpha^2}{2}\left(F^{(I)} + \frac{(k_1' + k_2')}{2}\right)(1 - \ln\alpha)\right)\right).$$

Для определения радиуса упругопластической области в первом приближении получим

$$\rho_s^{(I)} = \frac{\sigma_\theta^{(I)p} - \sigma_\theta^{(I)e}}{\frac{d\sigma_\theta^{(0)e}}{d\rho} - \frac{d\sigma_\theta^{(0)p}}{d\rho}}. \tag{29}$$

Из (14), (27) будем иметь

$$\frac{d\sigma_\theta^{(0)p}}{d\rho}\Bigg|_{\rho=1} = 0, \quad \frac{d\sigma_\theta^{(0)e}}{d\rho}\Bigg|_{\rho=1} = -\alpha, \tag{30}$$

откуда согласно (28)–(30) найдем

$$\rho_s' = (k_1'+k_2')(\frac{1}{4}-\ln\alpha)+\frac{F^{(I)}}{2}-1+((k_2'-k_1')(6+8\alpha+\ln\alpha(3-8\alpha))-2d_1(3+2\alpha)-16\alpha)\cos 2\theta-$$
$$-\left(F^{(I)}+\frac{k_1'+k_2'}{2}\right)\left(8\alpha(-3+\ln\alpha)+\frac{17}{2}\right)\cos 4\theta \text{ , при } \rho=1. \quad (31)$$

Определим перемещение в пластической и упругой областях. Характер изменения деформированного состояния в некоторой точке P в процессе нагружения в рассматриваемом случае представляется следующим образом: сначала возрастают упругие деформации; затем, когда граница упругопластического состояния материала достигает точки P, процесс изменения упругих деформаций прекращается, так как изменение напряжений в пластической зоне в рассматриваемом случае не происходит. При дальнейшем возрастании нагрузок возникают пластические деформации.

Согласно [1] перемещения и деформации в упругой и пластической областях примут вид

$$u^0=\frac{1}{2E}(\alpha+\rho-2\alpha\ln\rho), v=0, e_\rho^0=\frac{1}{2E}(1-\frac{2\alpha}{\rho}), \quad (32)$$
$$e_\theta^0=\frac{1}{2E}(\frac{\alpha}{\rho}+1-2\alpha\frac{\ln\rho}{\rho}), e_{\rho\theta}^0=0.$$

В упругой области согласно (25) получим

$$u_\rho^{(')e}=\frac{1}{E}\left[(1+\mu)(-\frac{K}{\rho})+\left(\frac{(1+\mu)}{3\rho^3}(N-2\overline{N})-\frac{2}{\rho}(N-\overline{N})-(1+\mu)\left(\rho-\frac{1}{\rho^3}\right)-\frac{4}{\rho^3}\right)\cos 2\theta+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{5\rho^5}(1+\mu)(2M-3\overline{M})-(1+\frac{\mu}{3})\frac{1}{\rho^3}(M-\overline{M})\right)\cos 4\theta\right],$$
$$u_\theta^{(')e}=\frac{1}{E}\left[\left(\frac{(1+\mu)}{3\rho^3}(N-2\overline{N})-\frac{\mu-1}{\rho}(N-\overline{N})+(1+\mu)\left(\rho+\frac{1}{\rho^3}\right)+2(1-\mu)\frac{1}{\rho}\right)\sin 2\theta+\right. \quad (33)$$
$$\left.+\left(\frac{1}{5\rho^5}(1+\mu)(2M-3\overline{M})-\frac{2\mu}{3\rho^3}(M-\overline{M})\right)\sin 4\theta\right],$$

где μ- коэффициент Пуассона.

В пластической зоне согласно (9) и ассоциированному закону имеют место следующие соотношения

$$e_\rho=e_\rho^p=\lambda\frac{\partial f}{\partial\sigma_\rho}=\lambda\left[\frac{1}{k_1k_2}\left(\frac{\sigma_\rho^{(p)}+\sigma_\theta^{(p)}}{2}-\frac{\sigma_\rho^{(p)}-\sigma_\theta^{(p)}}{2}\cos^2 2\theta\right)-\right.$$
$$-\frac{1}{2}(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2})+(\frac{1}{k_2}-\frac{1}{k_1})\frac{\cos 2\theta}{2}-$$
$$\left.-\frac{\tau_{\rho\theta}^p}{2k_1k_2}\sin 4\theta-F(\frac{\sigma_\rho^{(p)}-\sigma_\theta^{(p)}}{2}\sin^2 2\theta-\frac{\tau_{\rho\theta}^p}{2}\sin 4\theta)\right],$$
$$e_\theta=e_\theta^p=\lambda\frac{\partial f}{\partial\sigma_\theta}=\lambda\left[\frac{1}{k_1k_2}\left(\frac{\sigma_\rho^{(p)}+\sigma_\theta^{(p)}}{2}+\frac{\sigma_\rho^{(p)}-\sigma_\theta^{(p)}}{2}\cos^2 2\theta\right)-\right. \quad (34)$$
$$-\frac{1}{2}(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2})-(\frac{1}{k_2}-\frac{1}{k_1})\frac{\cos 2\theta}{2}+$$

$$+\frac{\tau^p_{\rho\theta}}{2k_1k_2}\sin 4\theta + F(\frac{\sigma^{(p)}_\rho - \sigma^{(p)}_\theta}{2}\sin^2 2\theta - \frac{\tau^p_{\rho\theta}}{2}\sin 4\theta)\Bigg],$$

$$2e_{\rho\theta} = 2e^p_{\rho\theta} = \lambda\frac{\partial f}{\partial\tau_{\rho\theta}} = \lambda\left[-\frac{2\tau^p_{\rho\theta}}{k_1k_2}\sin^2 2\theta + (\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1})\sin 2\theta - \right.$$

$$\left. -\frac{\sigma^{(p)}_\rho - \sigma^{(p)}_\theta}{2k_1k_2}\sin 4\theta + F(2\tau^p_{\rho\theta}\cos^2 2\theta - \frac{\sigma^{(p)}_\rho - \sigma^{(p)}_\theta}{2}\sin 4\theta)\right].$$

Из (34) следует

$$\frac{e^p_\rho}{\partial f/d\sigma_\rho} = \frac{e^p_\theta}{\partial f/d\sigma_\theta} = \frac{e^p_{\rho\theta}}{\partial f/d\tau_{\rho\theta}} = \lambda. \tag{35}$$

В соотношениях (32) присутствуют компоненты пластической деформации, так как только они испытывают приращения в пластической зоне при возрастании нагрузки, причем при $t = 0$ имеют место равенства $e^p_\rho = e^p_\theta = e^p_{\rho\theta} = 0$. Момент времени $t = 0$ для каждой точки A отсчитывается от момента прохождения через нее упругопластической границы.

Полные деформации при $t = 0$, т. е. в момент возникновения пластических деформаций, отличны от нуля и совпадают с упругими деформациями, накопленными элементом тела к моменту достижения им предела текучести. Перепишем соотношения (32) в виде

$$\frac{e_\rho - e^e_\rho}{\partial f/d\sigma_\rho} = \frac{e_\theta - e^e_\theta}{\partial f/d\sigma_\theta} = \frac{2\left(e_{\rho\theta} - e^e_{\rho\theta}\right)}{\partial f/d\tau_{\rho\theta}}. \tag{36}$$

С учетом (34) соотношения (36) перепишем в виде

$$\frac{e_\rho - e^e_\rho}{\tilde{A}} = \frac{e_\theta - e^e_\theta}{\tilde{B}} = \frac{2\left(e_{\rho\theta} - e^e_{\rho\theta}\right)}{\tilde{C}}, \tag{37}$$

где

$$\tilde{A} = \left[\frac{1}{k_1k_2}\left(\frac{\sigma^{(p)}_\rho + \sigma^{(p)}_\theta}{2} - \frac{\sigma^{(p)}_\rho - \sigma^{(p)}_\theta}{2}\cos^2 2\theta\right) - \right.$$

$$-\frac{1}{2}(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}) + (\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1})\frac{\cos 2\theta}{2} -$$

$$\left. -\frac{\tau^p_{\rho\theta}}{2k_1k_2}\sin 4\theta - F(\frac{\sigma^{(p)}_\rho - \sigma^{(p)}_\theta}{2}\sin^2 2\theta - \frac{\tau^p_{\rho\theta}}{2}\sin 4\theta)\right],$$

$$\tilde{B} = \left[\frac{1}{k_1k_2}\left(\frac{\sigma^{(p)}_\rho + \sigma^{(p)}_\theta}{2} + \frac{\sigma^{(p)}_\rho - \sigma^{(p)}_\theta}{2}\cos^2 2\theta\right) - \right.$$

$$-\frac{1}{2}(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}) - (\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1})\frac{\cos 2\theta}{2} -$$

$$\left. -\frac{\tau^p_{\rho\theta}}{2k_1k_2}\sin 4\theta + F(\frac{\sigma^{(p)}_\rho - \sigma^{(p)}_\theta}{2}\sin^2 2\theta - \frac{\tau^p_{\rho\theta}}{2}\sin 4\theta)\right],$$

$$\tilde{C} = \left[-\frac{2\tau^p_{\rho\theta}}{k_1k_2}\sin^2 2\theta + (\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1})\sin 2\theta - \right.$$

$$-\frac{\sigma_\rho^{(p)}-\sigma_\theta^{(p)}}{2k_1k_2}\sin 4\theta + F(2\tau_{\rho\theta}^p\cos^2 2\theta - \frac{\sigma_\rho^{(p)}-\sigma_\theta^{(p)}}{2}\sin 4\theta)\Bigg].$$

Упругие деформации при $\mu=\frac{1}{2}$ примут вид

$$e_\rho^e=\frac{1}{E}\left(\sigma_\rho-\frac{1}{2}\sigma_\theta\right),$$
$$e_\theta^e=\frac{1}{E}\left(\sigma_\theta-\frac{1}{2}\sigma_\rho\right), \tag{38}$$
$$e_{\rho\theta}^e=\frac{\tau_{\rho\theta}}{2G}.$$

Согласно [1] запишем соотношения для деформаций

$$e_\rho=\frac{\partial u^{(n)}}{\partial\rho}, e_\theta=\frac{1}{\rho}\frac{\partial v^{(n)}}{\partial\theta}+\frac{u^{(n)}}{\rho}, e_{\rho\theta}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial v^{(n)}}{\partial\rho}-\frac{v^{(n)}}{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u^{(n)}}{\partial\theta}\right]. \tag{39}$$

Согласно [2] , (37)–(41) дифференциальные уравнения для определения перемещения в пластической области в первом приближении примут вид

$$\frac{\partial u^{(I)}}{\partial\rho}=\frac{1}{E}\Bigg[\sigma_\rho^{(I)}-\sigma_\theta^{(I)}(\frac{1}{2}-\ln\rho)+\Bigg(\frac{k_2'+k_1'}{2}-\frac{k_2'-k_1'}{2}\cos 2\theta+$$
$$+(k_2'+k_1'+F^{(I)})\sin^2 2\theta\Bigg)\ln\rho\Bigg], \tag{40}$$
$$\frac{\partial v^{(I)}}{\partial\rho}-\frac{v^{(I)}}{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u^{(I)}}{\partial\theta}=2\left(\frac{2\alpha}{E\rho}+\frac{1}{2G}\right)\tau_{\rho\theta}^{(I)}+\frac{2\alpha}{E\rho}(k_2'-k_1')+$$
$$+\frac{\alpha}{2\rho}(k_2'+k_1'+F^{(I)})\sin 4\theta.$$

Из уравнения (40) получим

$$u_\rho^{(I)p}=A^*+\left[B^*+\tilde{N}_{21}^*\right]\cos 2\theta+[D^*+C_{41}^*]\cos 4\theta,$$

$$u_\theta^{(I)p}=\frac{\tilde{N}_{00}^*}{\rho}+\left[B^{**}-2\tilde{N}_{21}^*+\tilde{N}_{22}^*\rho\right]\sin 2\theta+\left[D^{**}-4\tilde{N}_{41}^*+\tilde{N}_{42}^*\rho\right]\Big]\sin 4\theta, \tag{41}$$

где

$$A^*=\alpha(k_1'+k_2')\left(-\ln^2\rho+\ln\rho(\ln\alpha+\frac{5}{4}-\frac{3}{\rho})+\frac{3\alpha}{8\rho}\right)+\frac{F^{(I)}}{2}\left(\ln\rho(-\alpha+\frac{\alpha^2}{\rho}+\rho)-\frac{\alpha^2}{2}-\rho\right),$$

$$B^*=(k_2'-k_1')\Bigg(\ln^2\rho-\frac{7\alpha}{\rho}\ln\rho+\frac{\alpha}{\rho}(\alpha-4+4\alpha\ln\alpha)-$$
$$-\frac{\alpha\ln\rho}{\rho}(4+\alpha)+\rho\left(-3\alpha(\ln\alpha+1)+\frac{1}{2}\right)\Bigg)+2d_1\alpha(\rho+\frac{2\alpha}{\rho}),$$

$$D^*=\left(F^{(I)}+\frac{k_1'+k_2'}{2}\right)\left(-\frac{17\alpha^2}{2\rho}(\ln\rho+1)-\alpha\ln\rho\left(16\ln\alpha-\frac{17}{2}\right)+\frac{\alpha^2}{\rho}\left(\frac{33}{4}-8\ln\alpha\right)-\frac{1}{2\rho}(\ln\rho-1)\right),$$

$$B^{**}=\frac{1}{E}\Bigg[(k_2'-k_1')\Bigg(-8\alpha\ln\rho(\alpha+\frac{1}{\rho})+\ln^2\rho-\frac{\alpha}{\rho}\left(12-8\alpha^2(3-\ln\alpha)-\alpha(1+4\ln\alpha)\right)-$$

$$-\frac{\alpha\ln\rho}{\rho}(11+\alpha)+\rho\left(-3\alpha(\ln\alpha+1)+\frac{1}{2}\right)\Bigg)+\left(\frac{8\alpha^2}{\rho}+2\rho+\frac{4\alpha}{\rho}\right)d_1\Bigg]-$$

$$-\frac{2}{G}\left[(k_2'-k_1')\left(\ln^2\rho-\frac{\alpha}{\rho}\ln\rho(11+\alpha)+\frac{\alpha}{\rho}\left(\alpha-4+4\alpha\ln\alpha\right)+\rho\left(-3\alpha(\ln\alpha+1)+\frac{1}{2}\right)\right)+2d_1\alpha(\rho+\frac{2\alpha}{\rho})\right],$$

$$D^{**}=\frac{1}{E}\left(F^{(I)}+\frac{k_1'+k_2'}{2}\right)\left(\alpha^2\ln\rho\left(\frac{-8\alpha}{\rho}+1\right)-\frac{32\alpha^2}{15\rho}\left(16\ln\alpha-\frac{17}{2}\right)\right)-$$

$$-\frac{2}{G}\left(F^{(I)}+\frac{k_1'+k_2'}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\ln^2\rho-\alpha^2\ln\rho(1+2\ln\alpha)\right).$$

Из (33),(42) и условий сопряжения (25) и найдем коэффициенты $\mathrm{C}_{00}^*, C_{21}^*, C_{22}^*, C_{41}^*, C_{42}^*$.

$$\mathrm{C}_{00}^*=0,$$

$$C_{21}^*=N^*-\tilde{B}^*,$$

$$C_{22}^*=\bar{N}^*-\tilde{B}^{**}+2(N^*-\tilde{B}^*),$$

$$C_{41}^*=M^*-\tilde{D}^*,$$

$$C_{42}^*=\overline{M}^*-D^{**}+4(M^*-D^*),$$

где

$$K^*=-\frac{(1+\mu)K}{E},$$

$$N^*=\frac{1}{E}\left(\frac{(1+\mu)}{3}(N-2\bar{N})-2(N-\bar{N})-4\right),$$

$$M^*=\frac{1}{E}\left(\frac{(1+\mu)}{5}\left(2M-3\bar{M}\right)-\frac{(3+\mu)}{3}\left(M-\bar{M}\right)\right),$$

$$N^{**}=\frac{1}{E}\left(\frac{(1+\mu)}{3}\left(N-2\bar{N}\right)-(\mu-1)\left(N-\bar{N}\right)+4\right),$$

$$M^{**}=\frac{1}{E}\left(\frac{(1+\mu)}{5}\left(2M-3\bar{M}\right)-\frac{2\mu}{3}\left(M-\bar{M}\right)\right), \qquad (42)$$

$$\tilde{A}^*=\frac{3\alpha^2}{8}(k_1'+k_2')-\frac{F^{(I)}}{2}\left(\frac{\alpha^2}{2}+1\right), \tilde{B}^*=(k_2'-k_1')\left(\alpha\left(\alpha-7\right)+\alpha\ln\alpha(4\alpha-3)+\frac{1}{2}\right)+2d_1\alpha(1+2\alpha),$$

$$\tilde{D}^*=\left(F^{(I)}+\frac{k_1'+k_2'}{2}\right)\left(\alpha^2\left(\frac{1}{4}-8\ln\alpha\right)+\frac{1}{2}\right),$$

$$\tilde{B}^{**}=\frac{1}{E}\left[(k_2'-k_1')\left(\alpha(-6\ln\alpha+24\alpha^2-\alpha-15)+\frac{1}{2}\right)+2\left(4\alpha^2+2\alpha+1\right)d_1\right]-$$

$$-\frac{2}{G}\left[(k_2'-k_1')\left(\alpha\left(\alpha-7+\ln\alpha(4\alpha-3)\right)+\frac{1}{2}\right)+2d_1\alpha(1+2\alpha)\right],$$

$$\tilde{D}^{**}=-\frac{32\alpha^2}{15E}\left(F^{(I)}+\frac{k_1'+k_2'}{2}\right)\left(16\ln\alpha-\frac{17}{2}\right),$$

где $K, M, N, \bar{M}, \bar{N}$ определены согласно (28).

ЛИТЕРАТУРА

[1]*Бицено, К. Б.* Техническая академия / К. Б. Бицено , Р. Л. Граммель. - Л. : Гостехиздат, 1950. - 900 с.

[2]*Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев , Л. В. Ершов. - М. : Наука, 1978. - 208 с.

[3]*Леденев, А. П.* Об анизотропном идеальнопластическом состоянии толстой плиты, ослабленной эллиптическим отверстием / А. П. Леденев // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. - 2006. - № 1(48). - С. 81-85.

[4] *Леденев, А. П.* Об упругопластическом состоянии толстостенной трубы из анизотропного идеальнопластического материала / А. П. Леденев // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. - 2006. - № 2(49). - С. 16-21.

[5]*Леденев, А. П.* Упругопластическое состояние анизотропной пластической трубы под действием внутреннего давления / А. П. Леденев // Научно-информационный вестник докторантов, аспирантов, студентов / Чуваш. гос. пед. ун-т. - 2006. - №1(7), Т. 1. - С. 20-27.

T. N. Pavlova

ELASTOPLASTIC CONDITION OF A THIN SLAB FROM ANYSOTROPIC MATERIAL WEAKENED BY AN APERTURE UNDER THE STRETCHING STRESS

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University

Abstract. Stressedly-deformed state of a thin slab from anisotropic elastoplastic material with an elliptic aperture in biaxial tension at infinity is considered in the work. The solution of this task is made with the help of perturbation theory [2], the tension and shift components in elastic and plastic stability are found at first approximation, the limit of plastic area is determined.

Keywords: tension, deformation, elasticity, plasticity, anisotropy, an aperture.

Павлова Татьяна Николаевна

аспирант кафедры матанализа Чувашского государственного педагогического университета, г. Чебоксары

`e-mail:` tn_pavlova@mail.ru

Pavlova Tatyana Nikolaevna

Postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, I.Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary